видавництво Генеза

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР
ОКСАНА ЄРГІНА

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

11

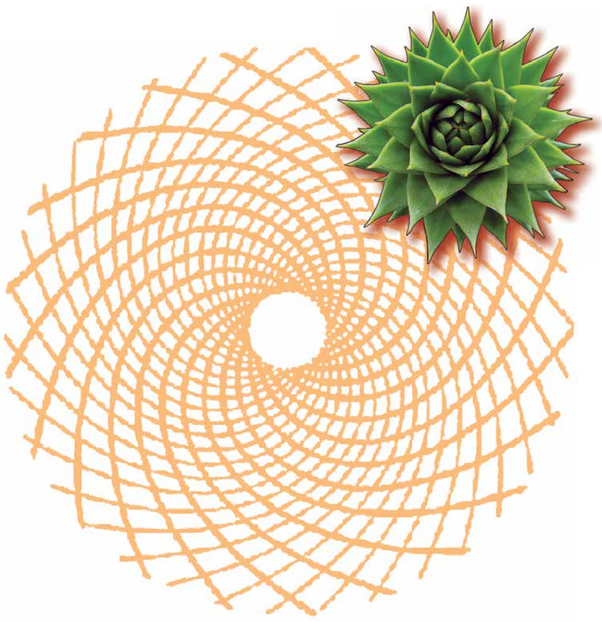
Олександр Істер
Оксана Єргіна

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

(ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)

Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України



Київ
«ГЕНЕЗА»
2019

УДК 514(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 12.04.2019 № 472)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Істер О.С.
І-89 Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. — Київ : Генеза, 2019. — 416 с. : іл.

ISBN 978-966-11-0973-4.

УДК 514(075.3)

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович
ЄРГІНА Оксана Володимирівна

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ
(профільний рівень)

Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Головний редактор *Наталія Заблоцька*
Редактори *Наталія Дашко, Оксана Єргіна*
Обкладинка і художнє оформлення *Тетяни Кущ*
Комп'ютерна верстка і технічні малюнки *Юрія Лебедєва*
Коректор *Лариса Леуська*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 26,0. Обл.-вид. арк. 23,75.
Тираж 18 995 пр. Вид. № 1997. Зам. № .

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 5088 від 27.04.2016.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ», вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4526 від 18.04.2013.

ISBN 978-966-11-0973-4

Шановні одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

Протягом навчання в 11 класі ви продовжите опановувати курс «Алгебра і початки аналізу», у якому об'єднано матеріал кількох галузей математичної науки. Нагадаємо, що цей курс дасть вам змогу оволодіти такою системою знань з алгебри і початків аналізу та набути таких компетентностей, які будуть потрібні не тільки в повсякденному житті, а й у майбутній трудовій діяльності і яких буде достатньо для продовження навчання у закладах вищої освіти.

В 11 класі велику увагу приділено перетворенню виразів, розв'язуванню рівнянь, нерівностей, пов'язаних з новими для вас функціями та їх властивостями. Ви значно розширите відомості з комбінаторики і теорії ймовірностей, розглянете ще одну складову математичного аналізу – інтегральне числення, а також систематизуєте та узагальните відомості з курсу алгебри попередніх класів.

Розглянемо особливості підручника та роботи з ним. Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, пунктів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої роботи, проектної діяльності тощо. Теоретичний матеріал підручника викладено простою, доступною мовою, проілюстровано малюнками та великою кількістю зразків розв'язування задач і вправ.

Для зручності в підручнику використано такі умовні позначення:

! – важливий матеріал (означення, математичні твердження, властивості, алгоритми), який треба запам'ятати;

? – запитання і завдання до вивченого теоретичного матеріалу;

Т – теорема; Н – наслідок; ■ – закінчення доведення;

– «ключова» задача (задача, висновок якої використовують під час розв'язування інших задач);

1.2 – вправа для виконання у класі;

1.3 – вправа для виконання вдома.

Усі задачі і вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки **1** починаються вправи початкового рівня;

з позначки **2** починаються вправи середнього рівня;

з позначки **3** починаються вправи достатнього рівня;

з позначки **4** починаються вправи високого рівня.

Рубрика **«Розв'яжіть задачі та виконайте вправи»** містить значну кількість завдань для класної і домашньої роботи, усних вправ, практичних завдань, що відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати. **«Вправи підвищеної складності»** допоможуть поглибити знання з алгебри і початків аналізу та сприятимуть підготовці до різноманітних математичних змагань.

У рубриці **«Життєва математика»** зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, – усім тим, що знадобиться кожному в повсякденному житті. У рубриці **«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»** пропонується виконати вправи, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми. Рубрика **«Цікаві задачі для учнів неледачих»** містить нестандартні задачі, задачі математичних олімпіад різних країн світу, а також авторські задачі видатних математиків.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, якщо виконаєте завдання **«Домашньої самостійної роботи»** та **«Завдання для перевірки знань»**. Систематизувати і узагальнити знання з тем розділів допоможуть **«Вправи для повторення розділу»**, а готуватися до зовнішнього незалежного оцінювання з математики – завдання рубрики **«Перевірте свою компетентність»**.

У підручнику також подано багато цікавих фактів з історії становлення і розвитку математичної науки.

Бажаємо вам успіхів у навчанні!

Шановні вчительки та вчителі!

Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання учнів алгебри і початків аналізу. Авторський колектив намагався створити його таким, щоб він повною мірою реалізував мету державної програми з математики; сприяв формуванню в учнів наукового світогляду, усвідомленню математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини і необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві; допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності; забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури; формував життєві компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість.

Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, пункти, рубрики) та поділу навчального матеріалу на теоретичну і практичну складові, підручник містить рубрику **«Життєва математика»**, що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та допоможе формуванню в учнів предметних і ключових компетентностей. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності, зміст рубрик **«Цікаві задачі для учнів неледачих»** і **«Вправи підвищеної складності»** допоможуть забезпечити особистісно орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятимуть формуванню позитивної мотивації учнів до вивчення алгебри і початків аналізу.

У підручник включено велику кількість задач і вправ, у тому числі завдань для повторення, систематизації та узагальнення навчального матеріалу до кожного розділу та відповіді і вказівки до задач і вправ цього підручника.

Щасти вам у вашій нелегкій праці!

РОЗДІЛ 1

ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ...

- ***познайомитеся*** *з показниковою та логарифмічною функціями; степенем з довільним дійсним показником;*
- ***навчитеся*** *будувати графіки показникових і логарифмічних функцій; застосовувати їх властивості; розв'язувати показникові й логарифмічні рівняння та нерівності; диференціювати показникові, логарифмічні та степеневі функції та застосовувати їх похідні для дослідження властивостей функцій.*

§ 1. СТЕПІНЬ З ДОВІЛЬНИМ ДІЙСНИМ ПОКАЗНИКОМ. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

Раніше ви вже розглядали певні класи степеневих функцій та степенів: степені з натуральним показником, цілим показником, раціональним показником. Нагадаємо, що

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}, \text{ де } n \in N,\ n \geqslant 2;\ \ a^1 = a;\ \ a^0 = 1\ (a \neq 0);$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}, \text{ де } a \neq 0,\ p \in Z;\ \ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ де } a > 0,\ n \in N,\ m \in Z.$$

А чи існує вираз a^l, де l – ірраціональне число?

1. Степінь з довільним дійсним показником

Нехай $a > 0$, l – ірраціональне число. Розглянемо вираз a^l. Для числа l виберемо послідовність раціональних чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$, які є наближеними значеннями числа l з довільною точністю. Запишемо послідовність степенів з раціональними показниками $a^{l_1}, a^{l_2}, \ldots, a^{l_n}, \ldots$. Ця послідовність і задає наближене значення числа a^l з довільною точністю.

Приклад 1. Розглянемо степінь $3^{\sqrt{2}}$. Оскільки $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, то $1 < \sqrt{2} < 2$, отже, $3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$, тобто $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$.

Зрозуміло, що таке оцінювання для числа $3^{\sqrt{2}}$ є неточним, тому розглянемо нижче наведені десяткові наближення числа $\sqrt{2}$ та використаємо для обчислення виразів вигляду 3^{α}, де α – раціональне число, калькулятор:

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$;

$3^{1{,}4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}5}$; отже, $4{,}6555367 < 3^{\sqrt{2}} < 5{,}1961524$;

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$;

$3^{1{,}41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}42}$; отже, $4{,}7069650 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7589613$;

$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$;

$3^{1{,}414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}415}$; отже, $4{,}7276950 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7328918$;

$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$;

$3^{1{,}4142} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}4143}$; отже, $4{,}7287339 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7292534$.

Як бачимо, поступово межі значення виразу $3^{\sqrt{2}}$, як з недостачею, так і з надлишком, наближаються до одного і того самого числа. Якщо значення $3^{\sqrt{2}}$ обчислити на калькуляторі, то матимемо: $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}7288043$.

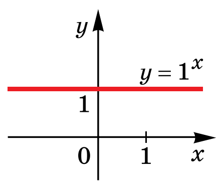
Як і для степеня з раціональним показником, вважають, що: $1^l = 1$ для будь-якого $l \in R$, а $0^l = 0$ для будь-якого $l > 0$.

2. Показникова функція та її графік

Функцію вигляду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають *показниковою функцією*.

Наприклад, показниковими є функції $y = 7^x$, $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$, $y = \pi^x$, $y = (\sqrt{3})^x$ тощо. Зауважимо, що показникова функція відіграє важливу роль у житті людини, оскільки є математичною моделлю певних реальних процесів навколишнього світу. Наприклад, процесів кількісних змін у популяціях організмів або вмісту радіоактивних речовин протягом довготривалого періоду часу тощо.

Функція вигляду $y = a^x$ існує і при $a = 1$. У такому разі $y = 1^x$, тобто $y = 1$ для $x \in R$. Графіком функції $y = 1^x$ є пряма (мал. 1.1). Зауважимо, що коли $a = 1$, функцію $y = a^x$ не називають показниковою.



Мал. 1.1

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Оскільки при $a > 0$ вираз a^x має зміст при будь-якому x, то

областю визначення функції $y = a^x$ є множина всіх дійсних чисел.

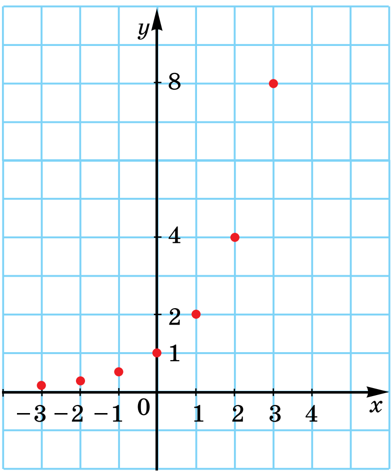
Розглянемо кілька показникових функцій та побудуємо їх графіки по точках.

Приклад 2. Нехай маємо функцію $y = 2^x$. Складемо таблицю її значень для кількох цілих значень аргументу.

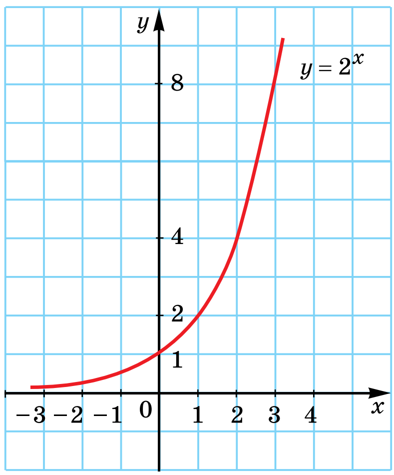
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Позначимо на координатній площині точки, які отримано в таблиці (мал. 1.2). Якби на цій площині позначили більшу кількість точок, координати яких задовольняють рівність $y = 2^x$, а потім сполучили їх плавною лінією, то дістали б графік функції $y = 2^x$ (мал. 1.3).

Зауважимо, що вираз a^x, де $a > 0$, є додатним для будь-якого значення x, тому графік функції $y = a^x$ (і зокрема $y = 2^x$) не перетинає вісь абсцис. Але, якщо $x \to -\infty$, то $2^x \to 0$. Тому графік функції $y = 2^x$ при $x \to -\infty$ наближається до осі абсцис, тому вісь абсцис є його асимптотою.



Мал. 1.2

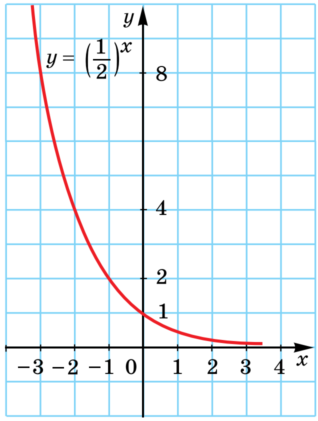


Мал. 1.3

Приклад 3. Нехай маємо функцію $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Складемо таблицю її значень.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Міркуючи як у прикладі 2, отримаємо графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (мал. 1.4).

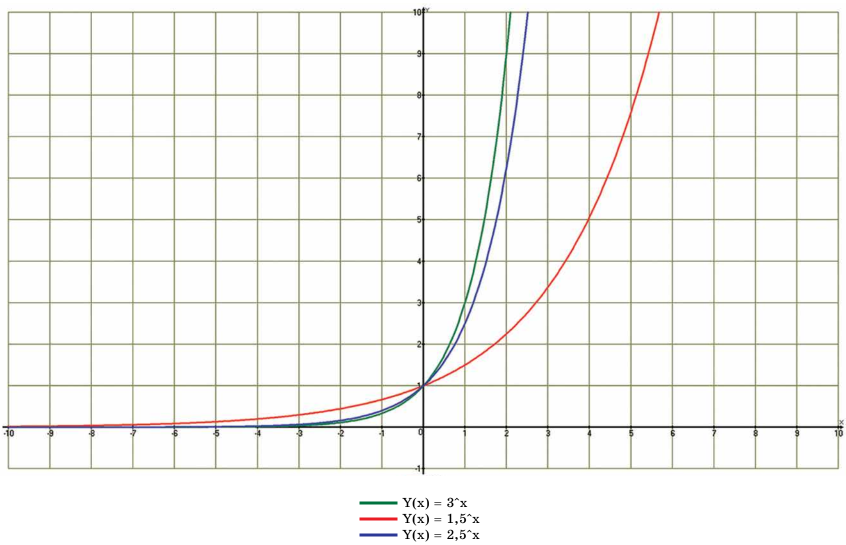


Мал. 1.4

3. Властивості показникової функції

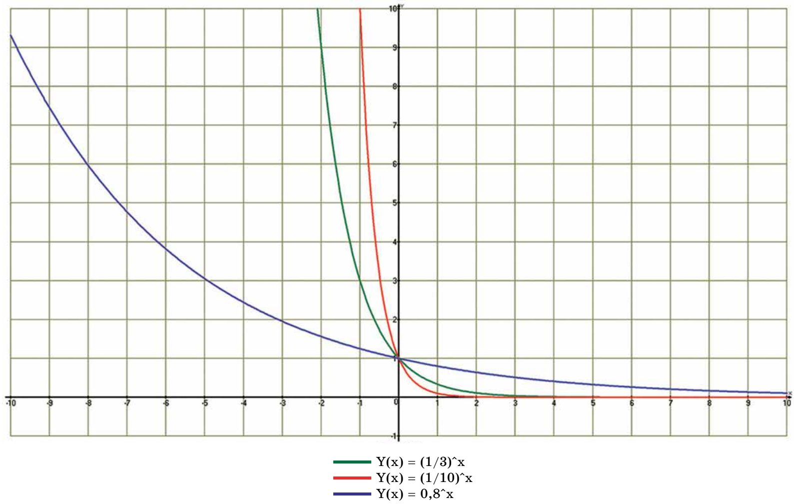
На малюнку 1.5 зображено вікно однієї з комп'ютерних програм, за допомогою якої побудовано графіки функцій $y = 3^x$ (зеленого кольору), $y = 2{,}5^x$ (синього кольору), $y = 1{,}5^x$ (червоного кольору). Очевидно, можна дійти висновку, що при $a > 1$ графік функції $y = a^x$ схематично виглядає так само, як графік функції $y = 2^x$.

На малюнку 1.6 зображено графіки функцій $y = 0{,}8^x$ (синього кольору), $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (зеленого кольору), $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ (червоного кольору). Очевидно, що вони виглядають як графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

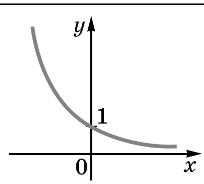
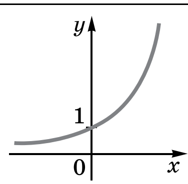


Мал. 1.5

Систематизуємо властивості функції $y = a^x$ для $0 < a < 1$ та для $a > 1$ у вигляді таблиці на сторінці 9.



Мал. 1.6

Функція $y = a^x$		
Властивості	$0 < a < 1$	$a > 1$
Область визначення	R	R
Множина значень	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Парність, непарність	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна
Періодичність	Неперіодична	Неперіодична
Нулі функції	Немає	Немає
Проміжки знакосталості	$y > 0$ при $x \in R$	$y > 0$ при $x \in R$
Проміжки монотонності	Спадає при $x \in R$	Зростає при $x \in R$
Екстремуми	Немає	Немає
Асимптота	$y = 0$	$y = 0$
Особливості графіка функції: проходить через точку (0; 1)		

Властивості степеня з раціональним показником, які ми розглянули в попередніх класах, справджуються і для степеня з дійсним показником.

Для будь-яких $x \in R$, $y \in R$, $a > 0$, $b > 0$ маємо:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad (ab)^x = a^x b^x;$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

Розглянемо приклади використання властивостей показникової функції.

Приклад 4. Порівняти значення виразів:

1) $\pi^{2,7}$ і $\pi^{2,8}$; 2) $(\sqrt{2}-1)^{-5}$ і $(\sqrt{2}-1)^{-4}$.

Розв'язання. 1) $\pi \approx 3{,}14 > 1$, тому функція $y = \pi^x$ зростає на R, отже, більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Оскільки $2{,}7 < 2{,}8$, то і $\pi^{2,7} < \pi^{2,8}$.

2) $\sqrt{2}-1 \approx 0{,}4 < 1$, тому функція $y = (\sqrt{2}-1)^x$ спадає на R, отже, більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Оскільки $-5 < -4$, то $(\sqrt{2}-1)^{-5} > (\sqrt{2}-1)^{-4}$.

Відповідь. 1) $\pi^{2,7} < \pi^{2,8}$; 2) $(\sqrt{2}-1)^{-5} > (\sqrt{2}-1)^{-4}$.

Приклад 5. Порівняти з одиницею основу степеня a, $a > 0$, якщо: 1) $a^{\sqrt{3}} < a^{1,8}$; 2) $a^{-2} > a$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, то $\sqrt{3} < 1{,}8$. За умовою $a^{\sqrt{3}} < a^{1,8}$, тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тому функція $y = a^x$ зростає, а отже, $a > 1$.

2) $-2 < 1$, а за умовою $a^{-2} > a$, тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тому функція $y = a^x$ спадає, отже, $0 < a < 1$.

Відповідь. 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$.

Вирази, що містять степені з дійсними показниками, можна спрощувати так само, як і вирази з раціональними показниками.

Приклад 6. Спростити вираз:

1) $a^{1+\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}}$; 2) $b^{3-\sqrt{7}} : b^{1+\sqrt{7}}$; 3) $(c^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}}$.

Розв'язання. 1) $a^{1+\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a^{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = a^2$;

2) $b^{3-\sqrt{7}} : b^{1+\sqrt{7}} = b^{3-\sqrt{7}-(1+\sqrt{7})} = b^{3-\sqrt{7}-1-\sqrt{7}} = b^{2-2\sqrt{7}}$;

3) $(c^{\sqrt{5}})^{\sqrt{20}} = c^{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}} = c^{\sqrt{100}} = c^{10}$.

Відповідь. 1) a^2; 2) $b^{2-2\sqrt{7}}$; 3) c^{10}.

3. Застосування показникової функції до розв'язування прикладних задач

Ми вже згадували, що показникову функцію часто використовують для описування різноманітних фізичних процесів. Зокрема, радіоактивний розпад описують формулою:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_0}},$$

де m_0 – маса радіоактивної речовини в початковий момент часу $t = 0$, $m(t)$ – її маса в момент часу t, T_0 – період напіврозпаду (проміжок часу, за який початкова кількість речовини зменшується вдвічі). Очевидно, що права частина цієї формули є показниковою функцією.

Приклад 7. Період напіврозпаду деякого ізотопа плутонія складає 140 діб. Скільки плутонія залишиться через 4 роки, якщо його початкова маса становила 10 г?

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $m_0 = 10$ г, $t = 3 \cdot 365 + 366 = 1461$ (доба).

Тоді $m(1461) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1461}{140}} \approx 0{,}0072$ г.

Відповідь. 0,0072 г.

За допомогою показникової функції можна також визначати тиск повітря залежно від висоти.

Приклад 8. Альпініст, перебуваючи на висоті $h_1 = 1000$ м, визначив, що тиск повітря складає $p_1 = 740$ мм рт. ст. Яким буде тиск на висоті $h_2 = 2100$ м за тієї самої температури повітря?

Розв'язання. Відомо, що тиск p_2 (за умови незмінності температури повітря) знаходять за барометричною формулою $p_2 \approx p_1 \cdot (0{,}8886)^{h_2 - h_1}$, де h_1 і h_2 – висота в кілометрах.

Тоді $p_2 \approx 740 \cdot (0{,}8886)^{2{,}1-1} \approx 649{,}8$ (мм рт. ст.).

Відповідь. 649,8 мм рт. ст.

А ще раніше...

До початку XVII ст. в математиці намагалися не застосовувати від'ємні та дробові показники степеня. Тільки в кінці XVII ст. у зв'язку зі зростанням складності математичних задач постала нагальна потреба у використанні степенів, показники яких можуть бути довільними дійсними числами. Узагальнення поняття степеня $y = a^n$, де n – довільне дійсне число, дало можливість розглядати показникову функцію на множині всіх дійсних чисел, а степеневу функцію $y = x^n$ на множині додатних чисел, причому і для $x < 0$ при цілих значеннях показника.

Уперше питання узагальнення поняття степеня підняв Леонард Ейлер у своїй праці «Уведення в аналіз», два розділи якої присвячено «показниковим і логарифмічним кількостям». Під поняттям «показникової кількості» Ейлер розумів вирази вигляду a^z і y^z, де a – число, y і z – змінні.

● Поясніть, як задають степінь a^l, де $a > 0$, l – ірраціональне число. ● Яку функцію називають показниковою? ● Сформулюйте властивості показникової функції $y = a^x$ для $0 < a < 1$ і для $a > 1$. ● Запам'ятайте властивості степеня з дійсним показником.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

1.1 . (*Усно*). **Які з наведених функцій є показниковими?**

1) $y = 3^x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = 1^x$; 4) $y = (-2)^x$;

5) $y = (\sqrt{2010})^x$; 6) $y = x$; 7) $y = (x - 2)^3$; 8) $y = (\pi - 1)^x$.

Які з наведених функцій є зростаючими, а які – спадними (**1.2–1.3**):

1.2. 1) $y = 8^x$; 2) $y = 0,4^x$; 3) $y = 0,01^x$; 4) $y = (2\pi)^x$?

1.3. 1) $y = 0,15^x$; 2) $y = 7^x$; 3) $y = \left(1\frac{8}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{100}\right)^x$?

1.4. Порівняйте x і y, якщо:

1) $0,2^x > 0,2^y$; 2) $1,3^x > 1,3^y$.

1.5. Порівняйте m і n, якщо:

1) $5^m < 5^n$; 2) $0,7^m < 0,7^n$.

Знайдіть значення показникової функції $y = a^x$ для даного значення аргументу x (**1.6–1.7**):

1.6. 1) $y = 3^x$; $x_1 = -2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0,5$;

2) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $x_4 = -\frac{1}{3}$.

1.7. 1) $y = 5^x$; $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$; $x_4 = \frac{1}{3}$;

2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = -0,5$; $x_4 = 0$.

2

Порівняйте числа (**1.8–1.9**):

1.8. 1) $4^{0,2}$ і $4^{0,5}$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$ і $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}$; 3) $(\sqrt{2} - 1)^5$ і $(\sqrt{2} - 1)^7$.

1.9. 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{0,8}$ і $\left(\frac{4}{9}\right)^{0,9}$; 2) 8^{-2} і $8^{-1,9}$; 3) $(1 + \sqrt{3})^{-2}$ і $(1 + \sqrt{3})^{-3}$.

Побудуйте схематично графік функції та запишіть її властивості **(1.10–1.11)**:

1.10. 1) $y = 1{,}4^x$; 2) $y = 0{,}7^x$;
3) $y = (\sqrt{2}+1)^x$; 4) $y = (3-\sqrt{8})^x$.

1.11. 1) $y = 0{,}6^x$; 2) $y = 2{,}3^x$;
3) $y = (\sqrt{5}-2)^x$; 4) $y = (\sqrt{3}+1)^x$.

1.12. Порівняйте числа a і b, якщо:

1) $\left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^a > \left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^b$; 2) $\left(\frac{1}{\cos 12^\circ}\right)^a > \left(\frac{1}{\cos 12^\circ}\right)^b$.

1.13. Порівняйте числа p і q, якщо:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^p < \left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^q$; 2) $\left(\frac{1}{\sin 15^\circ}\right)^p < \left(\frac{1}{\sin 15^\circ}\right)^q$.

Порівняйте a з одиницею ($a > 0$), якщо **(1.14–1.15)**:

1.14. 1) $a^{12} > a^{10}$; 2) $a^{-7} < a^{-8}$. **1.15.** 1) $a^{-8} < a^{-3}$; 2) $a^{15} > a^{16}$.

1.16. Період напіврозпаду деякого ізотопа плутонію складає 140 діб. Визначте масу плутонію, що залишиться через 8 років, якщо його початкова маса становила 6 г.

1.17. Період напіврозпаду деякого ізотопа торія складає 24 доби. Визначте масу торія, що залишиться через 4 роки, якщо його початкова маса становила 20 г.

1.18. Альпіністка, перебуваючи на висоті $h_1 = 800$ м, виміряла тиск повітря, значення якого становило $p_1 = 748$ мм рт. ст. Яким буде тиск повітря, коли вона підніметься на висоту $h_2 = 1200$ м за тієї самої температури повітря?

1.19. Туристична група встановила намети в горах на висоті $h_1 = 700$ м та визначила, що тиск повітря на цій висоті складає $p_1 = 749$ мм рт. ст. Яким був тиск повітря на висоті $h_2 = 1600$ м, коли туди піднялася група, щоб установити прапор України, якщо температура повітря за цей час не змінилася?

Знайдіть область значень функції **(1.20–1.21)**:

1.20. 1) $y = -5^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 3$; 4) $y = 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x$.

1.21. 1) $y = -\left(\frac{1}{7}\right)^x$; 2) $y = 2^x - 5$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$; 4) $y = 2 - 4^x$.

Обчисліть **(1.22–1.23)**:

1.22. 1) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $5^{1-2\sqrt{3}} \cdot 5^{2\sqrt{3}+2}$; 4) $7^{2-\sqrt{3}} : 7^{3-\sqrt{3}}$.

1.23. 1) $(2^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}$; 2) $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;

3) $9^{1+7\sqrt{2}} \cdot 9^{-2-7\sqrt{2}}$; 4) $4^{2+\sqrt{5}} : 4^{\sqrt{5}}$.

При якому значенні a ($a > 0$, $a \neq 1$) графік функції $y = a^x$ проходить через точку **(1.24–1.25)**:

1.24. 1) $A(1;\ 7)$; 2) $B\left(-1;\ \frac{1}{3}\right)$; 3) $C(2;\ 9)$; 4) $D(2;\ 0{,}16)$?

1.25. 1) $M(1;\ 5)$; 2) $N\left(-1;\ \frac{1}{7}\right)$; 3) $P(2;\ 16)$; 4) $Q(2;\ 0{,}09)$?

1.26. Точка $M(\sin 30°;\ y)$ належить графіку функції $y = 4^x$. Знайдіть y.

1.27. Точка $N(\operatorname{tg} 45°;\ y)$ належить графіку функції $y = 1{,}7^x$. Знайдіть y.

3 Зростаючою чи спадною є функція **(1.28–1.29)**:

1.28. 1) $y = 16^{-\frac{x}{2}}$; 2) $y = \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^{-x}$?

1.29. 1) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2x}$; 2) $y = \left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-x}$?

Обчисліть **(1.30–1.31)**:

1.30. 1) $2^{1-2\sqrt{7}} \cdot 4^{\sqrt{7}+1}$; 2) $3^{(\sqrt{5}+1)^2} : 3^{2\sqrt{5}+4}$.

1.31. 1) $9^{\sqrt{5}-1} \cdot 3^{3-2\sqrt{5}}$; 2) $4^{(1-\sqrt{7})^2} : 4^{6-2\sqrt{7}}$.

Порівняйте числа **(1.32–1.33)**:

1.32. 1) $\pi^{\frac{1}{9}}$ і 1; 2) 1 і $0{,}3^{-2}$; 3) 1 і $2{,}4^{-5}$; 4) $0{,}7^{0{,}5}$ і 1.

1.33. 1) 1 і $4^{\frac{1}{8}}$; 2) $0{,}2^{1{,}7}$ і 1; 3) $2{,}5^{-2}$ і 1; 4) 1 і $0{,}3^{-1{,}8}$.

Розташуйте числа в порядку зростання **(1.34–1.35)**:

1.34. 1) $0{,}3^{\sqrt{2}}$; $0{,}3^{-\sqrt{3}}$; $0{,}3^{5}$; 1; $0{,}3^{-\frac{1}{8}}$;

2) $(\sqrt{7})^{\sqrt{5}}$; 1; $(\sqrt{7})^{-\sqrt{2}}$; $(\sqrt{7})^{13}$; $(\sqrt{7})^{-2020}$.

1.35. 1) $(\sqrt{2})^{-\sqrt{3}}$; $(\sqrt{2})^{11}$; 1; $(\sqrt{2})^{\sqrt{7}}$; $(\sqrt{2})^{-0{,}19}$;

2) $(0{,}4)^{11}$; 1; $(0{,}4)^{-1999}$; $(0{,}4)^{\sqrt{7}}$; $(0{,}4)^{-\sqrt{3}}$.

Побудуйте графік функції **(1.36–1.37)**:

1.36. 1) $y = 2^x + 1$; 2) $y = 2^{x+1}$; 3) $y = -2^x$; 4) $y = 3 - 2^x$.

1.37. 1) $y = 3^x - 2$; 2) $y = 3^{x-2}$; 3) $y = -3^x$; 4) $y = 5 - 3^x$.

1.38. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 3^{|x|}$; 2) $y = 4^{-|x|}$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 4) $y = \left(\frac{7}{8}\right)^{-|x|}$.

1.39. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, якщо $x \in [-2; 3]$.

1.40. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$, якщо $x \in [-1; 4]$.

Знайдіть найменше і найбільше значення даної функції на заданому проміжку **(1.41–1.42)**:

1.41. 1) $y = 2^{x-1} + 7$; $x \in [-2; 3]$; 2) $y = 3^{-x+2} - 3$; $x \in [2; 3]$.

1.42. 1) $y = 3^{x-1} - 2$; $x \in [-1; 2]$; 2) $y = 2^{3-x} + 11$; $x \in [-1; 4]$.

На якому інтервалі **(1.43–1.44)**:

1.43. 1) Функція $y = 5^x$ набуває найменшого і найбільшого значень, що дорівнюють $\frac{1}{125}$ і 1 відповідно;

2) функція $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ набуває найменшого і найбільшого значень, що дорівнюють $\frac{1}{9}$ і 81 відповідно?

1.44. 1) Функція $y = 2^x$ набуває найменшого і найбільшого значень, що дорівнюють $\frac{1}{128}$ і 4 відповідно;

2) функція $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ набуває найменшого і найбільшого значень, що дорівнюють 1 і 64 відповідно?

Побудуйте графік функції та за графіком визначте множину її значень **(1.45–1.46)**:

1.45. 1) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{якщо } x < 0, \\ 2^x, & \text{якщо } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $q(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{x}, & \text{якщо } x < -1, \\ 5 - x^2, & \text{якщо } x \geqslant -1; \end{cases}$

3) $t(x) = \begin{cases} 3^x, & \text{якщо } x < 0, \\ \cos x, & \text{якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$

1.46. 1) $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x}, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ \sqrt{x} + 1, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ 2) $q(x) = \begin{cases} 5^x, & \text{якщо } x < 1, \\ 4 + x, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

Дослідіть функцію на парність **(1.47–1.48)**:

1.47. 1) $y = 5 \cdot 3^{2-|x|}$; 2) $y = 10^{2x} - 0,01^{x}$;
3) $y = 3^{|x+1|}$; 4) $y = 13 + 4^{x} + 0,25^{x}$.

1.48. 1) $y = 2^{x} - 0,5^{x}$; 2) $y = 6^{x} + (\sqrt{6})^{-2x}$.

4 Знайдіть найменше і найбільше значення функції на множині дійсних чисел **(1.49–1.50)**:

1.49. 1) $y = 5^{\sin x}$; 2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}$;
3) $y = 1 + 2^{|\sin x|}$; 4) $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{-|\cos x|}-1$.

1.50. 1) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 5^{|\cos x|}$.

Порівняйте числа **(1.51–1.52)**:

1.51. 1) $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}$ і $5^{2,5}$; 2) $(2-\sqrt{3})^{-3}$ і $(2+\sqrt{3})^{3,2}$.

1.52. 1) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ і $2^{1,48}$; 2) $(\sqrt{2}-1)^{4,2}$ і $(\sqrt{2}+1)^{-4,2}$.

Побудуйте схематично графік функції **(1.53–1.54)**:

1.53. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$. **1.54.** $y = 2^{2-x}$.

Розв'яжіть графічно рівняння **(1.55–1.56)**:

1.55. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = -\frac{2}{x}$; 2) $2^{-x} = x + 6$.

1.56. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 4 - x$; 2) $2^{x} = \frac{8}{x}$.

Знайдіть найменше і найбільше значення даної функції на даному проміжку **(1.57–1.58)**:

1.57. 1) $f(x) = 0,4^{1-|x-3|}$, $x \in [2;\ 5]$; 2) $f(x) = \left|2^{x-1} - 4\right|$, $x \in [1;\ 5]$.

1.58. 1) $f(x) = 0,2^{|x-2|-1}$, $x \in [1;\ 4]$; 2) $q(x) = \left|9 - 3^{x+1}\right|$, $x \in [0;\ 3]$.

Знайдіть множину значень функції **(1.59–1.60)**:

1.59. 1) $y = \dfrac{0,5^{x} - 4}{\sqrt{0,5^{x} - 2}}$; 2) $y = \dfrac{64^{x} + 125}{16^{x} - 5 \cdot 4^{x} + 25}$.

1.60. 1) $y = \dfrac{0,2^{2x} - 25}{5 - 0,2^{x}}$; 2) $y = \dfrac{216^{x} - 8}{36^{x} + 2 \cdot 6^{x} + 4}$.

Дослідіть на парність функцію (**1.61–1.62**):

1.61. 1) $f(x) = (\sqrt{2} - 1)^{x} + (\sqrt{2} + 1)^{x} + 3$;

2) $q(x) = (3 + 2\sqrt{2})^{x} - (3 - 2\sqrt{2})^{x} + \dfrac{1}{x}$.

1.62. 1) $f(x) = (2 + \sqrt{3})^{x} - (2 - \sqrt{3})^{x} + 4x$;

2) $q(x) = (\sqrt{5} - 2)^{x} + (\sqrt{5} + 2)^{x} + x^{2}$.

1.63. У середньому при пробігу 15 тис. км на рік кожен автомобіль спалює близько 4,5 т кисню, що в 50 разів перевищує річну потребу людини в кисні. При цьому автомобіль ще й викидає в атмосферу 700 кг чадного газу. Лікарка Олена Василівна, що має в середньому 300 робочих днів на рік і їздить на роботу власною автівкою, вирішила пересуватися на велосипеді. При швидкості велосипеда у 15 км/год шлях в один кінець у лікарки займатиме близько 20 хвилин. Припустіть, що лікарка втілила своє рішення в життя та з'ясуйте:

1) на скільки при цьому щорічно зменшаться викиди чадного газу в повітря;
2) на скільки при цьому збільшиться запас кисню в атмосфері та скільком людям вистачить цієї кількості на тиждень;
3) як вплине на екологію таке саме рішення ваших батьків або знайомих, якщо вони проживають недалеко від місця роботи, за один день; на один місяць; на один рік?

1.64. (*Київська математична олімпіада, 1991 р.*) Доведіть, що $\max f(x) \leqslant \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$, де $f(x) = \sin x \cdot \sin 2x$, $x \in [-\pi; \pi]$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

Розв'яжіть рівняння (**1.65–1.66**):

1.65. 1) $-2x = 6$; 2) $4x = -3$;
3) $(x - 2)(x + 3) = 0$; 4) $x^{2} - 3x - 4 = 0$;
5) $9x^{2} - 6x + 1 = 0$; 6) $x^{2} + x + 7 = 0$.

1.66. 1) $(x + 2)^{2} = 2x + 3$; 2) $3(x + 1)^{2} = 2x + 2$;
3) $\dfrac{x - 2}{x} = \dfrac{3}{x + 2}$; 4) $\dfrac{20}{x} - \dfrac{20}{x + 1} = 1$.

1.67. Подайте числа 8; $\dfrac{1}{16}$; 64; $\dfrac{1}{128}$; 2; 128; 1 у вигляді степеня з основою 2.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 1

1. Скільки чотирицифрових чисел, що діляться на 5, можна утворити із цифр 1; 3; 5; 7, якщо цифри в кожному числі не повторюватимуться?

А	Б	В	Г	Д
6	12	18	20	24

2. У зв'язку з тим, що родина більшу частину липня провела у відпустці, то холодної води в цей місяць нею було спожито на 80 % менше, ніж у червні. У скільки разів менше спожила родина холодної води в липні, ніж у червні?

А	Б	В	Г	Д
у 2 рази	у 4 рази	у 5 разів	у 8 разів	неможливо визначити

3. Дано десять чисел. Серед них числа 5 і 6 трапляються по 3 рази, а число 7 – 4 рази. Знайдіть середнє арифметичне цих десяти чисел.

А	Б	В	Г	Д
5,9	6	6,1	6,2	6,3

4. Укажіть кількість цілих розв'язків нерівності $0,5x^2 + 0,5x - 3 < 0$.

А	Б	В	Г	Д
безліч	шість	п'ять	чотири	три

5. Знайдіть похідну функції $y = x^5 - 2\cos x$.

А	Б	В
$y' = 5x^4 - 2\sin x$	$y' = 5x^4 + \sin x$	$y' = x^4 + 2\sin x$
Г	**Д**	
$y' = 5x^4 - 2\cos x$	$y' = 5x^4 + 2\sin x$	

6. Скоротіть дріб $\dfrac{\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$	$-\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$	$\dfrac{1}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$	$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha - \sin 2\alpha$

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та його коренем (А–Д).

Рівняння		*Корінь рівняння*	
1	$\sqrt{x-1}=3$	А	6
2	$\sqrt[3]{x}=2$	Б	7
3	$\sqrt[4]{x+7}=2$	В	8
4	$\sqrt[5]{x-8}=-1$	Г	9
		Д	10

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Відомо, що $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}2$. Чому дорівнює $\sin 2\alpha$?

9. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} x+ay=1-a, \\ ax+4y=-6 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

§ 2. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Рівняння називають *показниковим*, якщо воно містить змінні лише в показниках степенів. Наприклад, показниковими є рівняння: $2^x = 8$; $3^x + 9^x = 2$; $\frac{1}{2^x+1}+\frac{1}{2^x}=3$ тощо.

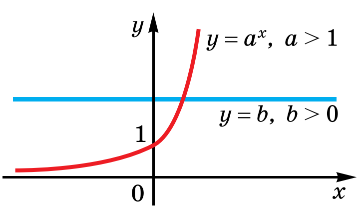
Розглянемо деякі види показникових рівнянь та методи їх розв'язування.

1. Найпростіші показникові рівняння

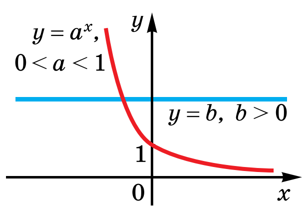
Рівняння вигляду $a^x = b$ вважають найпростішим.

Оскільки $a^x > 0$ для $x \in R$, то коли $b \leqslant 0$, рівняння коренів не має.

Якщо $b > 0$, визначимо кількість коренів рівняння $a^x = b$ графічно. У випадку $a > 1$ функція $y = a^x$ монотонно зростає на R, а у випадку $0 < a < 1$ – монотонно спадає на R (мал. 2.1 і 2.2).



Мал. 2.1



Мал. 2.2

В обох випадках функція $y = a^x$ кожного свого додатного значення набуває тільки один раз. Тому графіки функцій $y = a^x$ та $y = b$, де $b > 0$, перетинаються лише в одній точці. Це означає, що рівняння $a^x = b$ при $b > 0$ має лише один корінь.

Для того щоб знайти цей корінь, треба число b записати у вигляді степеня числа a, тобто $b = a^c$. Матимемо рівняння $a^x = a^c$, звідки отримаємо, що $x = c$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

1) $2^x = 32$; 2) $3^{x-1} = \sqrt[5]{9}$; 3) $4^{x^2-2x} = 1$.

Розв'язання.

1) $2^x = 32$;
$2^x = 2^5$;
$x = 5$.

Відповідь. 5.

2) $3^{x-1} = \sqrt[5]{9}$;
$3^{x-1} = (3^2)^{\frac{1}{5}}$;
$3^{x-1} = 3^{0,4}$;
$x - 1 = 0,4$;
$x = 1,4$.

Відповідь. 1,4.

3) $4^{x^2-2x} = 1$;
$4^{x^2-2x} = 4^0$;
$x^2 - 2x = 0$;
$x(x - 2) = 0$;
$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Відповідь. 0; 2.

Як розв'язати найпростіше рівняння $a^x = b$ у випадку, коли число b не є степенем числа a, наприклад $3^x = 7$, розглянемо в одному з наступних параграфів.

Метод розв'язування рівняння вигляду $a^x = a^c$ можна поширити і на рівняння вигляду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

1) $4^x = 8^{x-1}$; 2) $2^x \cdot 3^x = \left(\frac{1}{6}\right)^{5-2x}$.

Розв'язання. 1) Зведемо обидві частини рівняння до степеня з однією і тією самою основою. Цією основою буде число 2. Маємо: $(2^2)^x = (2^3)^{x-1}$; тобто $2^{2x} = 2^{3x-3}$. Звідси $2x = 3x - 3$, отже, $x = 3$.

2) Оскільки $2^x \cdot 3^x = 6^x$, а $\left(\frac{1}{6}\right)^{5-2x} = (6^{-1})^{5-2x} = 6^{2x-5}$, то початкове рівняння рівносильне рівнянню $6^x = 6^{2x-5}$, яке, у свою чергу, рівносильне рівнянню $x = 2x - 5$, звідки $x = 5$.

Відповідь. 1) 3; 2) 5.

Далі розглянемо рівняння, загальний вигляд яких різниться від найпростішого, та способи їх розв'язування.

2. Зведення показникового рівняння до найпростішого винесенням спільного множника за дужки

Цей спосіб використовують у випадку, коли рівняння містить кілька степенів вигляду $a^{f(x)+m}$, де m – різні числа. Тоді за властивістю множення степенів з однаковими основами можна записати, що $a^{f(x)+m} = a^{f(x)} \cdot a^m$, та винести за дужки спільний множник. Після спрощень отримаємо рівняння вигляду $a^{f(x)} = b$, тобто найпростіше.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $12 \cdot 5^{x-1} + 3 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 10$.

Р о з в ' я з а н н я. $12 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^x - 5^x \cdot 5^1 = 10$;

$$5^x\left(12 \cdot \frac{1}{5} + 3 - 5\right) = 10;$$

$$5^x \cdot 0{,}4 = 10;$$

$$5^x = 25;$$

$$5^x = 5^2;$$

$$x = 2.$$

В і д п о в і д ь. 2.

3. Рівняння вигляду $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$

Поділимо ліву і праву частини рівняння $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ на $b^{f(x)} \neq 0$, отримаємо: $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1$, тобто $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \left(\frac{a}{b}\right)^0$, а отже, $f(x) = 0$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $2^{x-1} = 5^{x-1}$.

Р о з в ' я з а н н я. Поділимо обидві частини рівняння на $5^{x-1} \neq 0$: $\frac{2^{x-1}}{5^{x-1}} = 1$, тобто $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^0$, звідки $x - 1 = 0$, отже, $x = 1$.

В і д п о в і д ь. 1.

4. Уведення нової змінної у показникових рівняннях

Досить часто показникове рівняння можна звести до алгебраїчного за допомогою заміни змінної: $t = a^{f(x)}$. Зрозуміло, що $t > 0$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $3 \cdot 25^x - 2 \cdot 5^x = 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $5^x = t > 0$, тоді $25^x = 5^{2x} = (5^x)^2 = t^2$. Маємо рівняння: $3t^2 - 2t - 1 = 0$, корені якого $t_1 = 1$; $t_2 = -\frac{1}{3}$. Оскільки $t_2 < 0$, то повертаємося до заміни лише для $t_1 = 1$. Маємо: $5^x = 1$. Тоді $5^x = 5^0$, звідки $x = 0$.

В і д п о в і д ь. 0.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{5}{2^{\sqrt{x}}+1} + 2 = \frac{6}{2^{\sqrt{x}}-2}$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $2^{\sqrt{x}} = t$, $t > 0$. Маємо рівняння: $\frac{5}{t+1} - \frac{6}{t-2} + 2 = 0$, розв'язавши яке, отримаємо корені $t_1 = 4$ і $t_2 = -2{,}5$. Оскільки $-2{,}5 < 0$, до заміни повертаємося лише для $t_1 = 4$. Маємо рівняння: $2^{\sqrt{x}} = 4$. Тоді $2^{\sqrt{x}} = 2^2$, тобто $\sqrt{x} = 2$, отже, $x = 4$.

В і д п о в і д ь. 4.

5. Однорідні показникові рівняння

Рівняння вигляду

$$Aa^{2f(x)} + Ba^{f(x)}b^{f(x)} + Cb^{2f(x)} = 0$$

називають *однорідним показниковим рівнянням другого степеня.*

Щоб розв'язати це рівняння, треба його ліву і праву частини поділити на $b^{2f(x)} \neq 0$ (або на $a^{2f(x)} \neq 0$). Тоді отримаємо рівняння вигляду: $A\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + B\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + C = 0$, а далі введемо нову змінну $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$, $t > 0$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $2^{2x} + 6^x - 2 \cdot 9^x = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $6^x = 2^x \cdot 3^x$, а $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$, то рівняння зводиться до однорідного:

$$2^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Поділимо ліву і праву його частини на $3^{2x} \neq 0$, матимемо:

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} - 2 \cdot \frac{3^{2x}}{3^{2x}} = 0, \text{ тобто } \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, $t > 0$, тоді $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 = t^2$.

Маємо рівняння: $t^2 + t - 2 = 0$, звідки $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.
Оскільки $t_1 = 1 > 0$, повертаємося до заміни лише для $t_1 = 1$.

Тоді $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, тобто $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, отже, $x = 0$.

В і д п о в і д ь. 0.

6. Розв'язування рівнянь за допомогою властивостей показникової функції

Використаємо монотонність показникової функції.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $3^x + 4^x = 5^x$.

Р о з в ' я з а н н я. Очевидно, що число 2 є коренем рівняння (справді, $3^2 + 4^2 = 5^2$). Залишилося з'ясувати, чи має рівняння ще й інші корені.

Оскільки $5^x > 0$, поділимо обидві частини рівняння на 5^x. Отримаємо: $\frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = 1$, тобто маємо рівняння: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$.

Функція $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ є спадною на множині дійсних чисел, як сума двох спадних функцій $y_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ і $y_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^x$, а тому кожного свого значення набуває лише один раз.

Тому рівняння $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ має не більше ніж один корінь, а отже, й початкове рівняння, має не більше ніж один корінь. Оскільки один корінь, число 2, ми вже знайшли, то він і є єдиним коренем рівняння.

В і д п о в і д ь. 2.

● Яке рівняння називають показниковим? ● Як розв'язати рівняння $a^x = b$? ● Як можна зводити показникові рівняння до найпростіших винесенням спільного множника за дужки? ● Як розв'язати рівняння вигляду $a^{f(x)} = b^{f(x)}$? ● Яку заміну змінних використовують у показникових рівняннях? ● Що таке однорідне показникове рівняння і як його розв'язати? ● На прикладі 8 поясніть, як можна використовувати властивості показникової функції для розв'язування рівнянь.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть рівняння **(2.1–2.14)**:

2.1. 1) $3^x = 9$; 2) $4^x = 1$; 3) $2^x = 32$; 4) $7^x = -7$.

2.2. 1) $5^x = 5$; 2) $7^x = 49$; 3) $9^x = -9$; 4) $4^x = 64$.

2.3. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{27}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 0$; 3) $2^{x+1} = 16$; 4) $6^{x-1} = 6$.

2.4. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$; 2) $3^{x-1} = 27$; 3) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 0$; 4) $12^{x+1} = 12$.

2.5. 1) $4^{x+1} = 4^{2x}$; 2) $5^{2x-3} = 5^x$.

2.6. 1) $7^{x+3} = 7^{2x}$; 2) $8^x = 8^{2x-5}$.

2.7. 1) $3^x = \frac{1}{9}$; 2) $5^x = \sqrt{5}$; 3) $7^x = \sqrt[3]{49}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1{,}5$.

2.8. 1) $2^x = \frac{1}{16}$; 2) $7^x = \sqrt{7}$; 3) $3^x = \sqrt[5]{9}$; 4) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 2,5$.

2 **2.9.** 1) $2^x = 5^x$; 2) $3^{x-1} = 7^{x-1}$.

2.10. 1) $3^x = 8^x$; 2) $2^{x+1} = 5^{x+1}$.

2.11. 1) $4^{x^2+2x-3} = 1$; 2) $3^{x^2-x} = 9$;

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4-x}$; 4) $7^{x^2} = 49$.

2.12. 1) $7^{x^2-x-2} = 1$; 2) $4^{x^2+2x} = 64$;

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-2x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2-3x}$; 4) $2^{x^2} = 8$.

2.13. 1) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 27$;

3) $\left(\frac{2}{9}\right)^{x-3} = 4,5^{x+2}$; 4) $\left(\sqrt{5}\right)^{x+2} = 25^x$.

2.14. 1) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{64}{27}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2+x} = 32$;

3) $3,5^{x-2} = \left(\frac{2}{7}\right)^{x+1}$; 4) $\left(\sqrt{3}\right)^{x-3} = 9^x$.

Знайдіть точку перетину графіків функцій (**2.15–2.16**):

2.15. $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ і $y = 7$. **2.16.** $y = 3^x$ і $y = \frac{1}{3}$.

Розв'яжіть рівняння (**2.17–2.28**):

2.17. 1) $16^{-x} = 32$; 2) $(5^{x-2})^{x-5} = 1$;

3) $(4^{x-4})^{x-2} = \frac{1}{4}$; 4) $\left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{6}{5}$;

5) $2^{x+2} \cdot 3^{x+2} = 2^{3x} \cdot 3^{3x}$; 6) $\frac{3^x}{5^x} = \frac{3^{2x+1}}{5^{2x+1}}$.

2.18. 1) $9^{-x} = 81$; 2) $(4^{x+3})^{x-2} = 1$;

3) $(2^{x-6})^{x-3} = \frac{1}{4}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{9}{4}$;

5) $7^{x-1} \cdot 2^{x-1} = 2^{5x} \cdot 7^{5x}$; 6) $\frac{6^{x-1}}{2^{x-1}} = \frac{6^{2-x}}{2^{2-x}}$.

2.19. 1) $3^{x-1}+3^x=12$; 2) $4^{x-1}+4^{x+1}=17$.

2.20. 1) $2^{x+2}+2^x=10$; 2) $5^{x-1}+5^{x+1}=130$.

2.21. 1) $2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0$; 2) $9^x+2\cdot 3^x-99=0$.

2.22. 1) $3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0$; 2) $4^x-5\cdot 2^x-24=0$.

2.23. 1) $3^x\cdot 2^{x+3}=288$; 2) $5^{x-1}\cdot 2^{x+2}=800$.

2.24. 1) $5^x\cdot 2^{x+2}=400$; 2) $3^{x+1}\cdot 4^{x-2}=324$.

2.25. 1) $4^{x^2+2x}=5^{x^2+2x}$; 2) $7^{2-x}=4^{x-2}$.

2.26. 1) $2^{x^2-3x}=5^{x^2-3x}$; 2) $5^{x-1}=12^{1-x}$.

2.27. 1) $\sqrt{3^{2x}}\sqrt{2^{2x}}=216$; 2) $\sqrt{3^x}=27^{-\frac{2}{3}}$;

3) $\dfrac{1}{27}\sqrt{3^{x-1}}=9^{-1,25}$; 4) $\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2x-2}=\dfrac{3}{4}$.

2.28. 1) $\sqrt{5^{2x}}\sqrt{2^{2x}}=10$; 2) $\sqrt{2^x}=4^{-\frac{3}{2}}$;

3) $\dfrac{1}{27}\sqrt{9^{x-1}}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^{2x-1}=\sqrt{8}$.

3 Розв’яжіть рівняння (**2.29–2.38**):

2.29. 1) $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)^{3x^2-3}=0,81^{-2x}$; 2) $\sqrt[3]{0,3}\cdot\sqrt{0,3^{2x-\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{0,09^{6-3x}}$;

3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{4-x^2}{2}}=8^x$; 4) $5^{\sqrt{13-x^2}}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5^5}$.

2.30. 1) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}\right)^{x^2+4}=20,25^{x+1}$; 2) $2\sqrt{2^{14x-9}}=\sqrt[6]{8\cdot 2^{6x-12}}$;

3) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{4x^2}{3}}=81^x\cdot 3^{-8}$; 4) $(0,2^{\sqrt{x+1}})^{\sqrt{x+6}}=\dfrac{1}{56}$.

2.31. 1) $5^{|6-4x|}=25^{3x-4}$; 2) $9^{|3x-1|}=3^{8x-2}$;

3) $7^{|x+1|}=(\sqrt{7})^{3-2x}$; 4) $8^{\sqrt{x-1}}=\sqrt{4^{x+1}}$.

2.32. 1) $2^{|3x-4|}=4^{2x-2}$; 2) $36^{|1-2x|}=64^{4-6x}$;

3) $5^{|x-1|}=(\sqrt{5})^{2x+3}$; 4) $2^x\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{x+1}}=32$.

2.33. 1) $(2^{2x}-1)(4^{2x}+2^{2x}+1)=7$;

2) $((\sqrt[3]{11})^x+2)((\sqrt[3]{121})^x-2(\sqrt[3]{11})^x+4)=129$.

2.34. 1) $(3^{2x}+1)(9^{2x}-3^{2x}+1)=28$;

2) $((\sqrt{7})^x-3)(7^x+3(\sqrt{7})^x+9=22$.

2.35. 1) $2\cdot 3^{2x}-5\cdot 3^{2x-3}+4\cdot 3^{2x-4}=151$;

2) $0{,}2^{3-2x}+5\cdot 0{,}04^{1-x}=130$.

2.36. 1) $5\cdot 2^{3x}-3\cdot 2^{3x-2}+4\cdot 2^{3x-4}=36$;

2) $0{,}5^{5-2x}+4\cdot 0{,}25^{1-x}=66$.

2.37. 1) $2^x-6\cdot 2^{-x}=-1$; 2) $2^{2x-2}+5\cdot 2^{x-1}+4=0$;

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x+5^{x+2}=10$; 4) $2+\frac{1}{4^x-3}=\frac{4}{4^x+2}$.

2.38. 1) $3^x-6\cdot 3^{-x}=1$; 2) $3^{2x+2}-4\cdot 3^{x+1}+3=0$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x+2^{x+3}=6$; 4) $\frac{5}{9^x-2}-3=\frac{4}{9^x-1}$.

Розв'яжіть однорідне рівняння **(2.39–2.40)**:

2.39. $2\cdot 5^{2x}-7\cdot 5^x\cdot 2^x+5\cdot 2^{2x}=0$.

2.40. $2\cdot 3^{2x}-5\cdot 3^x\cdot 2^x+3\cdot 2^{2x}=0$.

Розв'яжіть рівняння **(2.41–2.62)**:

2.41. 1) $8^{1+x^2}-8^{1-x^2}=63$; 2) $5^{5-2x}-20\cdot 0{,}2^{3-2x}-5=0$;

3) $(\sqrt{6})^{2x+2}-37\cdot(\sqrt{6})^x+6=0$; 4) $3^{2x^2+x}=26+3^{3-x-2x^2}$.

2.42. 1) $3^{2+x^2}-8^{2-x^2}=24$; 2) $4^{1-x}-0{,}5^{1-2x}=1$;

3) $(\sqrt{7})^{2x+2}-50\cdot(\sqrt{7})^x+7=0$; 4) $2^{x^2+2x-6}=2^{7-2x-x^2}+3{,}5$.

2.43. 1) $(\sqrt{3})^{\operatorname{tg}2x}-\frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg}2x}}=0$; 2) $2^{\sin 2x}-\frac{1}{2\cdot 2^{\sin 2x}}=0$;

3) $4^{2-\cos x}-5\cdot 2^{1-\cos x}+1=0$; 4) $9^{\sin x}+3\cdot 9^{2-\sin x}=84$.

2.44. 1) $2^{\cos 2x}-\frac{1}{2\cdot 2^{\cos 2x}}=0$; 2) $2^{\operatorname{tg}2x}-\frac{4}{2^{\operatorname{tg}2x}}=0$;

3) $4^{\sin x}+2^{5-2\sin x}=18$; 4) $9^{\cos x-1}+3^{2-\cos x}=4$.

4

2.45. 1) $2^{x-1}+2^x+2^{x+1}=6^{x-1}+6^x$;

2) $9^{x+0{,}5}-2^{x+1}=2^{x+4}-3^{2x}$.

2.46. 1) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=12^x+12^{x+1}$;

2) $4^{x+0{,}5}-3^{x+1}=3^{x+2}-7\cdot 2^{2x}$.

2.47. 1) $9^x+2\cdot 4^x+6^x=0$; 2) $5\cdot 25^{\frac{1}{x}}+3\cdot 10^{\frac{1}{x}}=2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

2.48. 1) $25^x+3\cdot 10^x-4\cdot 4^x=0$; 2) $9\cdot 4^{\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{\frac{1}{x}}=4\cdot 9^{\frac{1}{2}}$.

2.49. 1) $25^x\cdot 125^{\sqrt{x+0{,}5}}=5$; 2) $32^{3(x^3-8)}=8^{19(2x-x^2)}$.

2.50. 1) $64^{1-\frac{x}{3}}\cdot 4^{\sqrt{2x+2}}=1$; 2) $8^{4(x^3+8)}=16^{7(x^2+2x)}$.

2.51. 1) $\sqrt{4^2+2^x-11}=\sqrt{2^x+5}$;

2) $0{,}16^{x-\sqrt{3x-2}-1}-3{,}75\cdot 0{,}4^{x-\sqrt{3x-2}}=2{,}5$.

2.52. 1) $\sqrt{9^x - 3^x - 5} = \sqrt{3^x - 2}$; 2) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6$.

2.53. 1) $3^x + 2^x = 13$; 2) $4^x + 7^x = 11^x$.

2.54. 1) $4^x + 5^x = 9$; 2) $6^x + 8^x = 10^x$.

2.55. 1) $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$; 2) $4(\sqrt{5}-2)^{x-10} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}+2}\right)^{x-10}$;

3) $(2\sqrt{2}+3)^x + (2\sqrt{2}-3)^x = 34$.

2.56. 1) $(5+2\sqrt{6})^x + (5-2\sqrt{6})^x = 10$;

2) $9(3-\sqrt{8})^{4x+1} = \left(\dfrac{3}{3+\sqrt{8}}\right)^{4x+1}$; 3) $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x = 6$.

2.57. 1) $\sqrt{4^x - 3 \cdot 2^x + 2} = 2 - 2^x$;

2) $\sqrt{9^x - 3^{x+1} + 16} = 4 - 3^x + 3^{2x-1}$.

2.58. 1) $\sqrt{0,25^x - 3 \cdot 0,5 - 4} = 4 - 0,5^x$;

2) $3\sqrt{9^{-x} + 3^{-x} - 1} = 5 - (3^{-3} + 3^{-2x})$.

2.59. 1) $(19-6\sqrt{10})^x + 6(\sqrt{10}-3)^x - 1 = 0$;

2) $17 \cdot 3^x - 6 = 3^{3x+1} - 4 \cdot 9^x$.

2.60. 1) $(27-10\sqrt{2})^x + 10(\sqrt{2}-5)^x + 23 = 0$;

2) $3(4^x + 2^x) = 1 - 32 \cdot 8^{x-1}$.

2.61. $|3-x|^{3x^2-10x+3} = 1$. **2.62.** $|x-2|^{2x^2-5x+2} = 1$.

2.63. Автівка інтернет-магазину, що здійснює адресну доставку товару, споживає 8,8 л бензину на 100 км. З метою зменшення витрат на доставку товару власники магазину вирішили замінити двигун автівки на такий, що споживатиме всього 3,8 л бензину на 100 км. З'ясуйте, через який найменший час витрати на заміну двигуна повністю окупляться, якщо вартість заміни двигуна складає 12 000 грн, ціна бензину – 30 грн/л, а пробіг автівки щоденно складає 60 км.

2.64. (*Міжнародна математична олімпіада, 1965 р.*) Знайдіть чотири дійсних числа x_1, x_2, x_3, x_4 таких, що кожне з них у сумі з добутком трьох інших чисел дорівнюватиме 2.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

Розв'яжіть нерівність **(2.65–2.66)**:

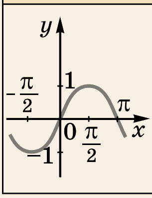
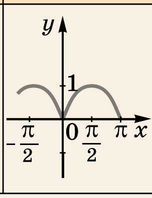
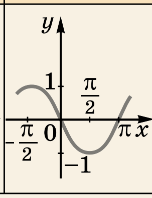
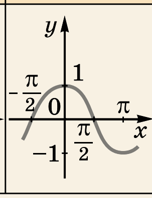
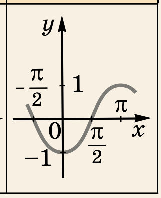
2.65. 1) $3x \geqslant 9$; 2) $-2x < 8$; 3) $4x > 0$;
4) $-5x \leqslant 0$; 5) $x^2 - 2x > 0$; 6) $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$.

2.66. 1) $1 + 2x > 9$; 2) $6 - 2x \leqslant 5$;
3) $2(3 + x) + (4 - x) \leqslant 0$; 4) $5(x + 8) + 4(1 - x) > 0$;
5) $2x^2 - 3x \geqslant 2(x - 1)$; 6) $4x(x + 2) < 5$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 2

1. Укажіть, який з наведених графіків є частиною графіка функції $y = \cos(x - 2\pi)$.

А	Б	В	Г	Д
				

2. Укажіть функцію, що спадає на R.

А	Б	В	Г	Д
$y = 2x - 7$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y = \sin x$	$y = 7x$	$y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$

3. Знайдіть $f'(1)$, якщо $f(x) = \frac{6}{x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
6	–6	12	–12	інша відповідь

4. Робітник отримав аванс у розмірі 2880 грн, що становить 40 % від його заробітної плати. Який розмір заробітної плати в робітника?

А	Б	В	Г	Д
6400 грн	6800 грн	7200 грн	7600 грн	8400 грн

5. Укажіть рівняння, що має безліч коренів.

А	Б	В	Г	Д
$2x - 7 = 9$	$\cos x = \sqrt{2}$	$\sin x = 1$	$x^2 - 7 = 0$	$2x - 1 = 2x$

6. Укажіть функцію, що є парною.

А	Б	В	Г	Д
$y = x\sin x$	$y = x + \sin x$	$y = x - \sin x$	$y = \sqrt{\sin x}$	$y = \frac{1}{\sin x}$

7. Установіть відповідність між формулами зведення (1–4) і виразами, що їм тотожно рівні (А–Д).

Формула зведення	*Тотожно рівний їй вираз*
1 $\cos(\pi + \alpha)$	**А** $-\sin\alpha$
2 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$	**Б** $\sin\alpha$
3 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$	**В** 1
4 $\sin(\pi + \alpha)$	**Г** $\cos\alpha$
	Д $-\cos\alpha$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Дохід деякого підприємства прямо пропорційний кількості виробленої продукції. Робочий день на підприємстві зменшився з 8 год до 7 год. На скільки відсотків треба підвищити продуктивність праці, щоб дохід підприємства зріс на 5 %?

9. Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ на проміжку $[-1; 1]$?

§ 3. ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ

Як і рівняння, *нерівність* називають *показниковою*, якщо вона містить змінну лише в показнику степеня. Наприклад, показниковими є нерівності: $3^x \geqslant 9$; $2^x + 2^{x-1} < 6$ тощо.

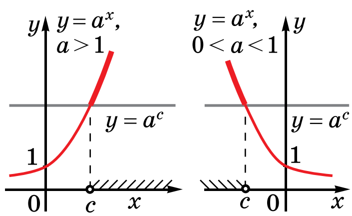
1. Найпростіші показникові нерівності

Найпростішими показниковими нерівностями називають нерівності вигляду: $a^{f(x)} > b$; $a^{f(x)} < b$; $a^{f(x)} \geqslant b$; $a^{f(x)} \leqslant b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in R$.

Розглянемо, наприклад, нерівність $a^x > b$, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$. Нехай $b = a^c$, тоді нерівність набуває вигляду $a^x > a^c$.

Якщо $a > 1$, то функція $y = a^x$ зростає (мал. 3.1) і більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Отже, з нерівності $a^x > a^c$ випливає, що $x > c$.

Якщо $0 < a < 1$, то функція $y = a^x$ – спадає (мал. 3.2) і більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Отже, з нерівності $a^x > a^c$ випливає, що $x < c$.



Мал. 3.1 Мал. 3.2

Аналогічно розв’язують і нерівності вигляду $a^x < b$; $a^x \geqslant b$; $a^x \leqslant b$, де $b > 0$. Якщо $b \leqslant 0$, то деякі з них не будуть мати розв’язків, а розв’язками деяких буде будь-яке число.

Приклад 1. Розв'язати нерівність:

1) $2^x \geqslant 4$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 27$; 3) $3^x > -9$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leqslant -5$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Маємо: $2^x \geqslant 2^2$. Оскільки $y = 2^x$ – функція зростаюча, то $x \geqslant 2$.

2) Маємо: $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$. Оскільки $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ – функція спадна, то $x > -3$.

3) Оскільки $3^x > 0$ для будь-якого x, то розв'язком нерівності $3^x > -9$ є будь-яке число.

4) Оскільки $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 0$ для будь-якого x, то нерівність не має розв'язків.

В і д п о в і д ь. 1) $x \geqslant 2$; 2) $x > 3$; 3) R; 4) $\varnothing$.

Метод розв'язування нерівності $a^x > b$, де $b = a^c$, можна узагальнити для нерівності вигляду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$. Подамо метод розв'язування такої нерівності в таблиці.

Нерівність вигляду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$	
$0 < a < 1$	$a > 1$
Рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$ (знак нерівності змінюється на протилежний)	Рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$ (знак нерівності не змінюється)

Так само розв'язують нерівності вигляду $a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

1) $2^{2x-3} > 4^{5-x}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}$.

Р о з в ' я з а н н я.

1) $2^{2x-3} > 4^{5-x}$;

$2^{2x-3} > (2^2)^{5-x}$;

$2^{2x-3} > 2^{10-2x}$.

Оскільки $2 > 1$, то

$2x - 3 > 10 - 2x$;

$4x > 13$;

$x > 3\frac{1}{4}$.

В і д п о в і д ь. $(3{,}25; +\infty)$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}$.

Оскільки $0 < \frac{1}{3} < 1$, то

$x^2 - 2x \geqslant x + 4$;

$x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$;

$\left[\begin{array}{l} x \leqslant -1, \\ x \geqslant 4. \end{array}\right.$

В і д п о в і д ь. $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

2. *Розв'язування інших видів показникових нерівностей*

Під час розв'язування більш складних показникових нерівностей використовують ті самі прийоми, що й для розв'язування рівнянь: спосіб винесення спільного множника за дужки, заміну змінної тощо, а це дає змогу зводити нерівність до найпростішої.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $3^{x+2} - 3^x > 24$.

Розв'язання. Маємо: $3^x \cdot 3^2 - 3^x > 24$. Винесемо в лівій частині спільний множник 3^x за дужки: $3^x(9-1) > 24$, тоді $3^x \cdot 8 > 24$, тобто $3^x > 3^1$, отже, $x > 1$.

Відповідь. $x > 1$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 3 > 0$.

Розв'язання. Нехай $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = t$, тоді $t > 0$. Маємо нерівність: $t^2 + 2t - 3 > 0$. Розв'язавши її, отримаємо, що $t < -3$ або $t > 1$. Оскільки $t > 0$, то повертаємося до заміни тільки для $t > 1$. Отримаємо:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 1;$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{0};$

$x < 0$.

Відповідь. $x < 0$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $2\cdot 9^x - 6^x - 3\cdot 4^x \leqslant 0$.

Розв'язання. Оскільки $6^x = 2^x\cdot 3^x$, перепишемо нерівність у вигляді: $2\cdot 3^{2x} - 3^x\cdot 2^x - 3\cdot 2^{2x} \leqslant 0$.

Оскільки $2^{2x} > 0$, поділимо обидві частини нерівності на 2^{2x}:

$\frac{2\cdot 3^{2x}}{2^{2x}} - \frac{3^x\cdot 2^x}{2^{2x}} - \frac{3\cdot 2^{2x}}{2^{2x}} \leqslant 0$.

Після спрощення маємо: $2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 3 \leqslant 0$.

Нехай $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = t$, $t > 0$. Маємо: $2t^2 - t - 3 \leqslant 0$, тоді $-1 \leqslant t \leqslant 1{,}5$.

Повертаючись до заміни, отримаємо, що $-1 \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{x} \leqslant \frac{3}{2}$.

Оскільки $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} > 0$ для $x \in R$, то відповідно для $x \in R$ справджується нерівність $\left(\frac{3}{2}\right)^x \geqslant -1.$

Отже, $\left(\frac{3}{2}\right)^x \leqslant \frac{3}{2}$, тобто $x \leqslant 1.$

В і д п о в і д ь. $x \leqslant 1.$

3. Застосування методу інтервалів

Оскільки метод інтервалів є універсальним методом для розв'язування нерівностей, застосуємо його до показникових нерівностей.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $(4^x - 16)(x^2 + 2x - 3) \leqslant 0.$

Р о з в ' я з а н н я. Областю допустимих значень змінної в нерівності є множина всіх дійсних чисел.

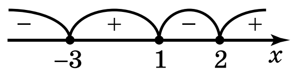
Знайдемо нулі функції $f(x) = (4^x - 16)(x^2 + 2x - 3).$

Для цього розв'яжемо сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l} 4^x - 16 = 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0, \end{array}\right.$

з якої отримаємо нулі функції:

$x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = -3.$

Позначимо їх на числовій осі (мал. 3.3) та знайдемо знак функції $f(x) = (4^x - 16)(x^2 + 2x - 3)$ на кожному з отриманих інтервалів.



Мал. 3.3

Отже, $x \in (-\infty; -3] \cup [1; 2].$

В і д п о в і д ь. $(-\infty; -3] \cup [1; 2].$

- Яку нерівність називають показниковою? • Як розв'язати нерівність $a^x > b$, де $b = a^c$, якщо $a > 1$, і як, якщо $0 < a < 1$? • До якої нерівності зводять нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $a > 1$, і до якої, якщо $0 < a < 1$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть нерівність (3.1–3.8):

3.1. 1) $2^x > 2^5$; 2) $3^x \leqslant 3^{-7}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^5$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^x < \left(\frac{4}{7}\right)^2$.

3.2. 1) $3^x < 3^8$; 2) $5^x \geqslant 5^{-3}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^2$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

3.3. 1) $3^x \geqslant 27$; 2) $(1{,}2)^x < 1{,}44$; 3) $\left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{64}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x \leqslant 1$.

3.4. 1) $2^x \leqslant 32$; 2) $1{,}3^x > 1{,}69$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{27}$; 4) $\left(\frac{1}{8}\right)^x \geqslant 1$.

2

3.5. 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant 16$; 2) $(\sqrt{3})^x < \frac{1}{3}$; 3) $0{,}2^x \leqslant 25$; 4) $0{,}7^x > 1\frac{3}{7}$.

3.6. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{27}$; 2) $(\sqrt{5})^x \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $0{,}5^x > 4$; 4) $0{,}6^x \leqslant 1\frac{2}{3}$.

3.7. 1) $4^{2x-7} > 1$; 2) $5^{3x+1} \geqslant 25$; 3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2x} < 4$; 4) $2^{x^2+1} \leqslant 32$.

3.8. 1) $5^{3x-4} < 1$; 2) $4^{2x+1} \leqslant 64$; 3) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-3x} > 9$; 4) $5^{x^2-1} \geqslant 125$.

Знайдіть область визначення функції **(3.9–3.10)**:

3.9. 1) $y = \sqrt{16 - 2^x}$; 2) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1}$.

3.10. 1) $y = \sqrt{3^x - 9}$; 2) $y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^x}$.

Розв'яжіть нерівність **(3.11–3.12)**:

3.11. 1) $14^{\frac{2x-4}{x+3}} \geqslant 1$; 2) $0{,}8^{\frac{3-x}{x+2}} < 1$.

3.12. 1) $12^{\frac{x+2}{4x-8}} \leqslant 1$; 2) $0{,}7^{\frac{x+4}{1-x}} > 1$.

Скільки натуральних чисел є розв'язками нерівності **(3.13–3.14)**:

3.13. 1) $8^{-3x+17} \geqslant 64$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} < \frac{1}{81}$?

3.14. 1) $3^{5x-7} < 81$; 2) $0{,}1^{15-3x} \geqslant 0{,}01$?

Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності **(3.15–3.16)**:

3.15. 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{4x-3} > \frac{1}{7}$; 2) $2{,}5^{3x+13} \leqslant 6{,}25$.

3.16. 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x-5} \geqslant \frac{1}{64}$; 2) $2{,}4^{4x-5} < 2{,}4$.

3 Розв'яжіть нерівність **(3.17–3.18)**:

3.17. 1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{x-3{,}5} > \sqrt{8}$; 2) $9^{0{,}5x^2-3} \geqslant 27$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \frac{1}{8}$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x|-2} \geqslant 5$.

3.18. 1) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2,5-x} \geqslant \sqrt{2}$; 2) $4^{0,5x^2-3} < 8$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} > \frac{1}{9}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{|x|-3} \leqslant 7$.

Знайдіть область визначення функції **(3.19–3.20)**:

3.19. 1) $y = \sqrt{4^x - 2^{x+5}}$; 2) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} - \left(\frac{1}{8}\right)^x}$.

3.20. 1) $y = \sqrt{3^{x+7} - 9^x}$; 2) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{125}\right)^x - \left(\frac{1}{25}\right)^{2x-5}}$.

Розв'яжіть нерівність **(3.21–3.30)**:

3.21. 1) $(2\sqrt{5}-3)^{x^2-\frac{x}{7}} > 1$; 2) $(3-2\sqrt{2})^{4x-x^2} \leqslant 1$.

3.22. 1) $(2\sqrt{7}-5)^{x^2+x} \geqslant 1$; 2) $(5-2\sqrt{3})^{2x-\frac{x^2}{3}} < 1$.

3.23. 1) $5^x + 5^{x-2} \geqslant 26$; 2) $(0,5)^x - (0,5)^{x-2} < -24$;

3) $3^{2x-1} - 3^{2x-3} < \frac{8}{3}$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+4} + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5} > 6$;

5) $7^{2x+1} + 7^{2x+2} + 7^{2x+3} > 57$;

6) $\left(\frac{1}{16}\right)^{x+0,25} - \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1} \leqslant \frac{5}{4}$;

7) $12^{2x+3} - 144^{x+0,5} \leqslant 1716$;

8) $(0,5)^{-4x-8} - 16^{x+1,5} > 768$.

3.24. 1) $3^{x+1} + 3^x > 36$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^x \leqslant 100$;

3) $2^{5x} + 2^{5x+2} < 20$; 4) $0,3^{6x-1} - 0,3^{6x} \geqslant 0,7$;

5) $2^{4x-1} + 2^{4x-2} - 2^{4x-3} \leqslant 160$;

6) $100 \cdot 0,3^{4x+2} - 0,09^{2x} + 5 \cdot 0,0081^x < 13$;

7) $5^{1-x} - (0,2)^{x+1} < 4,8$;

8) $25^{x+1,5} - 5^{2x+2} \geqslant 2500$.

3.25. 1) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$; 2) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} + 6 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^x - 7 \leqslant 0$;

3) $4^x - 2^x - 12 \geqslant 0$; 4) $\left(\frac{1}{25}\right)^x + \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2 > 0$;

5) $2^{2x+3} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 1 < 0$; 6) $4^{-x} + 8 > 9 \cdot 2^{-x}$.

3.26. 1) $5^{2x} + 4 \cdot 5^x - 5 > 0$; 2) $0,2^{2x} - 1,2 \cdot 0,2^x + 0,2 \geqslant 0$;

3) $4x - 6 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 < 0$;

5) $3^{x-1} - 4 \cdot 3^{0,5x-1} + 1 \geqslant 0$; 6) $4^{0,5-x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

3.27. 1) $4^{1+x} - x^2 \cdot 4^x < 0$; 2) $x^2 \cdot 0,3^{x-2} - 0,3^x \leqslant 0$.

3.28. 1) $x^2 \cdot 9^x - 9^{1+x} \geqslant 0$; 2) $0,1^{x-2} - x^2 \cdot 0,1^x > 0$.

3.29. 1) $\frac{4^x - 8}{2x^2 + 5} \geqslant 0$; 2) $\frac{0,3^x - 0,027}{-x^2 - 5} < 0$;

3) $(x-1)(9^x - \sqrt{3}) \leqslant 0$; 4) $(x^2 + x)(25 - 5^x) > 0$.

3.30. 1) $\frac{25^x - 5}{x^2 + 17} \leqslant 0$; 2) $\frac{0,1^x - 0,01}{-2x^2 - 9} > 0$;

3) $(x+2)(2^x - \sqrt{2}) \geqslant 0$; 4) $(x^2 - 2x)(81 - 3^x) < 0$.

Знайдіть множину розв'язків нерівності (**3.31–3.32**):

3.31. 1) $5^{4x^2-3x+0,5} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-40x^2}$; 2) $15^{\sqrt{x^2-2x+6}} \geqslant 1$.

3.32. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-9x^2-8x+3} \leqslant 3^{-7x^2}$; 2) $0,1^{\sqrt{x^2-x}} < 1$.

4 Розв'яжіть нерівність (**3.33–3.38**):

3.33. 1) $7^{x+1} - 2 \cdot 7^x < 5^{x+3} - 118 \cdot 5^x$;
2) $3^{x+1} + 3^{x+2} \geqslant 2 \cdot 7^{2x+1} - 2 \cdot 3^x$.

3.34. 1) $5^{x+1} - 2 \cdot 5^x > 3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-1}$;
2) $2^{2x+1} - 3^{2x+1} \leqslant 3^{2x} - 7 \cdot 2^{2x}$.

3.35. 1) $0,5^{\sqrt{x^2-3x+3}} < 0,5^{\sqrt{x}}$; 2) $9^x \leqslant 27^{\sqrt{x+1}}$.

3.36. 1) $0,4^{\sqrt{x+4}} > 0,4^{\sqrt{x^2+3x+4}}$; 2) $4^{\sqrt{x-1}} \geqslant 2^x$.

3.37. 1) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x \leqslant 0$; 2) $9^{x+1} - 34 \cdot 15^x + 25^{x+1} > 0$.

3.38. 1) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x \geqslant 0$; 2) $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x < 7 \cdot 10^x$.

Розв'яжіть графічно нерівність (**3.39–3.40**):

3.39. 1) $3^x \geqslant 4 - x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0,5x + 5$.

3.40. 1) $2^x < 3 - x$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geqslant 3x + 1$.

Знайдіть область визначення функції (**3.41–3.42**):

3.41. 1) $y = \sqrt{\frac{0,04 - 5^x}{x^2 - 25}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{9^x + 8 \cdot 3^{x-1} - 1}{x^2 - 3x}}$.

3.42. 1) $y = \sqrt{\frac{1 - 2^x}{1 - x}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{4^x + 7 \cdot 2^{x-1} - 2}}$.

Знайдіть множину розв’язків нерівності (3.43–3.46):

3.43. 1) $\dfrac{x^2+4x+4}{3^x-27}\geqslant 0;$ 2) $\dfrac{25-0,2^x}{4x^2-4x+1}\geqslant 0;$

3) $\left(\dfrac{1}{27}-3^{x+2}\right)(5^{3-2x}-0,2)\leqslant 0;$

4) $2^{x+2}+2x^2\leqslant x^2\cdot 2^x+8.$

3.44. 1) $\dfrac{0,008-0,2^x}{x^2-10x+25}\geqslant 0;$ 2) $\dfrac{x^2+6x+9}{2^x-4}\geqslant 0;$

3) $\left(4^{\frac{x}{2}}-8^x\right)(5^x-625)\leqslant 0;$

4) $49+x^2\cdot 7^x\leqslant x^2+7^{x+2}.$

3.45. 1) $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}\leqslant 1;$ 2) $\dfrac{8}{4^{x+1}-4}>4^x.$

3.46. 1) $3^{\sqrt{x}}-3^{1-\sqrt{x}}>2;$ 2) $\dfrac{4}{5^x+3}\geqslant 5^x.$

Розв’яжіть нерівність **(3.47–3.50):**

3.47. 1) $\sqrt{2^{-x}-15}\geqslant 5-2^{-\frac{x}{2}};$ 2) $\sqrt{0,25^x-3\cdot 0,5^x+2}>2-0,5^x.$

3.48. 1) $\sqrt{2^x-3}\geqslant 3-2^{0,5x};$ 2) $\sqrt{4^x-3\cdot 2^x+2}>2-2^x.$

3.49. $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x>6.$

3.50. $(\sqrt{5}+2)^x+(\sqrt{5}-2)^x<2\sqrt{5}.$

3.51. Військовий збір у 2018 році складав 1,5 % від заробітної плати. Заробітна плата директорки кав’ярні «Патріот» протягом року становила 12 000 грн на місяць, кожного з трьох її бариcтів – по 9000 грн на місяць, а офіціантки – 8000 грн на місяць. Крім військового збору, щомісяця директорка підприємства перераховувала 800 грн, кожний з її бариcтів – по 600 грн, а офіціантка – 400 грн у благодійний фонд на підтримку української армії. Яку загальну суму коштів сплатили робітники й робітниці кав’ярні у 2018 році на потреби української армії?

3.52. (*Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру»*). Рівняння $x^2+ax+b=0$ і $x^2+bx+a=0$ мають дійсні корені. Відомо, що сума квадратів коренів першого рівняння дорівнює сумі квадратів коренів другого рівняння. Чому дорівнює сума $a+b$, якщо $a\neq b$?

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 3

1. Укажіть проміжок спадання функції $y = 2x^3 - 3x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]$	$[0; 1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 1]$	$[0; +\infty)$

2. Укажіть цифру, якою можна замінити зірочку в запису числа $\overline{1234*}$, щоб воно ділилося на 3 без остачі.

А	Б	В	Г	Д
1	3	5	7	9

3. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{1}{6x}$	$\dfrac{x+3}{x-3}$	1	$\dfrac{x-3}{x+3}$	дріб є нескоротним

4. При яких значеннях a і b справджується рівність $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$?

А	Б	В	Г	Д
$a > 0$, $b > 0$	$a > 0$, $b < 0$	$a < 0$, $b > 0$	$a < 0$, $b < 0$	таких значень не існує

5. Обчисліть $4\sin\dfrac{\pi}{6} + 2\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

6. Укажіть кількість коренів рівняння $2 \cdot 7^x + 14 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

7. Кожній точці (1–4) поставте у відповідність функцію (А–Д), графіку якої вона належить.

Точка

1 (0; 0)
2 (0; 2)
3 (0; −2)
4 (−2; 0)

Функція

А $y = \dfrac{x+2}{3}$
Б $y = \sqrt{x} + 2$
В $y = 4^x - 3$
Г $y = \sin x$
Д $y = \cos x$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть найбільше ціле число, що належить області визначення функції $y = \sqrt{3x - x^2}$.

9. Обчисліть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), у якої $a_2 = 9$, $a_4 = 15$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Порівняйте a і b, якщо $0{,}7^a > 0{,}7^b$.
А. $a \geqslant b$ **Б.** $a > b$ **В.** $a < b$ **Г.** $a = b$

2. Розв'яжіть рівняння $5^{x+2} = 125$.
А. 3 **Б.** 1 **В.** −1 **Г.** 5

3. Укажіть множину розв'язків нерівності $\left(\dfrac{1}{7}\right)^x \leqslant \left(\dfrac{1}{7}\right)^3$.
А. $[3; +\infty)$ **Б.** $(3; +\infty)$ **В.** $(-\infty; 3]$ **Г.** $(-\infty; 3)$

2

4. Укажіть функцію, що зростає на R.
А. $y = 1^x$ **Б.** $y = 0{,}1^x$ **В.** $y = \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^x$ **Г.** $y = \pi^x$

5. Розв'яжіть рівняння $2^{x+3} - 2^x = 56$.
А. 2 **Б.** 8 **В.** 3 **Г.** 0

6. Розв'яжіть нерівність $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-2x} \leqslant 27$.
А. $\left(-\infty; \dfrac{3}{4}\right]$ **Б.** $\left[\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$ **В.** $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right]$ **Г.** $\left[-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$

3

7. Знайдіть значення виразу $16^{\sqrt{3}-1} \cdot 4^{3-2\sqrt{3}}$.
А. 16 **Б.** 5 **В.** 0,25 **Г.** 1.

8. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{9^x - 3^{x-1}}$.

А. $[-1; +\infty)$ **Б.** $(-1; +\infty)$ **В.** $[1; +\infty)$ **Г.** $(-\infty; +\infty)$

9. Укажіть множину коренів рівняння $3^{2x+1} + 2 \cdot 3^{x+1} - 9 = 0$.

А. $\varnothing$ **Б.** $-1;\ 0$ **В.** $1;\ 0$ **Г.** 0

10. Скільки розв'язків має рівняння $\left(\frac{1}{6}\right)^x = -\frac{6}{x}$?

А. жодного **Б.** один **В.** два **Г.** безліч

11. Знайдіть усі корені рівняння $\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

А. 3 **Б.** $-6;\ 6$ **В.** $-3;\ 3$ **Г.** $-1;\ 1$

12. Розв'яжіть нерівність $2 \cdot 2^x + 2^x + 2^{x-1} \leqslant 6^{x-1} + 6^x$.

А. $[0; +\infty)$ **Б.** $[1; +\infty)$ **В.** $(-\infty; 1]$ **Г.** $[-1; +\infty)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–3

1. Порівняйте x і y, якщо: 1) $0{,}9^x < 0{,}9^y$; 2) $1{,}5^x < 1{,}5^y$.

2. Розв'яжіть рівняння: 1) $2^x = 16$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = \frac{1}{27}$.

3. Розв'яжіть нерівність: 1) $3^x > 3^5$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

4. Побудуйте схематично графік функції $y = 0{,}8^x$ та запишіть її властивості.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $(0{,}25)^{x^2+x} = (0{,}25)^{3-x}$; 2) $3^{x+1} - 3^x = 18$.

6. Розв'яжіть нерівність: 1) $4^{2x-1} > 64$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3x} \leqslant 8$.

7. Обчисліть: 1) $4^{\sqrt{7}-1} \cdot 2^{3-2\sqrt{7}}$; 2) $3^{(1-\sqrt{5})^2} : 3^{4-2\sqrt{5}}$.

8. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+2} + 2 \cdot 2^{x+1} - 8 = 0$; 2) $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^{2x^2-8} = 0{,}81^{-1{,}5x}$.

9. Розв'яжіть нерівність $5^{x+1} - 3^{x+2} \geqslant 43 \cdot 5^{x-1} - 19 \cdot 3^x$.

Додаткові завдання

10. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{25^x - 5^{x+4}}$.

11. Розв'яжіть рівняння $(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 6$.

§ 4. ПОНЯТТЯ ЛОГАРИФМА. ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

В одному з попередніх параграфів ми навчилися розв'язувати рівняння $a^x = b$ у випадку, коли число b можна подати у вигляді степеня з основою a, тобто $b = a^c$, де c – раціональне число. У цьому параграфі розглянемо, як розв'язати рівняння $a^x = b$ в інших випадках. Для цього нам треба познайомитися з новим поняттям – поняттям *логарифма*.

1. Логарифм

Повернемося до рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, яке, як ми вже знаємо, при $b > 0$ має корінь. Цей корінь – значення x – називають *логарифмом числа b за основою a* та позначають так: $\log_a b$.

! ***Логарифмом*** **числа b за основою a називають показник степеня, до якого треба піднести a, щоб отримати b.**

Наприклад, $\log_2 32 = 5$, бо $2^5 = 32$; $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, бо $3^{\frac{1}{2}} = 3$;

$\log_5 \frac{1}{5} = -1$, бо $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\log_7 \frac{1}{\sqrt{7}} = -\frac{1}{2}$, бо $7^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Оскільки рівняння $a^x = b$ розглядають для $a > 0$, $a \neq 1$, то число a, яке називають *основою логарифма*, є числом додатним і відмінним від 1. Число b, як було зазначено вище, – додатне. Отже,

! **вираз $\log_a b$ має зміст, якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$.**

Тепер, використовуючи поняття логарифма, можемо розв'язати будь-яке показникове рівняння вигляду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: 1) $3^x = 5$; 2) $7^{x-1} = 19$.

Розв'язання.

1) $3^x = 5$.

За означенням логарифма:

$x = \log_3 5$.

Відповідь. $\log_3 5$.

2) $7^{x-1} = 19$;

$x - 1 = \log_7 19$;

$x = 1 + \log_7 19$.

Відповідь. $1 + \log_7 19$.

Оскільки $\log_a b$ – корінь рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, тобто $x = \log_a b$, то:

! $$a^{\log_a b} = b.$$

Цю формулу називають *основною логарифмічною тотожністю*. Її використовують для обчислення виразів, що містять логарифми, для доведення властивостей логарифмів тощо.

Приклад 2. Обчислити: 1) $3^{\log_3 7}$; 2) $5^{2\log_5 3}$; 3) $8^{\frac{1}{2}\log_8 9-1}$.

Розв'язання. 1) $3^{\log_3 7} = 7$; 2) $5^{2\log_5 3} = (5^{\log_5 3})^2 = 3^2 = 9$;

3) $8^{\frac{1}{2}\log_8 9-1} = 8^{\frac{1}{2}\log_8 9} : 8^1 = (8^{\log_8 9})^{\frac{1}{2}} : 8 = 9^{\frac{1}{2}} : 8 = \sqrt{9} : 8 = 0,375$.

Відповідь. 1) 7; 2) 9; 3) 0,375.

2. Основні властивості логарифмів

Крім основної логарифмічної тотожності, треба знати й інші важливі рівності – *властивості логарифмів*. Розглянемо їх.

Теорема (основні властивості логарифмів). **Для будь-якого $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$ маємо:**

1) $\log_a 1 = 0$.

2) $\log_a a = 1$.

3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

5) $\log_a x^p = p\log_a x$, $p \in R$.

Доведення. 1) $\log_a 1 = 0$, оскільки $a^0 = 1$.

2) $\log_a a = 1$, оскільки $a^1 = a$.

3) За основною логарифмічною тотожністю $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$. Перемножимо ці рівності почленно: $xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$. За означенням логарифма маємо:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

4) Поділивши почленно рівність $x = a^{\log_a x}$ на рівність $y = a^{\log_a y}$, отримаємо: $\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$. Тоді за означенням логарифма:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

5) Оскільки $x = a^{\log_a x}$, то $x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p\log_a x}$. За означенням логарифма:

$$\log_a x^p = p\log_a x. \blacksquare$$

Властивості 3 і 4 коротко формулюють так:

логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників; логарифм частки дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника.

Зауважимо, що властивість $\log_a x^p = p\log_a x$ у випадку, коли p – парне ціле число, тобто $p = 2m$, $m \in Z$, можна розглядати і для від'ємних значень x. Тоді

$$\log_a x^{2m} = 2m\log_a |x|, \text{ де } x \neq 0,\ m \in Z.$$

Розглянемо приклади використання властивостей логарифмів.

За властивостями 1 і 2, наприклад, маємо: $\log_7 1 = 0$; $\log_8 8 = 1$.

Прологарифмувати вираз означає виразити його логарифм через логарифми додатних чисел та змінних, що входять до нього. За допомогою властивостей логарифмів можна логарифмувати вирази, що є добутками, частками або степенями.

Приклад 3. Прологарифмувати вираз $\dfrac{16a^5\sqrt[3]{b^7}}{\sqrt[8]{c}}$ за основою 2, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Р о з в ' я з а н н я. За властивостями логарифмів маємо:

$$\log_2\frac{16a^5\sqrt[3]{b^7}}{\sqrt[8]{c}}=\log_2\frac{16a^5b^{\frac{7}{3}}}{c^{\frac{1}{8}}}=\log_2\left(16a^5b^{\frac{7}{3}}\right)-\log_2 c^{\frac{1}{8}}=$$

$$=\log_2 16+\log_2 a^5+\log_2 b^{\frac{7}{3}}-\log_2 c^{\frac{1}{8}}=4+5\log_2 a+\frac{7}{3}\log_2 b-\frac{1}{8}\log_2 c.$$

В і д п о в і д ь. $4+5\log_2 a+\dfrac{7}{3}\log_2 b-\dfrac{1}{8}\log_2 c$.

Використаємо формули логарифмів добутку і частки для обчислення та спрощення виразів.

Приклад 4. Обчислити: 1) $\log_{36}2 + \log_{36}18$; 2) $\log_3 18 - \log_3 2$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $\log_{36}2 + \log_{36}18 = \log_{36}(2 \cdot 18) = \log_{36}36 = 1$;

2) $\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3\dfrac{18}{2}=\log_3 9=2$.

В і д п о в і д ь. 1) 1; 2) 2.

Іноді треба знайти вираз за значенням його логарифма. Таку дію називають *потенціюванням*.

Приклад 5. Знайти x, якщо $\log_5 x = \log_5 64 + 2\log_5 7 - 3\log_5 8$.

Р о з в ' я з а н н я. Спочатку перетворимо праву частину рівності:

$\log_5 64 + 2\log_5 7 - 3\log_5 8 = \log_5 64 + \log_5 7^2 - \log_5 8^3 =$

$= \log_5\dfrac{64 \cdot 7^2}{8^3} = \log_5\dfrac{49}{8} = \log_5 6{,}125.$

Отже, $\log_5 x = \log_5 6{,}125$, а тому $x = 6{,}125$.

В і д п о в і д ь. 6,125.

Приклад 6. Дано: $\log_5 2 = a$; $\log_5 3 = b$. Знайти:

1) $\log_5 6$; 2) $\log_5 10$; 3) $\log_5 45$; 4) $\log_5 60$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $\log_5 6 = \log_5(2 \cdot 3) = \log_5 2 + \log_5 3 = a + b$;

2) $\log_5 10 = \log_5(2 \cdot 5) = \log_5 2 + \log_5 5 = a + 1$;

3) $\log_5 45 = \log_5(5 \cdot 9) = \log_5 5 + \log_5 3^2 = 1 + 2\log_5 3 = 1 + 2b$;

4) $\log_5 60 = \log_5(5 \cdot 2^2 \cdot 3) = \log_5 5 + \log_5 2^2 + \log_5 3 = 1 + 2\log_5 2 + \log_5 3 = 1 + 2a + b$.

Відповідь. 1) $a + b$; 2) $a + 1$; 3) $1 + 2b$; 4) $1 + 2a + b$.

3. Формула переходу до іншої основи

Прологарифмуємо за основою c, де $c > 0$, $c \neq 1$, обидві частини основної логарифмічної тотожності $a^{\log_a b} = b$.

Маємо: $\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$, ураховуючи властивість 5, отримаємо:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b.$$

Звідси

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.}$$

Отримали *формулу переходу* від логарифма з основою a до логарифма з основою c (коротко кажуть, що це *формула переходу до іншої основи*).

Приклад 7. Обчислити $\log_{32} 64$.

Розв'язання. Перейдемо до основи 2:

$$\log_{32} 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 32} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Відповідь. 1,2.

Розглянемо важливі наслідки формули переходу до іншої основи. Нехай у цій формулі $c = b$, тоді:

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.}$$

Отже, $\log_a b$ і $\log_b a$ – взаємно обернені числа, а тому

$$\boldsymbol{\log_a b \cdot \log_b a = 1.}$$

Приклад 8. Обчислити $\log_{81} 3$.

Розв'язання. $\log_{81} 3 = \dfrac{1}{\log_3 81} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25.$

Відповідь. 0,25.

Якщо у формулі переходу до іншої основи замість a записати вираз a^q, то матимемо:

$$\log_{a^q} b = \frac{\log_c b}{\log_c a^q} = \frac{\log_c b}{q \cdot \log_c a} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{q}\log_a b.$$

Отже,

$$\boldsymbol{\log_{a^q} b = \frac{1}{q}\log_a b.}$$

Об'єднуючи цю властивість і властивість 5 з доведених вище властивостей логарифмів, матимемо:

$$\log_{a^q} x^p = \frac{p}{q}\log_a x, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$$

Приклад 9. Обчислити $\log_{243}81$.

Р о з в ' я з а н н я. $\log_{243} 81 = \log_{3^5} 3^4 = \frac{4}{5}\log_3 3 = \frac{4}{5} \cdot 1 = 0,8.$

В і д п о в і д ь. 0,8.

Зауважимо, що значення цього виразу можна було обчислити і за допомогою формули переходу до основи 3.

4. Десятковий і натуральний логарифми

Логарифм числа b за основою 10 називають *десятковим логарифмом* і позначають так: $\lg b$.

На більшості калькуляторів та у комп'ютерних програмах десятковий логарифм позначають через log (тобто логарифм без зазначення основи). Отже, щоб обчислити наближене значення $\log_2 7$ за допомогою калькулятора, використовуємо формулу $\log_2 7 = \frac{\lg 7}{\lg 2}$, а далі виконуємо обчислення:

$$\log_2 7 \approx \frac{0,8450980}{0,3010299} \approx 2,8074 \text{ (з точністю до десятитисячних).}$$

Приклад 10. Нехай $\lg 3 = c$, $\lg 5 = d$. Знайти:

1) $\log_9 125$; 2) $\log_{100} 150$.

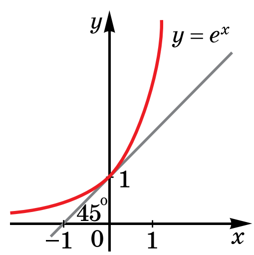
Р о з в ' я з а н н я. 1) $\log_9 125 = \log_{3^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_3 5 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 3} = \frac{3d}{2c}$;

2) $\log_{100} 150 = \log_{10^2}(10 \cdot 3 \cdot 5) = \frac{1}{2}\lg(10 \cdot 3 \cdot 5) =$

$= 0,5(\lg 10 + \lg 3 + \lg 5) = 0,5(1 + c + d).$

В і д п о в і д ь. 1) $\frac{3d}{2c}$; 2) $0,5(1 + c + d)$.

Розглядаючи графіки показникової функції $y = a^x$ для різних значень a, де $a > 0$, $a \neq 1$, ми вже звернули увагу на те, що всі вони проходять через точку (0; 1). Серед цих графіків існує така основа a — число, яке позначають буквою e, що дотична, проведена до графіка функції $y = e^x$ в точці (0; 1), утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45° (мал. 4.1).



Мал. 4.1

Кутовий коефіцієнт k цієї дотичної, як відомо, дорівнює тангенсу цього кута, тобто $k = \mathrm{tg}45° = 1$.

Число e відіграє важливу роль у математичному аналізі, а функцію $y = e^x$ ще називають *експонентою*.

Число e – ірраціональне, $e \approx 2{,}7182818284...$

Логарифм числа b за основою e називають *натуральним логарифмом* і позначають так: $\ln b$.

Таке саме позначення натурального логарифма використовують у більшості калькуляторів та комп'ютерних програм.

5. Використання логарифмів для описування реальних процесів

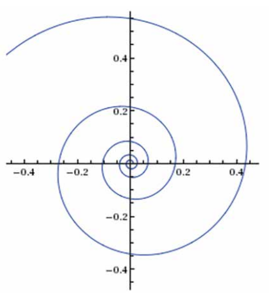
За допомогою логарифмів описують реальні процеси у фізиці, хімії, астрономії. Так, наприклад, відомий учений, засновник теоретичної космонавтики, прибічник освоєння космічного простору, Костянтин Ціолковський (1857–1935) вивів формулу для розрахунку абсолютної швидкості, якої досягає ракета на момент, коли з неї витече все паливо. Ця формула містить логарифм.

Під час будівництва штучних водойм, наприклад, треба враховувати кількість води, що буде прибувати туди в період повені, розрахунки проводять за допомогою логарифмів.

Двійковий логарифм числа (тобто логарифм за основою 2) широко використовують у теорії інформації. Так, наприклад, за його допомогою визначають кількість цифр у внутрішньому комп'ютерному записі числа. На двійкових логарифмах ґрунтується інформаційна ентропія (міра кількості інформації) тощо.

У теорії музики для вирішення питання про те, на скільки частин ділити октаву, потрібно відшукати раціональне наближення для числа $\log_2 1{,}5 \approx 0{,}585$, що дає змогу після додаткових обчислень обґрунтувати класичний розподіл октав на 12 півтонів.

Десяткові логарифми та відповідна логарифмічна шкала використовуються в багатьох областях науки, наприклад: у фізиці (для вимірювання інтенсивності звуку в децибелах), астрономії



Мал. 4.2

Мал. 4.3

(шкала яскравості зірок), хімії (активності водневих іонів), сейсмології (шкала Ріхтера), теорії музики (нотна шкала, по відношенню до частоти нотних звуків), історії (логарифмічна шкала часу) тощо.

У природі часто трапляється особливий вид спіралі – логарифмічна спіраль (мал. 4.2). Логарифмічна спіраль була вперше описана Декартом і пізніше ґрунтовно досліджена Я. Бернуллі. Розмір витків логарифмічної спіралі поступово збільшується, але їх форма залишається незмінною. Можливо, унаслідок цієї властивості, логарифмічна спіраль є відбитком багатьох форм, подібних до мушлі малюска (мал. 4.3), квітки соняшника тощо.

6. Експонента в реальних процесах

Як зазначено вище, функцію $y = e^x$ називають *експонентою*. Функції вигляду $y = Ae^{kx+l}$, де A, k і l – деякі числа, $k \neq 0$, називають *експоненціальними*. Ці функції відіграють важливу роль у побуті та науці. Розглянемо кілька прикладів.

Мабуть, ви часто помічали, що коли зняти чайник, що закипів, з вогню, то спочатку він швидко остигає, а потім остигання значно сповільнюється. Це відбувається тому, що швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою чайника і температурою навколишнього середовища. Якщо спочатку температура чайника дорівнювала T_0, а температура повітря – T_1, то через t секунд температуру T чайника можна знайти за формулою $T = (T_1 - T_0)e^{-kt+T_1}$, де k – число, що залежить від форми чайника, його матеріалу тощо.

Зміни в кількості населення в населеному пункті протягом невеликого проміжку часу можна знайти за формулою $N = N_0e^{kt}$, де N_0 – кількість осіб при $t = 0$, N – кількість осіб на момент часу t, k – деяка стала.

А ще раніше...

Протягом XVI ст. значно зросла кількість наближених обчислень, що було зумовлено розв'язуванням прикладних задач (особливо в астрономії). Найбільше труднощів виникало під час ділення і множення багатоцифрових чисел.

Саме в цей час і з'явилися логарифми, адже давали змогу зводити множення і ділення чисел до, відповідно, додавання і віднімання логарифмів. Широкого застосування логарифми набули після того, як, незалежно одним від одного, математиками Джоном Непером (1550–1617) і Йостом Бюргі (1552–1632) було складено логарифмічні таблиці.

Шотландський математик Джон Непер у працях, виданих у 1614 і 1619 р., склав таблиці логарифмів синусів, косинусів і тангенсів кутів від 0° до 90° з кроком в одну мінуту, що було дуже цінним для астрономів. Швейцарський математик Йост Бюргі свої таблиці готував, скоріше за все, ще до 1610 року, але вийшли вони друком лише в 1620 р., а тому не набули популярності.

Перші таблиці десяткових логарифмів у 1617 р. видав англійський математик Генрі Брігс (1561–1630), а натуральних логарифмів у 1619 р. – інший англійський математик Джон Спейдель (1607–1647).

Сучасне означення логарифма сформулював видатний математик, фізик, механік і астроном Леонард Ейлер (1707–1783). Він також увів поняття основи логарифма, позначення log *і числа e.*

У 1623 р. англійський математик Ентоні Гантер (1581–1626) винайшов логарифмічну лінійку, яка потім неодноразово удосконалювалася і до 70-х років XX ст. була чи не єдиним обчислювальним засобом для інженерів і старшокласників. Тільки після поширення мікрокалькуляторів та інших сучасних засобів обчислення логарифмічні лінійки та таблиці перестали бути засобами обчислення та посіли своє законне місце в музеях математики.

● Що називають логарифмом числа b за основою a? ● При яких a і b має зміст вираз $\log_a b$? ● Запам'ятайте основну логарифмічну тотожність. ● Сформулюйте і доведіть основні властивості логарифмів. ● Запам'ятайте формулу переходу до іншої основи логарифма та наслідки з неї. ● Що називають десятковим логарифмом і що – натуральним логарифмом? ● Знайдіть, використовуючи різні джерела інформації, цікаві приклади застосування логарифмів та експоненти в повсякденному житті.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

4.1. (*Усно*). Які з виразів мають зміст:

1) $\log_2(-1)$; 2) $\lg 8$; 3) $\log_7 0$; 4) $\ln 1{,}5$?

Перевірте правильність рівності (**4.2–4.3**):

4.2. 1) $\log_7 1 = 0$; 2) $\log_2 4 = 2$;

3) $\log_2 8 = 3$; 4) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$;

5) $\log_5 0{,}2 = -1$; 6) $\lg 0{,}01 = -2$;

7) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$; 8) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = -6$.

4.3. 1) $\log_8 8 = 1$; 2) $\log_3 9 = 2$;

3) $\log_2 32 = 5$; 4) $\log_5 \frac{1}{5} = -1$;

5) $\log_9 \frac{1}{81} = -2$; 6) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$;

7) $\lg 0{,}1 = -1$; 8) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} = -2$.

Обчисліть (**4.4–4.9**):

4.4. 1) $\log_9 9$; 2) $\log_2 16$; 3) $\log_{17} 1$; 4) $\log_7 49$.

4.5. 1) $\log_5 1$; 2) $\log_3 27$; 3) $\log_7 7$; 4) $\log_5 25$.

4.6. 1) $3^{\log_3 7}$; 2) $0{,}8^{\log_{0,8} 3}$. **4.7.** 1) $0{,}9^{\log_{0,9} 0,5}$; 2) $5^{\log_5 8}$.

2 **4.8.** 1) $\log_9 \frac{1}{9}$; 2) $\log_2 \frac{1}{16}$; 3) $\log_3 \frac{1}{81}$; 4) $\lg 0{,}001$;

5) $\log_{13} \sqrt{13}$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 7) $\log_{\sqrt{3}} 81$; 8) $\lg 10\sqrt{10}$.

4.9. 1) $\log_7 \frac{1}{7}$; 2) $\log_3 \frac{1}{27}$; 3) $\log_5 \frac{1}{25}$; 4) $\lg 0{,}0001$;

5) $\log_{\sqrt{5}} 5$; 6) $\log_{\frac{1}{5}} 25$; 7) $\log_{17} \sqrt{17}$; 8) $\lg 100\sqrt{10}$.

Знайдіть значення виразу, якщо $a > 0$, $a \neq 1$ (**4.10–4.11**):

4.10. 1) $\log_a a^8$; 2) $\log_a \sqrt{a}$; 3) $\log_a \frac{1}{a}$; 4) $\log_a \frac{1}{a^4}$.

4.11. 1) $\log_a a^5$; 2) $\log_a \sqrt[3]{a}$; 3) $\log_a \sqrt{a^5}$; 4) $\log_a \frac{1}{a^3}$.

Знайдіть логарифми за основою a чисел (**4.12–4.13**):

4.12. 1) 64; $\frac{1}{8}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[5]{2}$, якщо $a = 2$;

2) 125; $\frac{1}{25}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{25}$, якщо $a = 5$.

4.13. 1) 9; $\frac{1}{243}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[5]{9}$, якщо $a = 3$;

2) 64; 2; $\frac{1}{16}$; $\sqrt[7]{4}$, якщо $a = 4$.

Розв'яжіть рівняння (**4.14–4.15**):

4.14. 1) $2^x = 7$; 2) $7^{x+1} = 9$; 3) $5^{x-3} = 7$; 4) $0{,}2^{2x-1} = 9$.

4.15. 1) $3^x = 5$; 2) $11^{x-1} = 8$; 3) $7^{x+2} = 2$; 4) $0{,}3^{2x+1} = 11$.

При яких значення x має зміст вираз (**4.16–4.17**):

4.16. 1) $\lg(x + 2)$; 2) $\log_2(9 - x)$;

3) $\log_5(4x - x^2)$; 4) $\log_{0,3}(x^2 + x - 2)$?

4.17. 1) $\log_{0,4}(x + 1)$; 2) $\log_7(1 - x)$;

3) $\lg(x^2 + x)$; 4) $\log_9(6 + x - x^2)$?

Обчисліть (**4.18–4.19**):

4.18. 1) $\frac{1}{2}\log_5 25 - \frac{1}{4}\log_2 128$; 2) $2\log_2 \frac{1}{4} + 4\log_{\frac{1}{3}} 27$.

4.19. 1) $\frac{1}{4}\log_6 36+\frac{1}{2}\log_3 81$; 2) $4\log_3\frac{1}{9}-2\log_{\frac{1}{2}}16$.

Знайдіть значення виразу (**4.20–4.21**):

4.20. 1) $2^{3\log_2 5}$; 2) $3^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; 3) $5^{1+\log_5 7}$; 4) $7^{\log_7 3-1}$.

4.21. 1) $17^{2\log_{17} 3}$; 2) $4^{\frac{1}{2}\log_4 25}$; 3) $9^{1+\log_9 2}$; 4) $15^{\log_{15} 2-1}$.

Обчисліть (**4.22–4.23**):

4.22. 1) $\log_6 3+\log_6 2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}32-\log_{\frac{1}{2}}16$;

3) $\log_5\sqrt{10}-\log_5\sqrt{2}$; 4) $\lg 4+\lg 25$.

4.23. 1) $\log_{21}3+\log_{21}7$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}45-\log_{\frac{1}{3}}15$;

3) $\lg\sqrt{30}-\lg\sqrt{3}$; 4) $\log_6 4+\log_6 9$.

Знайдіть значення виразу (**4.24–4.25**):

4.24. 1) $\log_2\sqrt[3]{2^4}$; 2) $\log_9\sqrt{9^5}$; 3) $\frac{\lg 8}{\lg 2}$; 4) $\frac{\log_7 81}{\log_7 3}$.

4.25. 1) $\log_3\sqrt[5]{3^7}$; 2) $\log_8\sqrt{8^7}$; 3) $\frac{\log_5 16}{\log_5 2}$; 4) $\frac{\lg 27}{\lg 3}$.

Прологарифмуйте вираз ($a>0$; $b>0$; $c>0$) (**4.26–4.27**):

4.26. 1) $8a^2b^7\sqrt{c}$ за основою 2; 2) $\frac{1}{7}a\sqrt[3]{bc^5}$ за основою 7.

4.27. 1) $81\sqrt[5]{abc^7}$ за основою 3; 2) $\frac{1}{5}a^7\sqrt[4]{bc}$ за основою 5.

Знайдіть x, якщо (**4.28–4.29**):

4.28. 1) $\lg x=\lg 4-\lg 2+\lg 3$; 2) $\log_4 24+\log_4 5-\log_4 6=\log_4 x$.

4.29. 1) $\log_5 x=\log_5 34-\log_5 2+\log_5 4$; 2) $\lg 8-\lg 4+\lg 5=\lg x$.

4.30. Нехай $\lg x=a$; $\lg y=b$. Виразіть через a і b десятковий логарифм числа:

1) xy; 2) $\frac{x}{y}$; 3) y^3; 4) $x^{\frac{1}{4}}$; 5) x^3y^2; 6) $\sqrt[3]{xy}$.

4.31. Відомо, що $\lg 2\approx 0{,}301$. Знайдіть:
1) $\lg 20$; 2) $\lg 2000$; 3) $\lg 0{,}2$; 4) $\lg 0{,}02$.

4.32. Відомо, що $\lg 5\approx 0{,}699$. Знайдіть:
1) $\lg 50$; 2) $\lg 500$; 3) $\lg 0{,}5$; 4) $\lg 0{,}005$.

3 Обчисліть (**4.33–4.38**):

4.33. 1) $\log_2(4\log_6 36)$; 2) $\log_{12}\left(3\log_{\sqrt{5}}25\right)$;
3) $\log_{1,5}\log_4 8$; 4) $\lg(5\log_7 49)^2$.

4.34. 1) $\log_3(3\log_5 125)$; 2) $\log_{0,5}\log_5\sqrt{5}$;
3) $\log_{0,75}\log_8 16$; 4) $\lg(2\lg 10^5)^3$.

4.35. 1) $\log_{13}\dfrac{1}{\sqrt[5]{13^2}}$; 2) $\log_{27}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$;
3) $\log_{\sqrt{8}}(16\sqrt{2})$; 4) $\log_{32}\sqrt[3]{2}$.

4.36. 1) $\log_2\dfrac{1}{\sqrt[7]{2^{13}}}$; 2) $\log_{16}\cos\dfrac{\pi}{3}$;
3) $\log_{\sqrt{5}}(125\sqrt{5})$; 4) $\log_9\sqrt[5]{3}$.

4.37. 1) $\log_{2\sqrt{3}}\dfrac{1}{12}$; 2) $\log_{\frac{\sqrt{6}}{3}}2,25$;
3) $\log_{\sqrt{8}}(4\sqrt{2})$; 4) $\log_{0,4\sqrt{2}}\dfrac{625}{64}$.

4.38. 1) $\log_{3\sqrt{2}}\dfrac{1}{18}$; 2) $\log_{\frac{\sqrt{6}}{2}}\dfrac{8}{27}$; 3) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt[3]{81}$; 4) $\log_{\frac{3}{16}}\dfrac{3\sqrt{3}}{64}$.

4.39. Відомо, що $\log_a b = 2$. Знайдіть:
1) $\log_{a^5}(a^{10}b^5)$; 2) $\log_{a^6}(a^6b^{12})$.

4.40. Відомо, що $\log_y x = 3$. Знайдіть:
1) $\log_{y^4}(x^4y^{12})$; 2) $\log_{y^5}(y^5x^{10})$.

4.41. Прологарифмуйте вираз за основою 2, якщо $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$:
1) $\dfrac{\sqrt[5]{16a^3}\sqrt[7]{b}}{\sqrt[5]{c^2}}$; 2) $\sqrt[6]{\dfrac{ab^7}{32c^5}}$.

4.42. Прологарифмуйте вираз за основою 3, якщо $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$:
1) $\dfrac{\sqrt[4]{27b^7}\sqrt[5]{c}}{\sqrt[9]{a^5}}$; 2) $\sqrt[5]{\dfrac{ac^4}{9b^3}}$.

Обчисліть **(4.43–4.46)**:

4.43. 1) $\dfrac{\ln 27+\ln 12}{\ln 2+2\ln 3}$; 2) $\dfrac{\log_8 27-2\log_8 3}{\log_8 45+\log_8 0,2}$;
3) $\log_3 18+\dfrac{2}{3}\log_9 64-3\log_{27} 8$.

4.44. 1) $\dfrac{\log_{12} 81+\log_{12} 64}{2\log_{12} 3+3\log_{12} 2}$; 2) $\dfrac{2\ln 4+\ln 0,5}{\ln 6-\ln 12}$;
3) $\log_5\dfrac{125}{8}+\log_{25} 64$.

4.45. 1) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}\log_{\frac{1}{8}}81}$; 2) $9^{1-\log_3 5}$; 3) $2^{\log_4 25+\log_{16}625}$; 4) $100^{\lg\frac{1}{3}-\lg 2}$.

4.46. 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{7}}8}$; 2) $4^{2-\log_2 6}$; 3) $3^{\log_9 16-\log_{27}8}$; 4) $1000^{\lg 2-\lg 4}$.

Знайдіть x, якщо (**4.47–4.48**):

4.47. 1) $\log_{0,6}x = 5\log_{0,6}3 - \frac{1}{3}\log_{0,6}27 - 3\log_{0,6}6$;

2) $\log_2 x = \log_4 8 + 2\log_4 5 - \log_4 2$.

4.48. 1) $\log_{18}x = 2\log_{18}6 - 2\log_{18}4 + 3\log_{18}\sqrt[3]{20}$;

2) $\lg x = \log_{100}32 + 2\log_{100}3 - \log_{100}2$.

4.49. Відомо, що $\log_3 2 = m$, $\log_3 7 = n$. Виразіть через m і n:

1) $\log_3 14$; 2) $\log_3 6$; 3) $\log_3 28$; 4) $\log_2 7$.

4.50. Відомо, що $\log_2 3 = x$, $\log_2 5 = y$. Виразіть через x і y:

1) $\log_2 15$; 2) $\log_2 6$; 3) $\log_2 75$; 4) $\log_3 5$.

Розв'яжіть рівняння (**4.51–4.52**):

4.51. 1) $4^x - 4\cdot 2^x - 5 = 0$;

2) $25^x - 5^{x+1} + 4 = 0$;

3) $3^{x+1} + 18\cdot 3^{-x} = 29$.

4.52. 1) $9^x - 3^x - 2 = 0$; 2) $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$;

3) $2\cdot 5^{-x} + 5^{1+x} = 11$.

При яких значеннях змінної має зміст вираз (**4.53–4.54**):

4.53. 1) $\log_x(3-2x)$; 2) $\log_x(x+1)$;

3) $\log_{x-2}(4-x)^2$; 4) $\log_{|x-3|}(x-1)$?

4.54. 1) $\log_x(x-0,5)$; 2) $\log_x(7-x)$;

3) $\log_{x-3}(x-5)^2$; 4) $\log_{|x-2|}x$?

Побудуйте графік функції (**4.55–4.56**):

4.55. 1) $y = \log_x x^3$; 2) $y = 4^{\log_4 x}$; 3) $y = x^{\log_x 2}$; 4) $y = \log_x \frac{1}{x}$.

4.56. 1) $y = \log_x x$; 2) $y = 3^{\log_3 x^3}$; 3) $y = x^{\log_x 4}$; 4) $y = \log_x \frac{1}{x^2}$.

Запишіть вираз у вигляді суми або різниці логарифмів (**4.57–4.58**):

4.57. 1) $\log_3(xy)$, якщо $x < 0$, $y < 0$;

2) $\log_5(-x^2y)$, якщо $x > 0$, $y < 0$;

3) $\lg(-x^2y^3)$, якщо $x < 0$, $y < 0$;

4) $\log_7 \frac{y^2}{-7x}$, якщо $x < 0$, $y < 0$.

4.58. 1) $\log_5(ab)$, якщо $a < 0$, $b < 0$;
2) $\lg(-a^4b)$, якщо $a > 0$, $b < 0$;
3) $\log_3(-3a^2b^5)$, якщо $a < 0$, $b < 0$;
4) $\log\dfrac{-a^2}{b}$, якщо $a < 0$, $b < 0$.

Порівняйте числа **(4.59–4.60)**:

4.59. 1) $\sqrt{8}$ і $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9}$; 2) $\sqrt[3]{18}$ і $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$;
3) $2\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{5}$ і $3\log_8 26$; 4) $2\log_3 4$ і $3\log_{\frac{1}{27}}\dfrac{1}{17}$.

4.60. 1) $\sqrt{18}$ і $4^{\log_2 3+\log_4\frac{5}{11}}$; 2) $\sqrt{5}$ і $9^{\log_3\sqrt{2}+\log_{\frac{1}{9}}\frac{8}{9}}$;
3) $2\log_2 5$ і $3\log_{\frac{1}{8}}\dfrac{1}{23}$; 4) $2\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{4}$ і $3\log_{27} 15$.

4 **4.61.** Доведіть, що $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Порівняйте вирази **(4.62–4.65)**:

4.62. 1) $7^{\log_8 9}$ і $9^{\log_8 7}$; 2) $2^{\lg 3}$ і $3^{\lg 2} + 0{,}1$.

4.63. 1) $5^{\lg 2}$ і $2^{\lg 5}$; 2) $4^{\log_3 7} - 0{,}1$ і $7^{\log_3 4}$.

4.64. 1) $3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3}\lg 2}$ і $5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}$;
2) $2^{\log_7 3} + \sqrt[5]{6}$ і $3^{\log_7 2} + 6^{\frac{1}{3}\log_6 3}$.

4.65. 1) $7^{\log_5 2} + 6^{\frac{1}{3}\log_6 15}$ і $2^{\log_5 7} + \sqrt{6}$;
2) $5^{\log_3 7} + \sqrt{7}$ і $7^{\log_3 5} + 7^{\frac{1}{3}\log_7 19}$.

Обчисліть **(4.66–4.67)**:

4.66. 1) $2^{5-8\log_{16} 3}$; 2) $\log_4 3 \cdot \lg 4 \cdot \log_{27} 10$.

4.67. 1) $3^{4-6\log_{27} 2}$; 2) $\log_6 25 \cdot \lg 6 \cdot \log_5 10$.

Знайдіть значення виразу **(4.68–4.69)**:

4.68. 1) $\ln\operatorname{tg}16° + \ln\operatorname{tg}74°$; 2) $\log_2\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}+\log_2\left(2\sin^2\dfrac{\pi}{12}\right)$.

4.69. 1) $\lg\operatorname{tg}89° + \lg\operatorname{tg}1°$; 2) $\log_2\cos\dfrac{\pi}{8}+\log_2\left(2\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Обчисліть **(4.70–4.71)**:

4.70. 1) $5^{\frac{1}{\log_7 5}}$; 2) $2^{\frac{3}{\log_5 2}}$; 3) $3^{-\frac{1}{\log_7 3}}$; 4) $3^{\frac{1}{2\log_{25} 3}}$.

4.71. 1) $2^{\frac{1}{\log_3 2}}$; 2) $3^{\frac{2}{\log_7 3}}$; 3) $5^{-\frac{1}{\log_4 5}}$; 4) $5^{\frac{1}{3\log_8 5}}$.

Розв'яжіть рівняння (**4.72–4.73**):

4.72. $x^2 + 3^{\log_3 x} = 6.$ **4.73.** $x^2 - 5^{\log_5 x} - 12 = 0.$

4.74. Знайдіть значення виразу $\lg^2 2 + \lg 5 \cdot \lg 20$.

4.75. Доведіть, що число $\log_{2-\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})$ є цілим.

4.76. Доведіть, що число $\log_{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}+1)$ є цілим.

Знайдіть (**4.77–4.78**):

4.77. 1) $\log_5 6$, якщо $\lg 3 = a$; $\lg 2 = b$;

2) $\log_6 16$, якщо $\log_{12} 27 = a$;

3) $\log_{15} 49$, якщо $\log_7 9 = a$; $\log_7 45 = b$;

4) $\log_{\frac{y}{x}} y$, якщо $\log_{xy}(x^2y) = -1$;

5) $\log_a b$, якщо $\log^2_{a^2b}(ab^2) = 4$;

6) $\log_{ab^2}(ab)$, якщо $\log_a b - \log_b a = 1,5$.

4.78. 1) $\log_5 6$, якщо $\log_2 3 = a$; $\log_2 10 = b$;

2) $\log_{12} 8$, якщо $\log_6 9 = a$;

3) $\log_3 10$, якщо $\lg 4 = a$; $\lg 6 = b$;

4) $\log_{y\sqrt{x}}(x\sqrt{y})$, якщо $\log_{xy^2} x = -3$;

5) $\log_b a$, якщо $\log^2_{ab^3}(a^3b^6) = 9$;

6) $\log_{ab^2}(ab)$, якщо $\log_a b - \log_{ab}(ab^3) = 1,5$.

Знайдіть значення виразу (**4.79–4.80**):

4.79. 1) $\dfrac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \dfrac{\log_5 150}{\log_6 5}$; 2) $\dfrac{\log_3 42}{\log_{126} 3} - \dfrac{\log_3 378}{\log_{14} 3}$.

4.80. 1) $\dfrac{\log_2 70}{\log_{280} 2} - \dfrac{\log_2 560}{\log_{35} 2}$; 2) $\dfrac{\log_2 60}{\log_{60} 2} - \dfrac{\log_2 240}{\log_{15} 2}$.

4.81. Обчисліть $\log_{350} 140$, якщо $\log_5 2 = a$; $\log_7 5 = b$.

4.82. Обчисліть $\log_{12} 90$, якщо $\log_{24} 3 = a$; $\log_{24} 5 = b$.

Спростіть вираз (**4.83–4.84**):

4.83. 1) $(6(\log_b a \cdot \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log^2_a b)^{\frac{1}{2}} - \log_a b$, якщо $a > 1$;

2) $((\log^4_b a + \log^4_a b + 2)^{\frac{1}{2}} - 2)^{\frac{1}{2}}$, якщо $1 < a < b$.

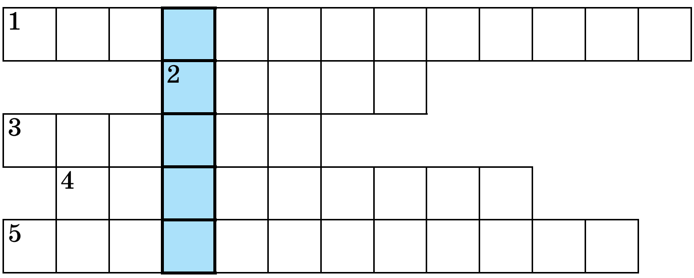
4.84. 1) $((\log^4_b a + \log^4_a b + 2)^{\frac{1}{2}} + 2)^{\frac{1}{2}} - \log_b a - \log_a b$;

2) $\left(x^{1+\frac{1}{2\log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3\log_{x^2} 2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$.

4.85. Маса щоденної потреби дорослої людини у вітаміні С відноситься до маси щоденної потреби у вітаміні Е як 4 : 1. Скільки вітаміну С на добу має вживати доросла людина, якщо вітаміну Е вона має вживати 15 мг на добу.

4.86. *Видатні українки.* Використовуючи будь-які джерела інформації, запишіть по горизонталях прізвища видатних українок і у виділеному стовпчику отримаєте прізвище видатного українського педагога, математика, доктора фізико-математичних наук, професора, академіка Академії педнаук України, автора шкільних підручників з алгебри та початків аналізу.

1. Українська оперна співачка.
2. Дівоче прізвище видатної української поетеси Лесі Українки.
3. Поетеса, громадська діячка, прізвищем якої названо вулицю в Києві.
4. Видатна українська художниця XX століття.
5. Одна з найкращих актрис в історії України та всієї Східної Європи кінця XIX – початку XX століття.



ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 4

1. Знайдіть область значень функції $y = 3^{-|x|}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(0; 1)$	$(0; 1]$	$(0; +\infty)$	$[1; +\infty)$

2. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $2^x = \dfrac{1}{16}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-5; -4)$	$[4; +\infty)$	$[-3; 3]$	$[-4; 0]$	$(-\infty; -5]$

3. Скоротіть дріб $\dfrac{\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sin 2a$	$\cos 2a$	$\sin a$	$\frac{1}{2}\sin 2\alpha$	$\frac{1}{2}\cos 2\alpha$

4. Знайдіть найменший корінь рівняння $x\|x\| - 3x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
3	0	–3	–1,5	інша відповідь

5. Укажіть, скільки різних двоцифрових чисел можна скласти із цифр 1; 2; 3; 4; 5; 6, не повторюючи цифр у числі.

А	Б	В	Г	Д
24	25	26	28	30

6. Укажіть точку мінімуму функції $y = 3x^2 - x^3$.

А	Б	В	Г	Д
–1	0	1	2	4

7. Установіть відповідність між числовим виразом (1–4) та значенням цього виразу (А–Д).

Числовий вираз	*Значення виразу*
1 $\log_{27} 9$	**А** $\frac{1}{3}$
2 $\log_9 27$	**Б** $\frac{1}{2}$
3 $\log_{27} 3$	**В** $\frac{2}{3}$
4 $\log_3 \sqrt{3}$	**Г** $\frac{3}{2}$
	Д 2

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Один з робітників, працюючи самостійно, може виконати роботу за 20 год, а інший ту саму роботу – за 30 год. За скільки годин вони виконають цю роботу, якщо працюватимуть разом?

9. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_2 = 8$, $b_5 = -64$.

§ 5. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

1. Логарифмічна функція та її графік

Функцію вигляду $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають *логарифмічною функцією*.

Наприклад, логарифмічними є функції: $y = \log_5 x$; $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = \log_\pi x$; $y = \log_{\sqrt{7}} x$ тощо.

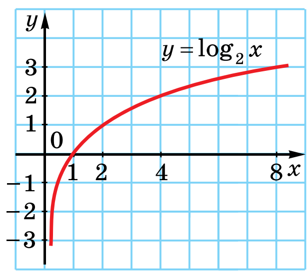
При $a > 0$, $a \neq 1$ вираз $\log_a x$ має зміст лише для додатних значень x. Тому

областю визначення функції $y = \log_a x$ є проміжок $(0; +\infty)$.

Розглянемо графіки логарифмічної функції, побудувавши їх, як і для показникової функції, по точках.

Приклад 1. Розглянемо функцію $y = \log_2 x$. Складемо таблицю її значень для кількох значень аргументу x, $x > 0$.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	−3	−2	−1	0	1	2	3

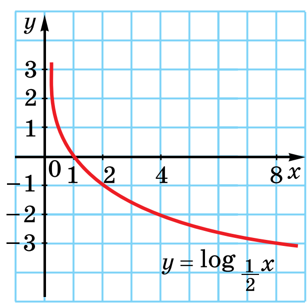


Мал. 5.1

Позначимо отримані в таблиці точки на координатній площині і сполучимо їх плавною лінією (мал. 5.1). Оскільки $x > 0$, то графік не перетинає вісь ординат, але коли $x \to 0$, то наближається до неї, тобто вісь y – асимптота цього графіка.

Приклад 2. Розглянемо функцію $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Складемо таблицю її значень.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	2	1	0	−1	−2	−3



Мал. 5.2

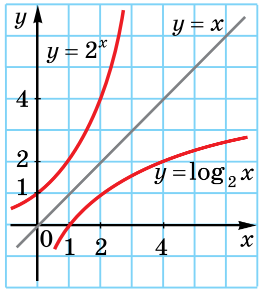
Графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ зображено на малюнку 5.2.

Якщо зобразити графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \log_2 x$ на одному малюнку, то можна помітити, що вони симетричні відносно прямої $y = x$ (мал. 5.3).

Це пояснюється тим, що функції $y = 2^x$ і $x = \log_2 y$ є взаємно оберненими.

Отже,

показникова функція $y = a^x$ і логарифмічна функція $y = \log_a x$, що мають однакові основи a, є взаємно оберненими, а їх графіки відповідно симетричними відносно прямої $y = x$.

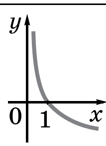
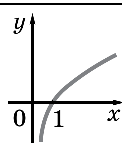


Мал. 5.3

2. Властивості логарифмічної функції

Використовуючи висновок про симетрію графіків функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$ відносно прямої $y = x$ та наші знання про графік показникової функції, можна дійти висновку, що графіки всіх функцій вигляду $y = \log_a x$, де $a > 1$, схематично виглядають так само, як графік функції $y = \log_2 x$, а у випадку $0 < a < 1$ – як графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Систематизуємо властивості логарифмічної функції $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ та при $a > 1$ у таблицю.

Функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$		
Властивості	**$0 < a < 1$**	**$a > 1$**
Область визначення	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
Множина значень	R	R
Парність, непарність	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна
Періодичність	Неперіодична	Неперіодична
Нулі функції	$x = 1$	$x = 1$
Проміжки знакосталості, $y > 0$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; +\infty)$
Проміжки знакосталості, $y < 0$	$x \in (1; +\infty)$	$x \in (0; 1)$
Проміжки спадання	$x \in (0; +\infty)$	–
Проміжки зростання	–	$x \in (0; +\infty)$
Екстремуми	Немає	Немає
Асимптота	$x = 0$	$x = 0$
Особливості графіка функції: проходить через точку $(1; 0)$		

Розглянемо приклади використання властивостей логарифмічної функції.

Приклад 3. Порівняти значення виразів:

1) $\log_3 2{,}7$ і $\log_3 2{,}9$; 2) $\log_{0,3}\frac{1}{8}$ і $\log_{0,3}\frac{1}{2}$.

Розв'язання. 1) Функція $y = \log_3 x$ зростає на $(0; +\infty)$, тому більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Оскільки $2{,}7 < 2{,}9$, то $\log_3 2{,}7 < \log_3 2{,}9$.

2) Функція $y = \log_{0,3} x$ спадає на $(0; +\infty)$, тому більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Оскільки $\frac{1}{8} < \frac{1}{2}$, то $\log_{0,3}\frac{1}{8} > \log_{0,3}\frac{1}{2}$.

Відповідь. 1) $\log_3 2{,}7 < \log_3 2{,}9$; 2) $\log_{0,3}\frac{1}{8} > \log_{0,3}\frac{1}{2}$.

Приклад 4. Порівняти число a ($a > 0$, $a \neq 1$) з одиницею, якщо:

1) $\log_a 5 < \log_a 4{,}5$; 2) $\log_a 3{,}8 > \log_a 3$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\log_a 5 < \log_a 4{,}5$, а $5 > 4{,}5$, то меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції, отже, функція $y = \log_a x$ спадна, а тому $0 < a < 1$.

2) $\log_a 3{,}8 > \log_a 3$, а $3{,}8 > 3$, тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Отже, функція $y = \log_a x$ зростає, тому $a > 1$.

Відповідь. 1) $0 < a < 1$; 2) $a > 1$.

Приклад 5. Порівняти числа a і b, якщо:

1) $a = \log_3 10$; $b = \log_{0,5} 0{,}28$; 2) $a = \frac{1}{2}\log_2 9$; $b = \log_5 11$.

Розв'язання. 1) Оскільки функція $y = \log_3 x$ – зростаюча, то $a = \log_3 10 > \log_3 9 = 2$. Оскільки функція $y = \log_{0,5} x$ – спадна, то $b = \log_{0,5} 0{,}28 < \log_{0,5} 0{,}25 = 2$. Отже, $a > 2$, $b < 2$, тому $a > b$.

2) Оскільки $2a = \log_2 9 > \log_2 8 > 3$, то $a > 1{,}5$.

Оскільки $2b = 2\log_5 11 = \log_5 121 < \log_5 125 < 3$, то $b < 1{,}5$.

Отже, $a > 1{,}5$, а $b < 1{,}5$, тому $a > b$.

Відповідь. 1) $a > b$; 2) $a > b$.

Приклад 6. Знайти область визначення функції:

1) $y = \log_3(2x - x^2)$; 2) $y = \log_x(4 - x)$.

Розв'язання. 1) Область визначення будемо шукати з умови $2x - x^2 > 0$. Розв'язавши цю нерівність, отримаємо: $x \in (0; 2)$.

2) Область визначення даної функції знайдемо із системи:

$$\begin{cases} x > 0; \\ x \neq 1; \\ 4 - x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0; \\ x \neq 1; \\ x < 4. \end{cases} \quad \text{Отже, } x \in (0;\ 1) \cup (1;\ 4).$$

В і д п о в і д ь. 1) (0; 2); 2) (0; 1) ∪ (1; 4).

Аналізуючи розташування графіків логарифмічної функції для $a > 1$ і $0 < a < 1$ в координатній площині та їх властивості, можна дійти висновку, що

$\log_a b > 0$, якщо a і b розташовані по один бік від числа 1, тобто $a > 1$, $b > 1$ або $0 < a < 1$, $0 < b < 1$;
$\log_a b < 0$, якщо a і b розташовані по різні боки від числа 1, тобто $0 < a < 1$, $b > 1$ або $a > 1$, $0 < b < 1$.

Це правило дає змогу порівнювати значення логарифмів з нулем та між собою.

Наприклад, $\log_{\frac{1}{7}} 5 < 0$, бо $5 > 1$, $\frac{1}{7} < 1$; $\log_2 3 > 0$, бо $3 > 1$, $2 > 1$; $\log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_7 1{,}1$, бо $\log_{\frac{1}{3}} 2 < 0$, $\log_7 1{,}1 > 0$.

3. Логарифмічна функція як математична модель реальних процесів

Наприклад, логарифмічна функція моделює такі процеси, як швидке зростання або затухання, закон зміни роботи газу, закон зміни сили відчуття від сили збудження (психофізичний закон Вебера), закон зміни тиску від зміни висоти, тривалість хімічної реакції тощо.

Логарифми застосовують і у банківській справі. Якщо, наприклад, вкладник відкрив у банку депозит на певну суму коштів під 12 % річних і хоче дізнатися через скільки років ця сума подвоїться, то з'ясувати це можна за формулою складних відсотків. Матимемо:

$$2A_0 = A_0\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n,$$

тобто $2 = 1{,}12^n$, отже, $n = \log_{1,12} 2 = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}12} \approx 6{,}11.$

Таким чином, щоб вкладена сума коштів подвоїлася, вона має перебувати в банку трішки більше 6 років.

• Яку функцію називають логарифмічною? • Якою є область визначення логарифмічної функції? • Яке взаємне розташування графіків функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$ у координатній площині? • Сформулюйте властивості логарифмічної функції, якщо $0 < a < 1$ і якщо $a > 1$. • Як порівняти $\log_a b$ з нулем? • Використовуючи різні джерела інформації, знайдіть інші цікаві застосування логарифмічної функції.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 (*Усно*). Які з функцій є зростаючими, а які – спадними на $(0; +\infty)$ (**5.1–5.2**):

5.1. 1) $y = \log_{0,7}x$; 2) $y = \log_{8,5}x$; 3) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$; 4) $y=\log_{\frac{7}{6}} x$?

5.2. 1) $y = \log_{6,2}x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{5}} x$; 3) $y = \log_{0,01}x$; 4) $y=\log_{\frac{13}{6}}x$?

5.3. Порівняйте x і y, якщо:
1) $\log_5 x > \log_5 y$; 2) $\log_{0,17}x > \log_{0,17}y$.

5.4. Порівняйте m і n, якщо:
1) $\log_{0,3}m < \log_{0,3}n$; 2) $\log_7 m < \log_7 n$.

Порівняйте числа (**5.5–5.6**):

5.5. 1) $\log_{0,2}3$ і $\log_{0,2}4$; 2) $\log_{15}17$ і $\log_{15}18$.

5.6. 1) $\log_3 4$ і $\log_3 5$; 2) $\log_{0,8}2$ і $\log_{0,8}3$.

5.7. Дано: $f(x) = \log_5 x$. Знайдіть:
1) $f(5)$; 2) $f(5^7)$; 3) $f(0,2)$; 4) $f(1)$.

5.8. Дано: $f(x) = \log_3 x$. Знайдіть:
1) $f(9)$; 2) $f(1)$; 3) $f\left(\frac{1}{27}\right)$; 4) $f(3^{10})$.

5.9. Дано: $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$. Знайдіть:
1) $g(1)$; 2) $g\left(\frac{1}{9}\right)$; 3) $g\left(\frac{1}{3}\right)$; 4) $g(81)$.

5.10. Дано: $g(x) = \log_{0,2} x$. Знайдіть:
1) $g(0,2)$; 2) $g(0,008)$; 3) $g(5)$; 4) $g(1)$.

2 Побудуйте схематично графік функції та вкажіть її властивості (**5.11–5.12**):

5.11. 1) $y = \log_3 x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{5}}x$.

5.12. 1) $y = \log_{0,6}x$; 2) $y = \log_{2,7}x$.

Зростаючою чи спадною на $(0; +\infty)$ є функція (**5.13–5.14**):

5.13. 1) $y = \log_{\mathrm{tg}43^\circ}x$; 2) $y=\log_{2\sin\frac{\pi}{3}} x$?

5.14. 1) $y=\log_{\frac{1}{\sin 60^\circ}} x$; 2) $y=\log_{\cos\frac{\pi}{3}} x$?

Знайдіть область визначення функції (**5.15–5.16**):

5.15. 1) $y = \log_7(2x - 1)$; 2) $y = \log_3(7 - 4x)$;
3) $y = \log_{0,1}(3x - x^2)$; 4) $y = \log_{0,1}(x - 2) + \log_5(7 - x)$.

5.16. 1) $y = \log_5(2 - 3x)$; 2) $y = \lg(4x + 5)$;
3) $y = \log_{0,2}(x^2 - 5x)$; 4) $y = \log_4(x + 1) + \log_2(9 - x)$.

Порівняйте з одиницею основу логарифма a ($a > 0$), якщо (**5.17–5.18**):

5.17. 1) $\log_a 5 < \log_a 10$; 2) $\log_a 2,3 > \log_a 4$.

5.18. 1) $\log_a 7 > \log_a 8$; 2) $\log_a 15 < \log_a 20$.

5.19. Які з точок належать графіку функції $y = \log_{\frac{1}{4}} x$:

1) $A\left(\frac{1}{4}; 0\right)$; 2) $B\left(\frac{1}{16}; 2\right)$; 3) $C(4; -1)$; 4) $D(16; 2)$?

5.20. Які з точок належать графіку функції $y = \log_3 x$:

1) $A(9; -2)$; 2) $B(1; 0)$; 3) $C\left(\frac{1}{9}; 2\right)$; 4) $D\left(\frac{1}{27}; -3\right)$?

5.21. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Як змінюється y, коли x зростає від 1 до 8?

5.22. Побудуйте графік функції $y = \log_3 x$. Як змінюється y, коли x зростає від 1 до 9?

Порівняйте з нулем число (**5.23–5.24**):

5.23. 1) $\log_5 7$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 2$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}$; 4) $\log_{17} \frac{1}{2}$.

5.24. 1) $\log_7 \frac{1}{2}$; 2) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{9}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 19$; 4) $\log_{19} 18$.

Дослідіть функцію на монотонність (**5.25–5.26**):

5.25. 1) $y = \log_{\sqrt{7}-1} x$; 2) $y = \log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x$.

5.26. 1) $y = \log_{\sqrt{5}-2} x$; 2) $y = \log_{\sqrt{11}-\sqrt{2}} x$.

3 Порівняйте з одиницею число a, якщо (**5.27–5.28**):

5.27. 1) $\log_a 7 = 2,19$; 2) $\log_a 0,9 = -2,7$;
3) $\log_a 5 = -3,1$; 4) $\log_a 0,17 = 2,5$.

5.28. 1) $\log_a 5 = -12$; 2) $\log_a 0,8 = 7$;
3) $\log_a 13 = 2,7$; 4) $\log_a 0,19 = -2,7$.

5.29. Побудуйте графік функції $y = \log_2(x - 1)$ та запишіть її властивості.

5.30. Побудуйте графік функції $y = \log_3(x - 2)$ та запишіть її властивості.

5.31. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$ та запишіть її властивості.

5.32. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$ та запишіть її властивості.

Знайдіть найменше і найбільше значення даної функції на даному проміжку **(5.33–5.34)**:

5.33. $y = \log_{\frac{1}{4}} x,\ \ x \in \left[\frac{1}{4};\ 16\right]$.

5.34. $y = \log_{\frac{1}{3}} x,\ \ x \in \left[\frac{1}{9};\ 3\right]$.

Знайдіть, на якому проміжку функція **(5.35–5.36)**:

5.35. 1) $y = \log_3 x$ набуває найбільшого і найменшого значень, що дорівнюють відповідно 3 і -2;

2) $y = \log_{0,75} x$ набуває найбільшого і найменшого значень, що дорівнюють відповідно 0 і -1.

5.36. 1) $y = \log_2 x$ набуває найбільшого і найменшого значень, що дорівнюють відповідно 4 і -1;

2) $y = \log_{0,5} x$ набуває найбільшого і найменшого значень, що дорівнюють відповідно 0 і -2.

Між якими двома послідовними цілими числами міститься число **(5.37–5.38)**:

5.37. 1) $\log_2 17$; 2) $\log_3 0,41$; 3) $\lg 17$; 4) $\ln 8$?

5.38. 1) $\log_3 11$; 2) $\lg 1111$; 3) $\log_2 0,17$; 4) $\ln 2$?

Порівняйте числа **(5.39–5.40)**:

5.39. 1) $\log_3 4$ і 1; 2) $\log_\pi 3$ і 1; 3) 2 і $\log_3 8,5$; 4) $\log_2 3$ і $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$.

5.40. 1) $\log_8 7$ і 1; 2) $\log_\pi 3,5$ і 1; 3) 2 і $\log_3 10$; 4) $\log_2 5$ і $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}$.

Знайдіть область визначення функції **(5.41–5.44)**:

5.41. 1) $y = \log_2 \sin x$; 2) $y = \log_{0,1}(3 - x) + \sqrt{x - 2}$.

5.42. 1) $y = \log_{0,5} \cos x$; 2) $y = \log_5 (x - 2) + \sqrt{4 - x}$.

5.43. 1) $y = \sqrt{16 - x^2}\, \lg(x^2 - 5x + 6)$;

2) $y = \sqrt[6]{x^2 + x - 2}\, \log_{0,1}(9 - x^2)$;

3) $y = \log_x (x^2 + 3x + 2)$; 4) $y = \log_{-x}(x^2 + 2x - 3)$;

5) $y = \ln(4^{2x-1} - 2^{3x})$; 6) $y = \lg|x| + 2\log_5 (x^2 + 4x + 3)$;

7) $y = \ln(1 - x^3) + \log_5 |x + 2|$; 8) $y = \log_5 \sqrt[4]{x + 1} + \lg(1 - 8x^3)$.

5.44. 1) $y = \sqrt[8]{x^2 - 25}\, \log_{0,3}(42 + x - x^2)$;

2) $y = \sqrt{12 - x - x^2}\, \ln(x^2 - 4)$;

3) $y = \log_x (x^2 + 6x + 5)$; 4) $y = \log_{-x}(x^2 + x - 2)$;

5) $y = \log(3^{3x+1} - 9^x)$; 6) $y = \lg|x| + 3\log_7(4 - x^2)$;

7) $y = \log_{0,19}|x + 2| - 3\ln(8 - x^3)$;

8) $y = \log_9(8x^3 + 1) - \ln\sqrt[10]{1 - x}$.

Побудуйте графік функції (**5.45–5.48**):

5.45. 1) $y = \begin{cases} 4 - 4x, \text{ якщо } x < 1, \\ \log_2 x, \text{ якщо } x \geqslant 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x, \text{ якщо } 0 < x < 3, \\ x - 5, \text{ якщо } x \geqslant 3. \end{cases}$

5.46. 1) $y = \begin{cases} 4 - x, \text{ якщо } x < 5, \\ \log_{0,2} x, \text{ якщо } x \geqslant 5; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \log_3 x, \text{ якщо } 0 < x < 3, \\ 7 - x, \text{ якщо } x \geqslant 3. \end{cases}$

4 **5.47.** $y = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$. **5.48.** $y = 3 + \log_{\frac{1}{4}}(x + 1)$.

Знайдіть область визначення функції (**5.49–5.50**):

5.49. 1) $y = \log_{0,2}(1 - \cos x)$; 2) $y = \log_{x-1}(9 - x^2)$.

5.50. 1) $y = \log_5(1 + \sin x)$; 2) $y = \log_{x+1}(4 - x^2)$.

Розв’яжіть графічно рівняння (**5.51–5.52**):

5.51. 1) $\log_3 x = 1 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 5$.

5.52. 1) $\log_4 x = 5 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2 - 2x$.

Побудуйте графік функції (**5.53–5.54**):

5.53. 1) $y = 3^{\log_3(x+1)}$; 2) $y = 5^{\log_5(x^2-4)}$.

5.54. 1) $y = 4^{\log_4(x-1)}$; 2) $y = 7^{\log_7(1-x^2)}$.

Дослідіть функцію на монотонність (**5.55–5.56**):

5.55. 1) $y = \log_7(2x + 6)$; 2) $y = \log_{0,17}(4x + 3)$;

3) $y = \log_{2020}(4 - x)$; 4) $y = \log_{0,1}(1 - 2x)$.

5.56. 1) $y = \log_{0,7}(x - 5)$; 2) $y = \lg(2x + 5)$;

3) $y = \log_{0,12}(3 - x)$; 4) $y = \log_5\left(4 - \frac{1}{7}x\right)$.

Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція спадає на всій своїй області визначення (**5.57–5.58**):

5.57. 1) $y = \log_a(4x - 3)$; 2) $y = \log_{3-a}(2 - x)$.

5.58. 1) $y = \log_a(5x + 7)$; 2) $y = \log_{4-a}(3 - x)$.

5.59. Розташуйте числа $\log_3 2$; $\log_{0,3} 3$ і $\log_9 8$ у порядку спадання.

5.60. Розташуйте числа $\log_5 4$; $\log_{0,2} 5$ і $\log_{25} 2$ в порядку зростання.

Дослідіть функцію на парність (**5.61–5.62**):

5.61. 1) $y = \log_2|x - 1| + \log_2|x + 1|$; 2) $y = \log_{0,13}\left|\frac{x - 3}{x + 3}\right|$.

5.62. 1) $y = \log_3 |x| + \log_3 |x-1|$; 2) $y = \log_5 \left|\frac{x+2}{x-2}\right|$.

Знайдіть найбільше значення функції на даному проміжку **(5.63–5.64)**:

5.63. 1) $y = \log_4 \frac{1}{4^x+3}$; $x \in [0; 7]$; 2) $y = \log_{0,3} \frac{1}{5^x-24}$; $x \in [1; 3]$.

5.64. 1) $y = \log_{0,5} \frac{1}{2^x-3}$; $x \in [3; 5]$; 2) $y = \log_3 \frac{1}{3^x+6}$; $x \in [1; 13]$.

Знайдіть найменше значення функції **(5.65–5.66)**:

5.65. 1) $y = \log_2(x^4+64)$; 2) $y = \log_{0,5}(2\sqrt[3]{2} - |x|)$.

5.66. 1) $y = \log_3(x^2+9\sqrt{3})$; 2) $y = \log_{0,1}(1000 - x^4)$.

5.67. Знайдіть множину значень функції $y = 2 + 3\log_{0,5}(4x+12)$, визначеної на проміжку $[-1; 29]$.

5.68. Знайдіть множину значень функції $y = 1 - 2\log_{0,1}(4-x)$, визначеної на проміжку $[-96; 3]$.

Побудуйте графік функції **(5.69–5.70)**:

5.69. 1) $y = \log_2(|x|+1)$; 2) $y = \left|\log_{\frac{1}{3}}(x-3)\right|$;

3) $y = \log_{0,2}|x+1|$; 4) $y = |\log_5(5-x)|$.

5.70. 1) $y = \log_3(|x|+1)$; 2) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\right|$;

3) $y = \log_{0,5}|x+2|$; 4) $y = |\log_4(5-x)|$.

Розв'яжіть графічно рівняння **(5.71–5.72)**:

5.71. 1) $\lg_2|x| = 1 - x^2$; 2) $\log_{0,5} x = -\sqrt{5-x^2}$.

5.72. 1) $\log_{0,2}|x| = x^2 - 26$; 2) $\log_3 x = \sqrt{10-x^2}$.

Знайдіть кількість коренів рівняння **(5.73–5.74)**:

5.73. $||x|-1| + \log_3(|x|-2) = 0$. **5.74.** $x^2 - 2x - 3 - \log_2|1-x| = 0$.

5.75. Знайдіть усі значення параметра α, що належать проміжку $(2; 5)$, при кожному з яких існує хоча б одне значення x з проміжку $[2; 3]$, яке задовольняє рівняння $\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$.

5.76. Знайдіть усі значення параметра α, що належать проміжку $(2; 7)$, при кожному з яких існує хоча б одне значення x з проміжку $[1; 2]$, яке задовольняє рівняння

$$\log_3\left(1+\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{5\pi}{12}\right)\right)=|\cos\alpha x|-1.$$

5.77. Відомо, що однією цигаркою на день доросла людина вкорочує свій вік на 10 хв, а підліток – на 12 хв. На скільки вкоротить свій вік старшокласник Сергій Бовдуренко за місяць, у якому 22 навчальних дні, викурюючи по одній цигарці по дорозі до школи і на зворотному шляху?

5.78. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1973 р.*) Знайдіть усі значення x, де $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, що задовольняють рівняння $\cos^8 x+\sin^8 x=\frac{97}{128}$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 5

1. Укажіть функцію, графік якої паралельний графіку функції $y = 7x - 5$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -7x + 5$	$y=\frac{1}{7}x-5$	$y = -5$	$y = 7x + 2$	$y = 7$

2. Знайдіть корінь рівняння $0{,}2^{2x-1} = 0{,}008$.

А	Б	В	Г	Д
0	0,5	1	1,5	2

3. Знайдіть $y'(-2)$, якщо $y=\frac{x-2}{3+x}$.

А	Б	В	Г	Д
–2	–4	–5	5	1

4. Спростіть вираз $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)$.

А	Б	В	Г	Д
0	$2\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$2\sin\alpha$	$\sin\alpha+\cos\alpha$

5. (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 1$, $a_3 = 9$. Знайдіть a_2.

А	Б	В	Г	Д
5	3	3 або –3	5 або –5	–3

6. У коробці 6 білих кульок і кілька чорних. Скільки чорних кульок у коробці, якщо ймовірність того, що вибрана навмання кулька є білою, дорівнює 0,6?

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

7. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність	*Множина розв'язків*
1 $3^x \leqslant 27$	А $(-\infty; -3)$
2 $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 64$	Б $(-\infty; 3]$
3 $2^{x+1} \geqslant 16$	В $(-\infty; 3)$
4 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} > 1$	Г $(-3; +\infty)$
	Д $[3; +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть найбільше значення функції $y = \dfrac{1}{5\sin x + 7}$.

9. Обчисліть $\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\,\sqrt[6]{49-20\sqrt{6}}$.

§ 6. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

***Рівняння* називають *логарифмічним*, якщо змінна міститься під знаком логарифма.**

Логарифмічними, наприклад, є рівняння:
$\log_5 x = -1$; $\log_2 x + \log_4 x = 7$; $\lg(3 - x) = \lg(2 + x^2)$ тощо.

Розглянемо деякі види логарифмічних рівнянь та методи їх розв'язування.

1. Найпростіші логарифмічні рівняння

Найпростішим вважають логарифмічне рівняння вигляду

$$\log_a x = b.$$

Функція $y = \log_a x$ зростає або спадає на всій своїй області визначення, а тому кожного свого значення набуває лише один раз. Оскільки множиною значень функції $y = \log_a x$ є множина всіх дійсних чисел, то рівняння $\log_a x = b$ має єдиний корінь при будь-якому b, який можна знайти, використовуючи означення логарифма: $x = a^b$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

1) $\log_2 x = -3$; 2) $\log_5(x-1) = 2$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2) = 0$.

Р о з в ' я з а н н я.

1) $\log_2 x = -3$;

$x = 2^{-3}$;

$x = \frac{1}{8}$.

В і д п о в і д ь. $\frac{1}{8}$.

2) $\log_5(x-1) = 2$;

$x - 1 = 5^2$;

$x - 1 = 25$;

$x = 26$.

В і д п о в і д ь. 26.

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x) = 0$;

$x^2 - 2x = \left(\frac{1}{3}\right)^0$;

$x^2 - 2x - 1 = 0$;

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

В і д п о в і д ь. $1 \pm \sqrt{2}$.

2. Рівняння вигляду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Область допустимих значень змінної в рівнянні $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ знаходимо із системи нерівностей $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Оскільки функція $y = \log_a x$ — монотонна при $x > 0$ (зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$) і кожного свого значення набуває лише один раз, то на своїй ОДЗ рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Тоді можна дійти висновку, що рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Очевидно, що рівняння $f(x) = g(x)$ дає можливість вилучити із системи одну з нерівностей, $f(x) > 0$ або $g(x) > 0$, адже якщо за наявності цього рівняння справджується одна з них, автоматично справджуватиметься й інша нерівність.

Отже, остаточно отримаємо:

рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне кожній із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \textbf{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що з нерівностей $f(x) > 0$ або $g(x) > 0$ вибираємо ту, яку буде легше розв'язати. Якщо ж обидві нерівності є складними для розв'язання, то, розв'язавши рівняння $f(x) = g(x)$, вибираємо з отриманих коренів ті, що задовольнятимуть хоча б одну із цих нерівностей.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_2(x^2 + 2x - 7) = \log_2(x - 1)$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі:

$\begin{cases} x^2 + 2x - 7 = x - 1, \\ x - 1 > 0; \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x > 1. \end{cases}$

Розв'язавши рівняння $x^2 + x - 6 = 0$, матимемо: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$. Перший корінь задовольняє умову $x > 1$, а другий – ні. Отже, число 2 – єдиний корінь рівняння.

Відповідь. 2.

3. *Рівняння вигляду $\log_a f(x) = g(x)$*

Рівняння вигляду $\log_a f(x) = g(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = a^{g(x)}$. Зауважимо, що рівність $f(x) = a^{g(x)}$ означає, що $f(x) > 0$, тому розв'язувати нерівність $f(x) > 0$ для знаходження ОДЗ змінної в рівнянні немає потреби.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\log_3(9^x + 18) = x + 2$.

Розв'язання. Маємо рівняння, рівносильне даному:

$9^x + 18 = 3^{x+2}$, тобто $9^x - 3^2 \cdot 3^x + 18 = 0$.

Нехай $3^x = t$, $t > 0$, маємо рівняння: $t^2 - 9t + 18 = 0$, звідси $t_1 = 3$; $t_2 = 6$. Повертаємося до заміни: $3^x = 3$, тому $x = 1$; $3^x = 6$, тому $x = \log_3 6$. Але $\log_3 6 = \log_3(3 \cdot 2)$, тому $x = 1 + \log_3 2$.

Відповідь. 1; $1 + \log_3 2$.

4. *Зведення рівнянь до найпростіших за допомогою властивостей логарифмів*

Щоб звести логарифмічне рівняння, що не є найпростішим і містить два і більше логарифмів зі змінною, до найпростішого, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

1) Знайти область допустимих значень змінної в рівнянні.
2) За допомогою властивостей логарифмів звести рівняння до одного з видів, що ми розглянули вище.
3) Розв'язати отримане рівняння, перевірити належність отриманих коренів області допустимих значень змінної.
4) Записати відповідь.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\log_5(x - 3) + \log_5(x + 1) = 1$.

Розв'язання. 1) ОДЗ змінної в рівнянні знайдемо із системи нерівностей $\begin{cases} x - 3 > 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$ Маємо ОДЗ: $x > 3$.

2) Використовуючи властивість $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, перепишемо рівняння у вигляді $\log_5((x - 3)(x + 1)) = 1$.

3) На ОДЗ отримане рівняння рівносильне рівнянню $(x - 3)(x + 1) = 5^1$, спростивши яке, отримаємо квадратне рівняння: $x^2 - 2x - 8 = 0$ та його корені: $x_1 = -2$; $x_2 = 4$. Очевидно, що з них тільки число 4 належить ОДЗ. Відповідь. 4.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\frac{1}{2}\log_2(x+2)-\log_2(x-1)=1$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Область допустимих значень змінної в рівнянні знайдемо із системи $\begin{cases} x+2>0, \\ x-1>0. \end{cases}$ Маємо ОДЗ: $x>1$.

2) Помножимо обидві частини рівняння на 2, щоб позбутися дробових коефіцієнтів, отримаємо: $\log_2(x+2)-2\log_2(x-1)=2$. За властивістю $\log_a x^p = p\log_a x$ перепишемо рівняння у вигляді: $\log_2(x+2)-\log_2(x-1)^2=2$, а за властивістю $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ рівняння набуде вигляду: $\log_2\frac{x+2}{(x-1)^2}=2$.

3) Маємо: $\frac{x+2}{(x-1)^2}=2^2$. Перепишемо рівняння у вигляді: $4x^2-9x+2=0$ та знайдемо його корені: $x_1=2$; $x_2=\frac{1}{4}$. Області допустимих значень належить лише перший корінь – число 2.

В і д п о в і д ь. 2.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $2\log_3(x-1)+\log_3(x-3)^2=0$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Знайдемо ОДЗ змінної в рівнянні. Маємо: $\begin{cases} x-1>0, \\ x-3\neq 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x>1, \\ x\neq 3. \end{cases}$

2) Перепишемо рівняння у вигляді: $\log_3(x-1)^2+\log_3(x-3)^2=0$ та отримаємо рівняння-наслідок початкового рівняння: $\log_3((x-1)(x-3))^2=0$, звідки матимемо, що $((x-1)(x-3))^2=1$. Тоді:

$\left[\begin{array}{l} (x-1)(x-3)=1, \\ (x-1)(x-3)=-1, \end{array}\right.$ тобто $\left[\begin{array}{l} x^2-4x+2=0, \\ x^2-4x+4=0. \end{array}\right.$

Коренями першого рівняння з отриманої сукупності рівнянь є числа $2\pm\sqrt{2}$, з яких лише $2+\sqrt{2}$ належить ОДЗ. Коренем другого рівняння сукупності є число 2, яке теж належить ОДЗ.

В і д п о в і д ь. $2+\sqrt{2}$; 2.

5. Заміна змінної у логарифмічних рівняннях

Часто логарифмічне рівняння можна звести до алгебраїчного заміною змінної, наприклад $t=\log_a f(x)$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\log_4^2(x-1)+\log_4(x-1)-2=0$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $\log_4(x-1)=t$, маємо рівняння:

$t^2+t-2=0$, корені якого $t_1=1$ і $t_2=-2$.

Повертаємося до заміни:
1) $t = 1$, тоді $\log_4(x - 1) = 1$, тобто $x - 1 = 4^1$, отже, $x = 5$;
2) $t = -2$, тоді $\log_4(x - 1) = -2$, тобто $x - 1 = 4^{-2}$, отже, $x = 1\frac{1}{16}$.

Відповідь. 5; $1\frac{1}{16}$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\log_2 x + 3\log_x 2 = 4$.

Розв'язання. Оскільки $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то за умови $x > 0$, $x \neq 1$ рівняння набуде вигляду:

$$\log_2 x + 3 \cdot \frac{1}{\log_2 x} = 4.$$

Нехай $\log_2 x = t$, отримаємо рівняння $t + \frac{3}{t} - 4 = 0$, корені якого $t_1 = 1$; $t_2 = 3$.
Повертаємося до заміни:
1) $t = 1$, тоді $\log_2 x = 1$, отже, $x = 2$;
2) $t = 3$, тоді $\log_2 x = 3$, отже, $x = 8$.
Відповідь. 2; 8.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$.

Розв'язання. Зведемо всі логарифми в лівій частині рівняння до основи 9, отримаємо: $\frac{5\log_9 x}{\log_9 \frac{x}{9}} + \frac{\log_9 x^3}{\log_9 \frac{9}{x}} + \frac{8\log_9 x^2}{\log_9(9x^2)} = 2$.

Оскільки $x > 0$, то $\log_9 x^2 = 2\log_9 |x| = 2\log_9 x$. Маємо:

$$\frac{5\log_9 x}{\log_9 x - 1} + \frac{3\log_9 x}{1 - \log_9 x} + \frac{16\log_9 x}{1 + 2\log_9 x} = 2.$$

Нехай $\log_9 x = t$, маємо рівняння: $\frac{5t}{t-1} + \frac{3t}{1-t} + \frac{16t}{1+2t} = 2$.

Звідси $t_1 = 0,5$; $t_2 = 0,25$ (розв'яжіть рівняння самостійно).

Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \log_9 x = 0,5; \\ \log_9 x = 0,25. \end{array}\right.$

Тоді $\left[\begin{array}{l} x = 9^{0,5}, \\ x = 9^{0,25}, \end{array}\right.$ тобто $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{9}, \\ x = \sqrt[4]{9}. \end{array}\right.$ Отже, $\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = \sqrt{3}. \end{array}\right.$

Відповідь. 3; $\sqrt{3}$.

6. Метод логарифмування

Якщо обидві частини рівняння $f(x) = g(x)$ додатні, то, прологарифмувавши обидві його частини за основою a та врахувавши монотонність функції $y = \log_a x$ (як для $0 < a < 1$, так і для $a > 1$), отримаємо рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, рівносильне даному. При цьому основу a ($a > 0$; $a \neq 1$) вибираємо так, щоб отримати рівняння, менш складне за початкове.

Найчастіше метод логарифмування застосовують до рівнянь, що містять вирази вигляду $a^{\varphi(x)}$ та(або) $(h(x))^{\psi(x)}$, де $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ – деякі логарифмічні вирази.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $(\sqrt{x})^{\log_4 \sqrt{x} - 2} = 2^{3(\log_4 \sqrt{x} - 1)}$.

Розв'язання. Обидві частини рівняння додатні, тому можемо їх прологарифмувати. Очевидно, що логарифмувати доцільно за основою 4, хоча можна було і за основою 2, проте нам потрібно отримати якомога більш просте рівняння. Отже, маємо: $\log_4 (\sqrt{x})^{\log_4 \sqrt{x} - 2} = \log_4 2^{3(\log_4 \sqrt{x} - 1)}$, звідки, за властивостями логарифмів, отримаємо: $(\log_4 \sqrt{x} - 2) \log_4 \sqrt{x} = 3(\log_4 \sqrt{x} - 1) \cdot \log_4 2$. На перший погляд рівняння нібито стало громіздким, але його легко розв'язати заміною змінної.

Нехай $\log_4 \sqrt{x} = t$. Маємо рівняння: $(t-2)t = 3(t-1) \cdot 0,5$, після спрощення якого отримаємо квадратне рівняння $2t^2 - 7t + 3 = 0$, корені якого $t_1 = 3$; $t_2 = 0,5$.

Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \log_4 \sqrt{x} = 3, \\ \log_4 \sqrt{x} = 0,5. \end{array}\right.$ Тоді $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 4^3, \\ \sqrt{x} = 4^{0,5}; \end{array}\right.$ тобто $\left[\begin{array}{l} x = 4^6, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Відповідь. 4096; 4.

- Яке рівняння називають логарифмічним? • Як розв'язати рівняння вигляду $\log_a x = b$? • Як розв'язати рівняння вигляду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$? • Як розв'язати рівняння вигляду $\log_a f(x) = g(x)$? • Як звести рівняння до найпростішого? • Якою заміною змінної логарифмічне рівняння можна звести до алгебраїчного?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть рівняння (**6.1–6.10**):

6.1. 1) $\log_2 x = 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 0$; 3) $\log_5 x = -1$; 4) $\log_7 x = 2$.

6.2. 1) $\log_3 x = 2$; 2) $\log_7 x = 0$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = 1$; 4) $\log_6 x = -1$.

6.3. 1) $\log_2(x-1)=\log_2 17$; 2) $\log_{\frac{1}{8}}(x+3)=\log_{\frac{1}{8}}5$.

6.4. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=\log_{\frac{1}{3}}5$; 2) $\log_4(x-3)=\log_4 7$.

6.5. 1) $\log_{\frac{1}{4}}(x+5)=-2$; 2) $\log_2(3x-1)=3$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x)=-1$; 4) $\log_4(x^2+3x+1)=0$.

6.6. 1) $\log_{\frac{1}{5}}(x+2)=-1$; 2) $\log_3(5x+1)=2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x)=-2$; 4) $\log_5(x^2-4x+1)=0$.

2

6.7. 1) $\log_{\frac{1}{7}}(2x-3)=\log_{\frac{1}{7}}(3x-2)$;

2) $\log_5(x+1)=\log_5(3x+4)$;

3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-1)=\log_{\frac{1}{5}}(3x-3)$; 4) $\log_7(x^2+1)=\log_7(2x+7)$.

6.8. 1) $\log_{\frac{1}{8}}(2x+5)=\log_{\frac{1}{8}}(x+7)$; 2) $\log_{0,8}(x+2)=\log_{0,8}(2x+5)$;

3) $\log_4(x^2-4)=\log_4(5x-10)$;

4) $\log_{19}(x^2+4)=\log_{19}(x+4)$.

6.9. 1) $\log_3{}^2 x+2\log_3 x-3=0$; 2) $\log^2_{\frac{1}{7}} x-\log_{\frac{1}{7}} x-2=0$.

6.10. 1) $\log_5{}^2 x-2\log_5 x+1=0$; 2) $\log^2_{\frac{1}{2}} x-2\log_{\frac{1}{2}} x-3=0$.

Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій **(6.11–6.12)**:

6.11. $y=\log_2(x^2+7x)$ і $y=3$. **6.12.** $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+8x)$ і $y=-2$.

Знайдіть точку перетину графіків функцій **(6.13–6.14)**:

6.13. $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1$ і $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$.

6.14. $y=\log_5(x+4)$ і $y=\log_5(2x+3)$.

Розв'яжіть рівняння **(6.15–6.32)**:

6.15. 1) $\log_3 x^2+\log_3 x^3=10$; 2) $5\log_2\sqrt[5]{x}-\log_2 x^4=9$.

6.16. 1) $\log_2 x^7+\log_2 x=24$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x^4-7\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[7]{x}=12$.

6.17. 1) $\log^2_{0,25}(x^2+1)=1$; 2) $\log_2\dfrac{1}{|x-1|-1}=1$;

3) $\log_5(|x-3|-2)=-1$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_3(2^x-7)+1)=-1$.

6.18. 1) $\log_2^2(1+x^2)=9$; 2) $\log_2(|x+1|-2)=-2$;

3) $\log_3\dfrac{2}{|x+2|-3}=0$; 4) $\log_{0,5}(\log_2(3^x-7)+3)=-2$.

6.19. 1) $\log_x 3=2$; 2) $\log_{x+1} 2=2$.

6.20. 1) $\log_x 5=-1$; 2) $\log_{x-1} 3=2$.

6.21. 1) $\log_{0,25}(5\log_3 x-6)=-1$; 2) $\log_{16}(\log_2(\log_{\sqrt[8]{3}} x))=\dfrac{1}{2}$.

6.22. 1) $\log_2(3\log_2 x+1)=2$; 2) $\log_9(\log_2(\log_{\sqrt{3}} x))=\dfrac{1}{2}$.

3 **6.23.** 1) $2\log_8(x+1)=\log_8(4x+1)$;

2) $\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=\log_{\frac{1}{3}}(4x-3)$.

6.24. 1) $2\log_{\frac{1}{7}}(x-1)=\log_{\frac{1}{7}}(2x-3)$; 2) $\dfrac{1}{2}\log_7(x+1)=\log_7(8x+1)$.

6.25. 1) $\log_2(3\cdot 2^x-4)=x$; 2) $\log_7(7^{x-1}-42)=x-2$.

6.26. 1) $\log_3(4\cdot 3^x-27)=x$; 2) $\log_5(5^{x+2}-20)=x+1$.

6.27. 1) $\log_3(x+1)+\log_3(2x-1)=2$;

2) $\log_7(2x-1)=2\log_7 3-\log_7(x-4)$;

3) $\log_3(3-x)-1=2\log_3 2-\log_3(4-x)$;

4) $\log_2(2x-1)+\log_2(x+1)=\log_2(x+2)+2$.

6.28. 1) $\log_5(x-4)+\log_5(10-x)=1$;

2) $\log_2(x+2)+\log_2(x+3)=\log_2 3+1$;

3) $\lg(x-1)-2=\lg(2x-11)-\lg 50$;

4) $\log_3(x+3)+1=\log_3(3x-1)+\log_3(x+1)$.

6.29. 1) $\lg(x-1)^3=\lg 8+3\lg(x-3)$;

2) $\log_4\dfrac{x-2}{x+3}+\log_4(x-2)(x+3)=2$;

3) $\log_3\dfrac{x}{x+6}+3=\log_3 x^2$;

4) $\log_2(2-x)+2\log_2\sqrt{1-x}=\log_2 3+2$;

5) $2\log_2(x+6)=2+\log_2(x-4)^2$;

6) $1+\lg(1+x^2-2x)=\lg(1+x^2)+2\lg(1-x)$;

7) $\log_2(x+2)+\log_2(5x+6)=7$;

8) $\lg(\lg(x+1))+\lg 2=\lg(\lg(2x+1)$.

6.30. 1) $\lg(x+1)^5=\lg 32+5\lg(x-1)$;

2) $\log_2(x-1)(x+4)+\log_2\dfrac{x-1}{x+4}=2$;

3) $5-\log_2 x^2=\log_2\frac{x+4}{x}$;

4) $2\log_3\sqrt{3-x}+\log_3(5-x)=1$;

5) $2+\log_3(x-5)^2=2\log_3(x+3)$;

6) $2\lg(1-2x)+\lg(19+x^2)=2+\lg(1+4x^2-4x)$;

7) $\log_3(3x+6)+\log_3(5x-4)=4$;

8) $\lg(\lg(x+1))=\lg 2+\lg(\lg(x-1)$.

6.31. 1) $\log_7^2(x+1)-2\log_7(x+1)-3=0$;

2) $\log_2^2 x-\log_2 x^2-8=0$;

3) $\log_3^2(x+1)-12\log_3\sqrt[4]{x+1}=0$;

4) $\frac{4}{\log_2 x+1}-\frac{2}{3-\log_2 x}=1$.

6.32. 1) $\log_5{}^2(x-2)+3\log_5(x-2)-4=0$;

2) $\log_4{}^2 x-\log_4 x^3=0$;

3) $\log_4^2(x-1)-6\log_4\sqrt[3]{x-1}+1=0$;

4) $\frac{2}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_3 x-2}=1$.

6.33. Знайдіть цілі корені рівняння $\frac{2}{\log_7 x-1}-\frac{1}{\log_7 x-3}=3$.

Розв'яжіть рівняння (**6.34–6.43**):

6.34. 1) $\frac{3\log_3 x-7}{\log_3 x+5}=\frac{\log_3 x-3}{\log_3 x+2}$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{4}{2\lg x-\lg^2 x}=\frac{2}{2-\lg x}$;

3) $\log_5^2 x+2\sqrt{2}=3(2+\sqrt{2})\log_5\sqrt[3]{x}$;

4) $5-\log_7 x=4\sqrt{\log_7 x}$.

6.35. 1) $\frac{3\log_2 x-10}{\log_2 x+4}=\frac{\log_2 x-4}{\log_2 x+1}$;

2) $\frac{\log_3 x}{2\log_3 x-6}+\frac{9}{9-\log_3^2 x}=\frac{8}{2\log_3 x+6}$;

3) $2\lg^2 x+(1-\sqrt{2})\lg x^2=2\sqrt{2}$; 4) $4-\log_2 x=3\sqrt{\log_2 x}$.

6.36. 1) $\log_{\frac{1}{3}} x+2\log_x\frac{1}{3}=3$; 2) $\log_2 x+\log_x 2=2,5$;

3) $\log_7(x-1)-1=6\log_{x-1}7$; 4) $3\log_8(x+1)=8+3\log_{x+1}8$.

6.37. 1) $\log_5 x-3\log_x 5=2$; 2) $\log_3 x+1=2\log_x 3$;

3) $\log_2(x+3)+9\log_{x+3}2=10$;

4) $2\log_4(3x-2)+2\log_{3x-2}4=5$.

6.38. 1) $\log_3(6+3^x)=3-x$; 2) $\log_5(6-5^x)=1-x$;

3) $\log_7(6+7^{-x})=1+x$; 4) $\log_4(2^x+2)=x$.

6.39. 1) $\log_2(4+2^x)=5-x$; 2) $\log_4(5-4^x)=1-x$;
3) $\log_6(5+6^{-x})=x+1$; 4) $\log_9(3^x+6)=x$.

6.40. $\log_3(16^x-3)+\log_3(16^x-1)=1$.

6.41. $\log_2(9^x-1)+\log_2(9^x-2)=1$.

6.42. $\frac{1}{2}\log_7(3x-6)+\log_7 2=\log_7(x-2)$.

6.43. $\frac{1}{2}\log_3(3x+1)-\log_3 2=\log_3(x-3)$.

Скільки коренів має рівняння (**6.44–6.45**):

6.44. $\dfrac{\log_3(2x^2-x)}{\log_7(2x-1)}=0$? **6.45.** $\dfrac{\log_5(2x^2+x)}{\log_2(3-4x)}=0$?

Знайдіть множину коренів рівняння (**6.46–6.62**):

6.46. 1) $\sqrt{x+2}\cdot\log_5(x-1)=0$; 2) $\sqrt{x-3}\cdot\log_2(x+1)=0$.

6.47. 1) $\sqrt{x+2}\cdot\log_7(x+1)=0$; 2) $\sqrt{1-x}\cdot\log_5(x-2)=0$.

4 **6.48.** 1) $|x|\cdot\log_2 x=4x$; 2) $|x|\cdot\log_{\frac{1}{3}}(-x)=2x$.

6.49. 1) $\log_{-2x}(2x^2-x-1)=1$; 2) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$;
3) $\log_x(3x^2-x-3)=2$; 4) $2\log_{x-1}(x-3)=1$.

6.50. 1) $\log_{2x}(x^2+x-2)=1$; 2) $\log_{x+1}(x^2-3x+1)=1$;
3) $\log_{x-3}(4x-15)=2$; 4) $2\log_{8-x}(x-2)=1$.

6.51. 1) $2\log_2^2 x-3\log_2\frac{x}{4}-11=0$; 2) $\lg^2(10x)+\lg(10x)=6-3\lg\frac{1}{2}$;
3) $\log_2(2x)\cdot\log_2(0,5x)=3$; 4) $2\log_7(49x)+4\log_{49}^2 x=19$.

6.52. 1) $2\log_3^2 x-7\log_3(3x)+3=0$; 2) $\lg(100x)\lg x=-1$;
3) $\log_3(9x)\cdot\log_3(\frac{1}{9}x)=5$; 4) $4\log_{25}(5x)=5-\log_5^3 x$.

6.53. 1) $x^{\log_3 x}=81$; 2) $x^{\log_{0,5} x-2}=\frac{1}{8}$; 3) $0,1x^{\lg x-3}=1000$;
4) $27x^{\log_{27} x}=x^{\frac{10}{3}}$; 5) $(\sqrt[3]{x})^{\lg x}=10^{6+\lg x}$; 6) $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$.

6.54. 1) $x^{\log_{0,5} x}=\frac{1}{16}$; 2) $x^{\lg x-2}=1000$;
3) $x^{2-\frac{\log_4 x}{2}}=8$; 4) $x^{\lg^3 x-5\lg x}=0,0001$;
5) $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$; 6) $10^{\lg^2 x}+9x^{\lg x}=100$.

6.55. 1) $\log_{x^2+7x-3} x^2+\log_{x^2}(x^2+7x-3)-2=0$;
2) $\log_{x+1}(x-0,5)=\log_{x-0,5}(x+1)$;

3) $\log_{x-1}(x^2+x+1)=\log_{x^2+x+1}(x-1)$.

6.56. 1) $\log_{2x+1}(x+3)=2-\log_{x+3}(2x+1)$;

2) $\log_{2x-1}(2x-3)=\log_{2x-3}(2x-1)$.

6.57. 1) $\log_3^2 x\cdot\log_x\dfrac{27}{x}=-4$; 2) $\log_x 25+\log_{125x}5=\log_{25x}625$.

6.58. 1) $\log_x(125x)\cdot\log_{25}^2 x=1$; 2) $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_4 2$.

6.59. 1) $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}=(2x-3)^{\lg_{\frac{1}{16}}(9x-x^2+1)}$.

6.60. $\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}=(4x-3)^{\log_{\frac{1}{9}}(2+5x-x^2)}$.

6.61. $\sqrt[3]{4\log_4^2 x}-\sqrt[3]{\log_2 x}-2=0$.

6.62. $\log_{\sqrt{3}}^3 x+40\sqrt{\log_3^3 x}-48=0$.

Знайдіть усі корені рівняння (**6.63–6.64**):

6.63. 1) $\log_2\left(\cos 2x+\cos\dfrac{x}{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\sin x+\cos\dfrac{x}{2}\right)=0$;

2) $\log_5(3\sin x-\cos x)+\log_5\cos x=0$.

6.64. 1) $\log_{\frac{1}{3}}\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x\right)+\log_3\left(\sin\dfrac{x}{2}-\sin x\right)=0$;

2) $\log_7(3\cos x-\sin x)+\log_7\sin x=0$.

6.65. Знайдіть найменший корінь рівняння:

1) $\log_{1-2x^2}x=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}$;

2) $\log_{3x}\left(31x-\dfrac{3}{x}\right)=\dfrac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(3x)}+3$.

6.66. Знайдіть найбільший корінь рівняння:

1) $\log_{2x^2-1}\left(x^2-\dfrac{2}{3}\right)=2-\dfrac{1}{\log_3(2x^2-1)}$;

2) $3+\dfrac{1}{\log_{32}\dfrac{x}{2}}=\log_{\frac{x}{2}}\left(\dfrac{75x}{4}-\dfrac{11}{x}\right)$.

Розв’яжіть рівняння (**6.67–6.68**):

6.67. 1) $\lg^2(x+1)=\lg(x+1)\lg(x-1)+2\lg^2(x-1)$;

2) $\dfrac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^3-\log_3(5x-6)^3\log_3 x^6=-6\log_3^2\dfrac{1}{x}$.

6.68. 1) $\lg^2(4-x)+\lg(4-x)\lg(x+0,5)=2\lg^2(x+0,5)$;

2) $\frac{3}{2}\log_5^2(2x-3)^2+12\log_5^2\sqrt{x}=\log_5(2x-3)^3\log_5 x^3$.

6.69. Знайдіть множину коренів рівняння (**6.69–6.70**):

1) $\log_2 x\cdot\log_2(x-3)+1=\log_2(x^2-3x)$;

2) $x^2\log_2\frac{3+x}{10}-x^2\log_{0,5}(2+3x)=x^2-4+2\log_{\sqrt{2}}\frac{3x^2+11x+6}{10}$.

6.70. 1) $\lg(x-10)\lg(x+10)=\lg(x^2-100)-1$;

2) $x^2\log_{36}(5x^2-2x-3)-x\log_{\frac{1}{6}}\sqrt{5x^2-2x-3}=x^2+x$.

6.71. Прожитковий мінімум в Україні у грудні 2018 року становив 1921 грн на працездатну особу, 1626 грн – на дітей віком до 6 років і 2027 грн – на дітей віком від 6 до 18 років. Родина складається з 5 осіб: тато, мама, Катруся (4 роки) та школярі Марічка (13 років) та Сашко (8 років). Яким має бути дохід родини за грудень 2018 року, щоб він дорівнював:

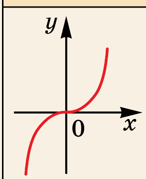
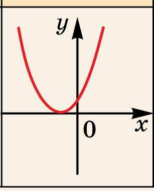
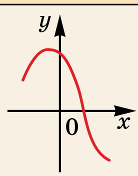
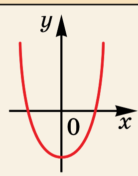
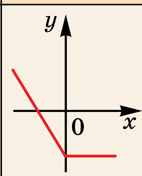
1) прожитковому мінімуму;
2) 1,5 прожитковим мінімумам;
3) 2 прожитковим мінімумам?

6.72. (*Національна олімпіада Угорщини*). Подайте вираз $((a-c)^2+(b-d)^2)(a^2+b^2)-(ad-bc)^2$ у вигляді добутку.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 6

1. Укажіть малюнок, на якому зображено графік парної функції.

А	Б	В	Г	Д
				

2. Скільки цілих розв'язків має нерівність $0,3^{x^2+x}>0,09$?

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	безліч

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 - 14t$ (t вимірюється в секундах, s – у метрах). У який момент часу тіло зупиниться?

А	Б	В	Г	Д
$t = 1$ с	$t = 7$ с	$t = 14$ с	$t = 18$ с	$t = 20$ с

4. Між якими послідовними цілими числами міститься число $\sqrt[3]{-7}$?

А	Б	В	Г	Д
1 і 2	0 і 1	–1 і 0	–2 і –1	–3 і –2

5. Обчисліть $\cos 240° + \sin 210°$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	–1	$-\sqrt{3}$

6. Перед початком футбольного матчу кожен з футболістів, яких у кожній з команд по 11, потиснув руки кожному зі своїх суперників та кожному з трьох суддів. Скільки всього було здійснено рукостискань?

А	Б	В	Г	Д
121	187	242	154	308

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та його розв'язками (А–Д).

Рівняння

1 $\mathrm{tg}\,x = -1$

2 $\mathrm{tg}\,x = 0$

3 $\mathrm{ctg}\,x = 1$

4 $\mathrm{ctg}\,x = 0$

Розв'язки рівняння

А $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

Б $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

В $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

Г $\pi k,\ k \in Z$

Д $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. За графіком потяг мав подолати перегон у 80 км за певний час, але оскільки вимушений був зменшити швидкість на 10 км/год, то подолав перегон на 24 хв повільніше, ніж передбачено графіком. Яка швидкість потягу (у км/год) за графіком?

9. Знайдіть у градусах найменший додатний корінь рівняння $\cos 2x - 5\cos x - 2 = 0$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. $\log_2 16 = \ldots$

А. 2 **Б.** 4 **В.** 8 **Г.** 14

2. Порівняйте числа a і b, якщо $\log_{0,7} a > \log_{0,7} b$.

А. $a > b$ **Б.** $a \geqslant b$ **В.** $a < b$ **Г.** $a = b$

3. Розв'яжіть рівняння $\log_{\frac{1}{8}} x = -2$.

А. $\frac{1}{8}$ **Б.** $\frac{1}{64}$ **В.** 8 **Г.** 64

2

4. Обчисліть: $\log_3 162 - \log_3 2$.

А. 81 **Б.** 27 **В.** 3 **Г.** 4

5. Укажіть область визначення функції $y = \log_3(4x - x^2)$.

А. $(0;\ 4)$ **Б.** $[0;\ 4]$ **В.** $(-4;\ 1)$ **Г.** $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

6. Укажіть множину коренів рівняння $\log_9(x^2 - 2) = \log_9(3x + 2)$.

А. $-1;\ 4$ **Б.** -1 **В.** $\varnothing$ **Г.** 4

3

7. Відомо, що $\log_3 2 = a$; $\log_3 5 = b$. Тоді $\log_3 200 = \ldots$

А. $3a - 2b$ **Б.** $2a + 3b$ **В.** $3a + 2b$ **Г.** $3a \cdot 2b$

8. Знайдіть усі корені рівняння $\log_3(24 + 3^x) = 4 - x$.

А. 1; 3 **Б.** 1; -3 **В.** 3 **Г.** 1

9. Розв'яжіть рівняння $\log_2(5 - x) + \log_2(x + 1) = 3$.

А. 1 **Б.** 3 **В.** $-1;\ -3$ **Г.** 1; 3

4

10. Знайдіть значення виразу $\log_5 3 \cdot \log_7 5 \cdot \log_9 7$.

А. $\frac{1}{2}$ **Б.** 2 **В.** $\frac{1}{3}$ **Г.** 3

11. $\log_2(2\,\mathrm{tg}\,15°) + \log_2(\cos^2 15°) = \ldots$

А. 0,5 **Б.** -1 **В.** $-0,5$ **Г.** 1

12. Розв'яжіть рівняння $\log_{-x}(2x^2 + 2x - 3) = 2$.

А. $-3;\ 1$ **Б.** -1 **В.** -3 **Г.** -2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 4–6

1

1. Обчисліть: 1) $\log_3 81$; 2) $0,9^{\log_{0,9} 7}$.

2. Порівняйте x і y, якщо:

1) $\log_7 x > \log_7 y$; 2) $\log_{0,5} x > \log_{0,5} y$.

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$;

2) $\log_7(x+5) = \log_7 8$.

2

4. Обчисліть:

1) $\frac{1}{2}\log_3 9 + \frac{1}{4}\log_2 16$; 2) $5^{1+\log_5 3}$;

3) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$; 4) $\log_4 48 - \log_4 3$.

5. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \lg(5x - x^2)$; 2) $y = \log_{0,1}(x-3) + \log_3(9-x)$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_5(x^2 - 1) = \log_5(2x+2)$;

2) $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0$.

3

7. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 4 - x, \text{ якщо } x < 3, \\ \log_3 x, \text{ якщо } x \geqslant 3. \end{cases}$

8. Знайдіть множину коренів рівняння:

1) $\log_2(x-1) + \log_2(2x+4) = 3$;

2) $\log_3(4 - 3^x) = 1 - x$.

4

9. Обчисліть:

1) $\log_7 16 \cdot \log_3 7 \cdot \log_2 3$;

2) $\lg\operatorname{ctg} 2° + \lg\operatorname{ctg} 88°$.

Додаткові завдання

3

10. Відомо, що $\log_5 2 = a$; $\log_5 3 = b$. Виразіть через a і b:

1) $\log_5 6$; 2) $\log_5 10$; 3) $\log_5 18$; 4) $\log_3 2$.

4

11. Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x(2x^2 - 4x - 5) = 2$;

2) $x^{\log_{\frac{1}{3}} x} = \frac{1}{81}$.

§ 7. ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ

Аналогічно до рівнянь *нерівність* називають *логарифмічною*, якщо змінна міститься під знаком логарифма.

Наприклад, логарифмічними є нерівності:

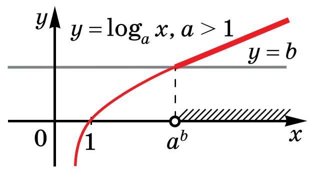
$\log_5 x > -1$; $\log_3(x + 1) + \log_3 x > 2$ тощо.

1. Найпростіші логарифмічні нерівності

Якщо нерівність має вигляд: $\log_a x > b$; $\log_a x < b$; $\log_a x \geqslant b$; $\log_a x \leqslant b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, b – число, то її вважають найпростішою.

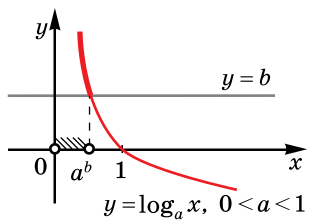
Розглянемо для прикладу нерівність $\log_a x > b$. Число b можна подати як $b = \log_a a^b$. Маємо: $\log_a x > \log_a a^b$.

Якщо $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ зростає (мал. 7.1) і більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу. Тому з нерівності $\log_a x > \log_a a^b$ випливає, що $x > a^b$. Оскільки $a^b > 0$ (для будь-яких $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in R$), то всі значення x, які задовольняють нерівність $x > a^b$, задовольняють також і нерівність $x > 0$, що є областю допустимих значень змінної в нерівності. Остаточно маємо розв'язок нерівності: $x > a^b$.



Мал. 7.1

Якщо $0 < a < 1$, то функція $y = \log_a x$ – спадає (мал. 7.2) і більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу. Тому з нерівності $\log_a x > \log_a a^b$ випливає нерівність $x < a^b$. Але в цьому випадку необов'язково всі значення x, які задовольняють нерівність $x < a^b$, задовольнятимуть також і умову $x > 0$, тобто область допустимих значень змінної в нерівності, тому розв'язки нерівності $\log_a x > \log_a a^b$ у випадку $0 < a < 1$ можна записати так: $0 < x < a^b$.



Мал. 7.2

Міркуючи аналогічно, розв'язують і нерівності вигляду $\log_a x < b$, $\log_a x \geqslant b$, $\log_a x \leqslant b$.

Отже, *під час розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей слід пам'ятати:*

1) *Якщо* $a > 1$, *то при переході від логарифмічної нерівності до нерівності, що не містить логарифма,* ***знак нерівності не змінюємо****; якщо ж* $0 < a < 1$, *то* ***знак нерівності змінюємо на протилежний****;*

2) *У разі, коли в нерівності, отриманій з логарифмічної, автоматично не справджуватиметься умова* $x > 0$, *то обов'язково враховуємо ОДЗ змінної в нерівності. Якщо ж умова* $x > 0$ *справджується автоматично, то звертати увагу на ОДЗ немає потреби.*

Міркуючи аналогічно, розв'язують і нерівність $\log_a f(x) > b$ та подібного їм вигляду.

Приклад 1. Розв'язати нерівність:

1) $\log_3 x > -1$;
2) $\log_7(x-2) < 2$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant -2$;
4) $\log_{0,2}(x+1) \leqslant -1$.

Розв'язання.

1) $\log_3 x > -1$;

$\log_3 x > \log_3 3^{-1}$;

$x > 3^{-1}$;

$x > \frac{1}{3}$.

Відповідь. $x > \frac{1}{3}$.

2) $\log_7(x-2) < 2$;

$\log_7(x-2) < \log_7 7^2$;

$0 < x - 2 < 7^2$;

$2 < x < 51$.

Відповідь. $2 < x < 51$.

3) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant -2$;

$\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

$0 < x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

$0 < x \leqslant 4$.

Відповідь. $0 < x \leqslant 4$.

4) $\log_{\frac{1}{5}}(x+1) \leqslant -1$;

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1) \leqslant \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$;

$x + 1 \geqslant 5$;

$x \geqslant 4$.

Відповідь. $x \geqslant 4$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{3} < 1$, то $\frac{3x-1}{x+2} > \left(\frac{1}{3}\right)^1$.

Розв'яжемо отриману нерівність:

$\frac{3x-1}{x+2} - \frac{1}{3} > 0$; $\frac{9x-3-x-2}{3(x+2)} > 0$; $\frac{8x-5}{x+2} > 0$.

Маємо: $x \in (-\infty; -2) \cup (0,625; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -2) \cup (0,625; +\infty)$.

Приклад 3. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 1}.$$

Р о з в ’ я з а н н я. Областю визначення функції є розв’язки нерівності: $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 1 \geqslant 0$, з якої маємо: $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \geqslant 1$, тобто $0 < \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$.

Маємо систему: $\begin{cases} x \neq 0, \\ \left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\right) \leqslant 0. \end{cases}$

Розв’яжемо її: $\begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(x-1)(3x+1)}{4(x+1)^2} \leqslant 0; \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x \neq 0, \\ -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

Отже, $x \in \left[-\frac{1}{3};\ 0\right) \cup (0;\ 1]$.

В і д п о в і д ь. $\left[-\frac{1}{3};\ 0\right) \cup (0;\ 1]$.

2. *Нерівності вигляду* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x)$

Область допустимих значень змінної кожної із цих нерівностей знаходимо із системи нерівностей: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Далі переходимо до нерівності між підлогарифмічними функціями з урахуванням залежності знаку нерівності від значення основи логарифма a.

Якщо $a > 1$, то знак нерівності не змінюється, і тому нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі умов: $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$

а нерівність $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x)$ – системі умов: $\begin{cases} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Оскільки в кожній із систем $g(x) > 0$, а $f(x) > g(x)$ (або $f(x) \geqslant g(x)$), то умова $f(x) > 0$ справджується автоматично, і її із системи можна вилучити.

Якщо $0 < a < 1$, то знак нерівності змінюється на протилежний, і тому нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$ а нерівність $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x)$ – системі $\begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Оскільки в кожній із систем $f(x) > 0$, а $g(x) > f(x)$ (або $g(x) \geqslant f(x)$), то умова $g(x) > 0$ справджується автоматично, і її із системи можна вилучити.

Узагальнимо метод розв'язання нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ у таблиці (нерівність $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x)$ розв'язується аналогічно):

Нерівність вигляду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$	
$0 < a < 1$	$a > 1$
Рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$ (*знак нерівності змінюється на протилежний*)	Рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$ (*знак нерівності не змінюється*)

Приклад 4. Розв'язати нерівність:

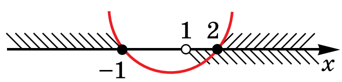
1) $\log_{0,5}(x-2) > \log_{0,5}(2x-3)$; 2) $\log_5(x^2-3) \geqslant \log_5(x-1)$.

Розв'язання. 1) Оскільки $0 < 0,5 < 1$, то при переході до підлогарифмічних функцій знак нерівності змінюємо на протилежний: $x - 2 < 2x - 3$. Крім того, врахуємо, що $x - 2 > 0$, тоді умова $2x - 3 > 0$ буде справджуватися автоматично. Отже, маємо: $\begin{cases} x-2 < 2x-3, \\ x-2 > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2, \end{cases}$ тобто $x > 2$.

2) Оскільки $5 > 1$, то при переході до підлогарифмічних функцій знак нерівності не змінюється: $x^2 - 3 > x - 1$. Крім того, врахуємо, що: $x - 1 > 0$, тоді умова $x^2 - 3 > 0$ буде справджуватися автоматично. Отже, маємо:

$\begin{cases} x^2 - 3 \geqslant x - 1, \\ x - 1 > 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geqslant 0, \\ x > 1. \end{cases}$

Маємо: $\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty), \\ x \in (1; +\infty). \end{cases}$



Мал. 7.3

Позначимо розв'язки кожної з нерівностей системи на числовій прямій відповідними проміжками та знайдемо їхній переріз (мал. 7.3). Отримаємо, що $x \geqslant 2$.

Відповідь. 1) $x > 2$; 2) $x \geqslant 2$.

3. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей

Для розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей можна використовувати ті самі прийоми, що й для розв'язування логарифмічних рівнянь і найпростіших логарифмічних нерівностей.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\log_2(x-1) + \log_2(x+5) < 4$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Область допустимих значень змінної в нерівності знайдемо із системи $\begin{cases} x-1>0, \\ x+5>0; \end{cases}$ звідки маємо: $x > 1$.

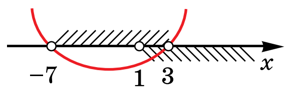
На ОДЗ отримаємо нерівність: $\log_2(x-1)(x+5) < 4$.

Оскільки $2 > 1$, переходимо до раціональної нерівності, не змінюючи знака нерівності: $(x-1)(x+5) < 2^4$.

Оскільки $x - 1 > 0$ і $x + 5 > 0$ (враховано в ОДЗ), то умова $(x-1)(x+5) > 0$ справджується автоматично.

Далі маємо: $x^2 + 5x - x - 5 < 16$, тобто $x^2 + 4x - 21 < 0$. Отже, $-7 < x < 3$.

А з урахуванням умови $x > 1$ (ОДЗ) остаточно отримаємо, що $1 < x < 3$ (мал. 7.4).



Мал. 7.4

В і д п о в і д ь. $1 < x < 3$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\log^2_{\frac{1}{3}} x - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3 \geqslant 0$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $\log_{\frac{1}{3}} x = t$.

Маємо нерівність: $t^2 - 2t - 3 \geqslant 0$, звідси $t \leqslant -1$ або $t \geqslant 3$ (розв'яжіть нерівність самостійно).

Повертаємося до заміни:

1) $t \leqslant -1$, тоді $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant -1$, тобто $x \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, отже, $x \geqslant 3$;

2) $t \geqslant 3$, тоді $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 3$, тобто $0 < x \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^3$, отже, $0 < x \leqslant \frac{1}{27}$.

Остаточно отримаємо, що $0 < x \leqslant \frac{1}{27}$ або $x \geqslant 3$.

В і д п о в і д ь. $\left(0; \frac{1}{27}\right] \cup [3; +\infty)$.

4. Розв'язування нерівностей, що містять змінну в основі логарифма

Для розв'язування нерівностей вигляду $\log_{f(x)} g(x) > b$ або $\log_{f(x)} g(x) < b$ треба розглянути два випадки для основи: $0 < f(x) < 1$ та $f(x) > 1$, тобто розв'язати сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < g(x) < f^b(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > f^b(x) \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > f^b(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < g(x) < f^b(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Зауважимо, що дві системи кожної сукупності можна замінити однією, їм рівносильною:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (f(x)-1)(g(x)-f^b(x)) > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (f(x)-1)(g(x)-f^b(x)) < 0. \end{cases}$$

Цей самий підхід застосовують і для розв'язування нерівностей вигляду $\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x)$ або $\log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} h(x)$, у тому числі і у випадку нестрогої нерівності.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\log_x \dfrac{8-12x}{x-6} > 2$.

Розв'язання. Якщо $0 < x < 1$, то $0 < \dfrac{8-12x}{x-6} < x^2$.

Якщо $x > 1$, то $\dfrac{8-12x}{x-6} > x^2$. Маємо сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < \dfrac{8-12x}{x-6} < x^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{8-12x}{x-6} > x^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо її:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{2}{3} < x < 6, \\ \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x-6} > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x-6} < 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{2}{3} < x < 1, \\ \dfrac{(x-2)^3}{x-6} > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{(x-2)^3}{x-6} < 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{2}{3} < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 6; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ 2 < x < 6; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{3} < x < 1, \\ 2 < x < 6. \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left(\dfrac{2}{3}; 1\right) \cup (2; 6)$.

Зауважимо, як зазначено вище, що замість сукупності двох систем, можна було розв'язати лише одну систему нерівностей:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{8-12x}{x-6} > 0, \\ (x-1)\left(\dfrac{8-12x}{x-6} - x^2\right) > 0. \end{cases}$$

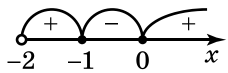
5. Розв'язування логарифмічних нерівностей методом інтервалів

Оскільки метод інтервалів є універсальним для розв'язування нерівностей, то його можна використовувати і для розв'язування логарифмічних нерівностей.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $(x^2+4x)\log_5(x+2) \geqslant 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = (x^2+4x)\log_5(x+2)$. Очевидно, що $D(f) = (-2; +\infty)$.

Знайдемо нулі функції. Маємо: $\left[\begin{array}{l} x^2+4x=0; \\ \log_5(x+2)=0. \end{array}\right.$ Корені першого рівняння: $x_1 = -4$; $x_2 = 0$, проте лише число 0 належить $D(f)$. Коренем другого рівняння є число -1. Отже, нулями функції $f(x)$ є числа -1 і 0. Позначимо їх на області визначення функції та з'ясуємо знак функції на кожному з отриманих інтервалів (зробіть це самостійно, результат на мал. 7.5).



Мал. 7.5

Отже, $x \in (-2; -1] \cup [0; +\infty)$.

Відповідь. $(-2; -1] \cup [0; +\infty)$.

- Які нерівності називають логарифмічними? • Як розв'язати нерівність вигляду $\log_a x > b$, якщо $a > 1$, і як, якщо $0 < a < 1$? • Як розв'язати нерівність вигляду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $a > 1$, і як, якщо $0 < a < 1$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть нерівність (7.1–7.14):

7.1. 1) $\log_5 x > \log_5 7$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 3$; 4) $\log_7 x > \log_7 9$.

7.2. 1) $\log_6 x \geqslant \log_6 8$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 5$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 5$; 4) $\log_8 x < \log_8 7$.

7.3. 1) $\log_2 x < 0$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} x \leqslant -1$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} x > 3$; 4) $\log_6 x \geqslant 1$.

7.4. 1) $\log_7 x \leqslant 1$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} x < -1$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} x \geqslant 0$; 4) $\log_4 x > -2$.

2 **7.5.** 1) $\log_4(x-1) \geqslant 2$; 2) $\log_7(x+1) < -1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -3$; 4) $\log_{0,1}(x-2) \leqslant 2$.

7.6. 1) $\log_5(x+1)>1$; 2) $\log_4(x-5)\leqslant 2$;
3) $\log_{0,5}(x-5)\geqslant -2$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x+7)<1$.

7.7. 1) $\log_5(x+1)>\log_5(3-x)$; 2) $\log_{\frac{1}{7}}(x-2)>\log_{\frac{1}{7}}(2x-6)$.

7.8. 1) $\log_7(5-x)<\log_7(3+x)$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)<\log_{\frac{1}{2}}(x+5)$.

7.9. 1) $\log_2 x\geqslant \log_2 6+\log_2 3$; 2) $\log_3 x<\log_3 18-1$;
3) $\log_{0,5} x>\log_{0,5} 3+\log_{0,5} 2$; 4) $\log_{\frac{1}{8}} x\leqslant \log_{\frac{1}{8}} 7+1$.

7.10. 1) $\log_7 x\leqslant \log_7 x+1$; 2) $\log_2 x>\log_2 3+\log_2 15$;
3) $\log_{0,4} x<\log_{0,4} 2-1$; 4) $\log_{0,7} x\geqslant \log_{0,7} 3+\log_{0,7} 4$.

7.11. 1) $\log_5(26-3^x)>2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(3+5^x)\leqslant -3$.

7.12. 1) $\log_{\frac{1}{4}}(19-3^x)<-2$; 2) $\log_2(9-2^x)>3$.

7.13. 1) $\log_{\sqrt{2}-1}(3x-21)\leqslant \log_{\sqrt{2}-1}(21-7x)$;
2) $\log_{\pi-1}(4x+7)>\log_{\pi-1} 2x$.

7.14. 1) $\log_{\pi-3}(2x-17)\geqslant \log_{\pi-3}(x+3)$;
2) $\log_{1+\sqrt{2}}(4x+7)>\log_{1+\sqrt{2}}(x-2)$.

3 Знайдіть область визначення функції (**7.15–7.16**):

7.15. 1) $y=\sqrt{\log_2(x-1)}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}}$.

7.16. 1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_5(x+3)}}$; 2) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3)}$.

Розв’яжіть нерівність (**7.17–7.22**):

7.17. 1) $\log_3(x^2-2x)\leqslant 1$; 2) $\log_{0,5}(x^2-3x)<-2$;
3) $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2,5x)<-1$; 4) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7)<0$.

7.18. 1) $\log_3(x^2-8x)\geqslant 2$; 2) $\log_{0,2}(x^2+4x)>-1$;
3) $\log_6(x^2-3x+2)\geqslant 1$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6)\geqslant -3$.

7.19. 1) $\log_2(x+1)+\log_2 x\leqslant 1$; 2) $\log_3(x-1)+\log_3 x>\log_2 3+1$.

7.20. 1) $\log_2(x-2)+\log_2(x-1)>1$; 2) $\lg x+\lg(x+1)\leqslant \lg 3+1$.

7.21. 1) $\log^2_{0,5} x+\log_{0,5} x-2\geqslant 0$; 2) $\lg^2 x<4$;
3) $\log^2_{0,2} x+\log_{0,2} x>6$; 4) $2+\log_4 x\geqslant \log^2_4 x$.

7.22. 1) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 < 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x \geqslant 1$;

3) $\log_2^2 x \geqslant 4\log_2 x - 3$; 4) $\log_{0,5}^2 x + 2 < -3\log_{0,5} x$.

7.23. При яких значеннях x функція $y = \dfrac{\lg x - 2}{x^2 + 3}$ набуває додатних значень?

7.24. При яких значеннях x функція $y = \dfrac{\log_{0,1} x + 1}{x^2 + 5}$ набуває від'ємних значень?

Розв'яжіть нерівність (**7.25–7.30**):

7.25. 1) $\log_{0,1}(x^2 + 2x - 3) > \log_{0,1}(x - 1)$;

2) $2\log_5(x + 4) > \log_5(10x + 15)$.

7.26. 1) $\log_{0,9}(x^2 - 2x - 3) > \log_{0,9}(9 - x)$;

2) $2\log_3(x + 1) > \log_3(2x + 5)$.

7.27. 1) $|\lg x - 1| \leqslant 2$; 2) $|\log_{0,5} x - 3| > 1$.

7.28. 1) $|\log_{0,2} x + 1| \leqslant 1$; 2) $|\lg x - 2| > 3$.

7.29. 1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2$;

2) $2\log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}}\left(2^{x^2-1} - \dfrac{1}{4}\right) < \log_{\sqrt{2}} 31$.

7.30. 1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3^{x+2} - 9^x) > -6$;

2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(3^{x^2-4} - \dfrac{1}{9}\right) + 2\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3 \geqslant \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 80$.

Скільки цілих розв'язків має нерівність (**7.31–7.32**):

7.31. 1) $0,25\log_{\sqrt[4]{7}}(x + 6) \leqslant \log_7(6 - x^2)$;

2) $\log_5\left(-x^2 + \dfrac{10x}{9}\right)^{-1} + \log_{\frac{1}{5}} 9 \geqslant 0$.

7.32. 1) $\log_{0,2} x^2 \geqslant \log_5 \dfrac{1}{6 - x}$;

2) $0,5\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 6x + 24) \leqslant \log_{27}(2x + 9)^3$.

Розв'яжіть нерівність (**7.33–7.40**):

7.33. 1) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(10 - x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 4,5 - 1$;

2) $\log_5(x + 3) + \log_5(2x - 8) < 2\log_5 x$;

3) $\log_{0,2} x - \log_5(x - 2) < \log_{0,2} 3$;

4) $\log_3(x+2)(x+1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7.$

7.34. 1) $\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}(4-x)>-1;$ 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-0,5)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geqslant 1;$

3) $\lg x-\log_{0,1}(x-1)>\log_{0,1}0,5;$

4) $\log_{\frac{1}{7}}((x+2)(4-x))+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{7}}(4-x)>-2\log_{49}3.$

7.35. 1) $\log_{4x-1}3\leqslant 0;$ 2) $\log_{4-x}0,17>0;$

3) $\log_{x+2}5>0;$ 4) $\log_{x-1}16<2.$

7.36. 1) $\log_{2x+1}0,9>0;$ 2) $\log_{5-x}7\leqslant 0;$

3) $\log_{x-2}0,4<0;$ 4) $\log_{x+1}27<3.$

7.37. 1) $\log_{0,27}\frac{2x+3}{2x^2+3}>0;$ 2) $\log_2\frac{x}{x-1}\leqslant -1;$

3) $\log_8\frac{7x+1}{x+2}\leqslant 1;$ 4) $\log_{0,17}\frac{7}{3x-2}>\log_{0,17}\frac{4x}{3x-2}.$

7.38. 1) $\lg\frac{5-2x}{2x^2+5}<0;$ 2) $\log_{\frac{1}{4}}\frac{x-3}{x+3}\geqslant -\frac{1}{2};$

3) $\log_{0,5}\frac{3x+1}{x+1}\geqslant -1;$ 4) $\log_9\frac{4-x}{x-2}\leqslant \log_9\frac{1}{x-2}.$

4 **7.39.** 1) $\frac{1}{\log_5 x+1}\leqslant 1;$ 2) $\frac{1}{5-\log_{0,1}x}+\frac{2}{1+\log_{0,1}x}<1.$

7.40. 1) $\frac{2}{\log_{0,4}x}\geqslant 1;$ 2) $\frac{1}{\lg x}+\frac{1}{1-\lg x}<1.$

Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності (**7.41–7.42**):

7.41. $\log_{0,7}(x+1)+\log_{0,7}(5-x)\geqslant\log_{0,7}(x+7).$

7.42. $\log_8(x+2)+\log_8(6-x)\leqslant\log_8(x+8).$

Скільки цілих розв'язків має нерівність (**7.43–7.44**):

7.43. $\log_{\frac{1}{7}}\log_5(x^2-4)>0?$ **7.44.** $\log_{\frac{1}{9}}\log_4(x^2-5)\geqslant 0?$

Розв'яжіть графічно нерівність (**7.45–7.46**):

7.45. $\log_3 x<4-x.$ **7.46.** $\log_{0,5}x>x-3.$

Розв'яжіть нерівність (**7.47–7.54**):

7.47. 1) $\log_3(26+3^{-x})<x+3;$ 2) $2\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x+1}+2)>\log_{\frac{1}{5}}(13+x).$

7.48. 1) $\log_2(6+2^x)>4-x;$ 2) $\log_{17}(x+10)<2\log_{17}(1+\sqrt{x+5}).$

7.49. 1) $\log_{0,12}(x+3)+\log_{0,12}(2x-8)>2\log_{0,12}x;$

2) $\log_{47}(2x+3)+\log_{47}(x-2)\leqslant\frac{1}{2}\log_{47}x^2+\log_{47}(4x-9);$

3) $\log_7(x^3 - x^2 - x + 20) > \log_7(x + 2) + \log_7(x^2 - 2x + 4)$;

4) $\dfrac{1}{4}\lg(2x - 1) > 0,5 - \lg\sqrt[4]{x - 9}$.

7.50. 1) $\log_9(3x - 1) - \log_9(x - 1) > \log_9(x + 18) - \log_9(x + 2)$;

2) $\log_{0,11}(2x - 7) \leqslant 2\log_{0,11}(x + 1) - \log_{0,11}(x - 9)$;

3) $\log_9(x^2 + 2x + 4) + \log_9(x - 2) < \log_9(x^3 - x^2 + 4x - 3)$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) - \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 2) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

7.51. 1) $\log_2^2 x^2 - 15\log_2 2x + 11 < 0$;

2) $\log_{0,2}^2(x^2 + 2x + 1) - 31\log_{0,2}\dfrac{x + 1}{5} + 15 < 0$;

3) $\log_2 x \geqslant 2\log_x 2 - 1$; 4) $\log_{0,5} x + 2\log_x 2 \leqslant 1$.

7.52. 1) $2\log_5^2 x^2 + 5\log_5 25x - 8 \geqslant 0$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}^2(x^2 - 2x + 1) - 7\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) + 3 < 0$;

3) $\log_5 x + 2\log_x 5 \leqslant 3$; 4) $1 + 2\log_{0,2} x + \log_x 5 \leqslant 0$.

7.53. 1) $\log_{2x-3} x \geqslant 1$; 2) $\log_{x-9} 2 > \log_{\sqrt{x-9}} 2$;

3) $\log_{x-2}(2x - 3) > \log_{x-2}(24 - 6x)$; 4) $\log_x \dfrac{x + 3}{x - 1} > 1$.

7.54. 1) $\log_{x+2}(5 - x) < 1$; 2) $\log_{x-1} 9 \leqslant 1$;

3) $\log_{2x-1}(3x - 5) < \log_{2x-1}(15 - 7x)$; 4) $\log_x \sqrt{21 - 4x} > 1$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів **(7.55–7.56)**:

7.55. 1) $(4x^2 - 16x + 7)\log_2(x - 3) > 0$;

2) $x(x - 2)\log_{0,5} x^2 - 2\log_{0,5} x^8 \leqslant 0$.

7.56. 1) $(4x^2 - 8x - 5)\log_3(x + 1) < 0$; 2) $(x^2 - 3)\lg x^2 - x\lg x^4 \geqslant 0$.

Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності **(7.57–7.58)**:

7.57. $(2^x + 2^{3-x})^{2\log_2(x+3) - \log_2(x+9)} < 1$.

7.58. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$.

Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності **(7.59–7.60)**:

7.59. $\log_x 5 \cdot \log_{5x} 5 \cdot \log_5 625x < 1$.

7.60. $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$.

Розв'язіть нерівність **(7.61–7.64)**:

7.61. 1) $\dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geqslant 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$; 2) $7^{\frac{1}{4}\log_7^2 x} \leqslant \dfrac{1}{7}x^{\frac{2}{7}\log_7 x}$.

7.62. $3^{\frac{1}{4}\log_3^2 x} \leqslant \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}\log_3 x}$.

7.63. 1) $\log_{x^2+1}(9-x^2) \leqslant 1$; 2) $\log_{\frac{1}{x^2+2}}(4x^2-1) \geqslant -1$;

3) $\log_{x-1}\dfrac{3x-6}{2x-6} > 1$; 4) $2+\log_{2x-1}3 \leqslant \log_{2x-1}(8x^2-6)$;

5) $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$; 6) $\log_x(\log_3(9^x-6)) \geqslant 1$.

7.64. 1) $\log_{x^2+2}(4-x^2) \leqslant 1$; 2) $\log_{\frac{1}{x^2+1}}(9-x^2) \geqslant -1$;

3) $\log_x\dfrac{4x-10}{3x-3} < -1$; 4) $2+\log_{x-1}10 \leqslant \log_{x-1}(6x^2-15)$;

5) $\log_{x+3}(x^2-x) < 1$; 6) $\log_x \log_2(4^x-6) \leqslant 1$.

7.65. 1) Під час чищення зубів, ми зазвичай користуємося постійним потоком води з крану замість того, щоб набрати води у склянку. Так ми марно витрачаємо до 4 л води за хвилину. Скільки літрів води за місяць, у якому 30 днів, може заощадити родина з 5 осіб, кожен з яких чистить зуби двічі на день протягом 3 хв?

2) *Завдання-дослідження.* Дізнайтеся скільки коштує 1 м^3 води у вашій місцевості. Обчисліть скільки коштів заощадить ваша родина протягом року за умови ощадливого користування водою під час чищення зубів.

7.66. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1974 р.*) Нехай

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n},\quad n \in N.\ \text{Знайдіть } \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

7.67. Розв’яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} y-x=-5, \\ 2x+y=4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2y=6, \\ x+2y=2. \end{cases}$

7.68. Розв’яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x-y=8, \\ 3x+y=12. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ -9x+7y=23. \end{cases}$

Перевірте свою компетентність

Завдання № 7

1. Розв'яжіть рівняння $5^x = \frac{2\sqrt{5}}{10}$.

А	Б	В	Г	Д
−1,5	−0,5	0,5	1,5	інша відповідь

2. Обчисліть $\frac{1}{2}\log_3 9 - 3\log_8 16$.

А	Б	В	Г	Д
−5	−4	−3	−2	−1

3. Вартість телевізора «Альфа» перевищує вартість телевізора «Бета» на 150 %. У скільки разів телевізор «Альфа» дорожчий за телевізор «Бета»?

А	Б	В	Г	Д
у 1,5 раза	у 1,8 раза	у 2 рази	у 2,5 раза	у 2,8 раза

4. Укажіть корінь рівняння $\frac{4}{\operatorname{tg} x - 1} = 2$, який належить проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{arctg} 3$	$\operatorname{arcctg} 3$	$\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$	$\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$	серед варіантів (А–Г) такого кореня немає

5. Обчисліть похідну функції $f(x) = 2\cos x - 5\sin x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
3	−2	2	−7	−3

6. Обчисліть $\left(\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\right)^2 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$.

А	Б	В	Г	Д
−1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та його коренем (А–Д).

Рівняння	*Корінь рівняння*
1 $\log_4 x = \frac{1}{2}$	**А** 2
2 $\log_3(x+5) = 2$	**Б** 3
3 $\log_{\frac{1}{6}} x = -1$	**В** 4
4 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -2$	**Г** 5
	Д 6

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. У продажу білих троянд залишилося втричі більше, ніж жовтих. Визначте ймовірність того, що навмання вибрана флористкою троянда виявиться жовтою.

9. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{\sqrt[4]{a}-4}{\sqrt[4]{a}+4}+\frac{\sqrt[4]{a}+4}{\sqrt[4]{a}-4}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-16}{64+4\sqrt{a}}$, якщо $a = 2019$.

§ 8. СИСТЕМИ ПОКАЗНИКОВИХ І ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Для розв'язування систем показникових і логарифмічних рівнянь будемо використовувати відомі нам способи як розв'язування рівнянь, так і розв'язування систем рівнянь.

1. Спосіб підстановки

Якщо одне з рівнянь системи є лінійним з двома змінними або може бути зведене до такого, то в ньому доцільно одну зі змінних виразити через іншу і підставити отриманий вираз у друге рівняння системи.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\log_3 x - \log_3 y = 1,\\ x + y^2 = 4.\end{cases}$

Розв'язання. ОДЗ змінних у системі рівнянь: $x > 0$; $y > 0$. З першого рівняння системи маємо: $\log_3 \frac{x}{y} = 1$, тоді $\frac{x}{y} = 3$, отже, $x = 3y$.

Далі підставимо вираз $3y$ замість x у друге рівняння системи, матимемо: $3y + y^2 = 4$. Перепишемо рівняння у вигляді $y^2 + 3y - 4 = 0$ та знайдемо його корені: $y_1 = 1$; $y_2 = -4$. Другий корінь не задовольняє ОДЗ, отже, $y = 1$, тоді $x = 3$.

Відповідь. (3; 1).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2^{2x+y}=128, \\ \log_2(x+1)+\log_2 y=2. \end{cases}$

Розв'язання. З першого рівняння системи, що є найпростішим показниковим, маємо: $2x + y = 7$, тобто $y = 7 - 2x$. Використаємо вираз $y = 7 - 2x$ як підстановку у другому рівнянні. Отримаємо рівняння $\log_2(x + 1) + \log_2(7 - 2x) = 2$, яке рівносильне системі:

$$\begin{cases} x+1>0, \\ 7-2x>0, \\ \log_2\left((x+1)(7-2x)\right)=2, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} -1<x<3{,}5, \\ (x+1)(7-2x)=2^2. \end{cases}$$

З другого рівняння системи маємо: $2x^2 - 5x - 3 = 0$. Тоді $x_1 = 3$, $x_2 = -0{,}5$, обидва задовольняють умову $-1 < x < 3{,}5$. Тоді $y_1 = 7 - 2 \cdot 3 = 1$, а $y_2 = 7 - 2 \cdot (-0{,}5) = 8$.

Відповідь. (3; 1), (–0,5; 8).

2. Спосіб додавання Цей спосіб використовують, якщо в результаті почленного додавання відповідно лівих і правих частин рівнянь системи її вдається значно спростити або навіть звільнитися від однієї зі змінних.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_3(x+2)+2^y=6, \\ \log_3(x-4)-2^y=-3. \end{cases}$

Розв'язання. Додаючи почленно рівняння системи, отримаємо рівняння з однією змінною $\log_3(x + 2) + \log_3(x - 4) = 3$, коренем якого є число 7. Підставивши 7 замість x у перше рівняння початкової системи, матимемо: $\log_3 9 + 2^y = 6$, тоді $2^y = 4$, отже, $y = 2$.

Відповідь. (7; 2).

3. Метод почленного ділення Цей метод використовують, коли в результаті почленного ділення рівнянь системи отримаємо рівняння, що є більш простим, ніж кожне з рівнянь початкової системи.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 9(x^2 + y) = 6^{x^2-y}, \\ x^2 + y = 2^{x^2-y}. \end{cases}$

Розв'язання. Поділимо почленно перше рівняння системи на друге, отримаємо найпростіше показникове рівняння $9 = 3^{x^2-y}$, звідки $x^2 - y = 2$. Тоді з другого рівняння системи маємо, що $x^2 + y = 2^2$, тобто $x^2 + y = 4$. Отже, система набуває вигляду $\begin{cases} x^2 - y = 2, \\ x^2 + y = 4. \end{cases}$ Тоді, додаючи рівняння почленно, отримаємо: $\begin{cases} x^2 = 3, \\ y = 1. \end{cases}$ Отже, система має два розв'язки: $(\sqrt{3}; 1)$, $(-\sqrt{3}; 1)$.

Відповідь. $(\sqrt{3}; 1)$, $(-\sqrt{3}; 1)$.

4. Метод логарифмування

Іноді, щоб спростити одне або обидва рівняння системи, доцільно їх прологарифмувати.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y = 1 + \log_3 x, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$

Розв'язання. Прологарифмуємо друге рівняння системи за основою 3. Маємо: $\log_3 x^y = \log_3 3^{12}$, тобто $y \cdot \log_3 x = 12$. Перепишемо перше рівняння початкової системи у вигляді $\log_3 x = y - 1$ і підставимо вираз $y - 1$ замість $\log_3 x$ в отримане вище рівняння $y \cdot \log_3 x = 12$. Отримаємо: $y(y - 1) = 12$. Маємо квадратне рівняння $y^2 - y - 12 = 0$, корені якого $y_1 = -3$; $y_2 = 4$. Далі підставимо знайдені значення y в перше рівняння системи:

1) Якщо $y_1 = -3$, то $-3 = 1 + \log_3 x$, тобто $\log_3 x = -4$, звідки $x = 3^{-4}$, отже, $x_1 = \dfrac{1}{81}$.

2) Якщо $y_2 = 4$, то $4 = 1 + \log_3 x$, тобто $\log_3 x = 3$, звідки $x = 3^3$, отже, $x_2 = 27$.

Відповідь. $\left(\dfrac{1}{81}; -3\right)$, $(27; 4)$.

5. Заміна змінної

Метод заміни змінної використовують також і для розв'язування систем показникових і логарифмічних рівнянь.

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

Розв'язання. З першого рівняння системи та властивостей логарифма маємо: $\log_y x + \dfrac{1}{\log_y x} = 2$.

Нехай $\log_y x = t$. Рівняння набуває вигляду: $t + \dfrac{1}{t} = 2$, корінь якого $t = 1$. Тоді $\log_y x = 1$, а це означає, що $x = y$. Отже, початкова система буде рівносильна такій:

$$\begin{cases} x = y, \\ y > 0, \\ y \neq 1, \\ x^2 - y = 20, \end{cases} \text{ з якої маємо: } \begin{cases} x = y, \\ y > 0, \\ y \neq 1, \\ y^2 - y - 20 = 0, \end{cases} \text{ отже, } \begin{cases} x = 5, \\ y = 5. \end{cases}$$

Відповідь. $(5; 5)$.

Під час розв'язування систем рівнянь досить часто доводиться комбінувати кілька методів розв'язування.

6. Розв'язування систем показникових і логарифмічних нерівностей з однією змінною

Нагадаємо, що розв'язком системи нерівностей є переріз розв'язків нерівностей системи. При цьому для розв'язування нерівностей системи використовуємо прийоми, вивчені нами раніше.

Приклад 7. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 2^{x-1} \geqslant 8, \\ \log_3(x+2) < 2. \end{cases}$

Р о з в ' я з а н н я. Маємо: $\begin{cases} x-1 \geqslant 3, \\ 0 < x+2 < 3^2. \end{cases}$ Отже, $\begin{cases} x \geqslant 4, \\ -2 < x < 7, \end{cases}$ тобто $x \in [4; 7)$.

В і д п о в і д ь. $[4; 7)$.

- Як можна розв'язувати системи показникових та логарифмічних рівнянь? • Як розв'язати систему логарифмічних та показникових нерівностей?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2 Розв'яжіть систему рівнянь **(8.1–8.6)**:

8.1. 1) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7, \\ 2^x - 3^y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_5 y = 3, \\ \log_3 x - \log_5 y = 1. \end{cases}$

8.2. 1) $\begin{cases} 5^x + 3^y = 14, \\ 5^x - 3^y = -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x - \log_3 y = 3, \\ \log_2 x + \log_3 y = -1. \end{cases}$

8.3. 1) $\begin{cases} 4^{x-y} = 128, \\ 5^{3x+2y-3} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{6x-2y} = 4^{x+y+10}, \\ 3^{x^2} = 3^{11+y}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 5^{x+y} = 25; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 2 + y, \\ 3^{x^2+y} = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$

8.4. 1) $\begin{cases} 2^{x+y} = 64, \\ 3^{2x-y+1} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7^{2x+y} = 49^{x+y-1}, \\ 4^{x^2} = 4^{y-1}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 2 + 3y, \\ 2^{2x-y} = 0,5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ 2^{x-2y} = 16. \end{cases}$

8.5. 1) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 2, \\ x - 10y = 900; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4, \\ 2\lg x - \lg y + \lg 2 = 0. \end{cases}$

8.6. 1) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4, \\ \log_4(x + y) = 1,5. \end{cases}$

Розв'яжіть систему нерівностей **(8.7–8.8)**:

8.7. 1) $\begin{cases} 3^{x+3} < 9, \\ |x| < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{x+1} \geqslant 8, \\ \log_5(x - 1) > 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4^{x+2} \leqslant 16, \\ \log_7(x + 1) < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5^x > 125, \\ \lg(2x - 1) < 1. \end{cases}$

8.8. 1) $\begin{cases} 2^{x+2} > 16, \\ |x| > 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{x-1} \leqslant 9, \\ \log_7(x + 1) < 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5^{x-1} < 25, \\ \log_9(x - 2) < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4^x \geqslant 64, \\ \lg(2x + 1) < 2. \end{cases}$

3 Розв'яжіть систему рівнянь **(8.9–8.14)**:

8.9. 1) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{2x} - 5^y = 8, \\ 3^x - 5^{\frac{y}{2}} = 2. \end{cases}$

8.10. 1) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7. \end{cases}$

8.11. 1) $\begin{cases} 2^{2\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 16, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{5}}(x + y) = 2, \\ 3^{-x} \cdot 2^y = 1152. \end{cases}$

8.12. 1) $\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x + y)^2 - \lg x = 2\lg 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases}$

8.13. 1) $\begin{cases} 4^x \cdot 7^y = 196, \\ 7^x \cdot 4^y = 112; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5^x \cdot 4^y = 400, \\ 2^x \cdot 25^y = 2500. \end{cases}$

8.14. 1) $\begin{cases} 5^x \cdot 6^y = 150, \\ 6^x \cdot 5^y = 180; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 192, \\ 2^x \cdot 9^y = 1458. \end{cases}$

Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей **(8.15–8.16)**:

8.15. 1) $\begin{cases} \log_{0,7}(2x + 3) < \log_{0,7}(x - 2), \\ \lg(3x - 1) \leqslant \lg(9x + 4); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x^2 \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 28 - \log_{\frac{1}{3}} 7, \\ \log_5(4x - 1) > 0. \end{cases}$

8.16. 1) $\begin{cases} \lg(6x - 1) \leqslant \lg(9x + 11), \\ \log_{0,3}(3x - 1) < \log_{0,3}(4x - 1); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_5 x^2 > \log_5 32 - \log_5 2, \\ \log_{0,9}(x - 1) < 0. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь (**8.17–8.28**):

8.17. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2, \\ x + 2y = 51. \end{cases}$

8.18. 1) $\begin{cases} 3x + y = 30, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 3, \\ 2x + 5y = 52. \end{cases}$

8.19. 1) $\begin{cases} 5^x + 2^y = 7, \\ 5^x \cdot 2^y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9^x + 4^y - 2^y = 7 \cdot 3^x - 10, \\ 3^x - 2^y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3^x + 2^{x+y+1} = 19, \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 1. \end{cases}$

8.20. 1) $\begin{cases} 3^x + 4^y = 7, \\ 3^x \cdot 4^y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x - 2^y = 2, \\ 2^{2y+1} + 3^x + 2^{y+2} = 4 + 3^{2x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x + 2^y = 11, \\ 3^{x-1} - 2^{y+1} = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5^x - 2^{x+y+1} = -7, \\ 5^{x+1} - 2^{x+y} = 1. \end{cases}$

8.21. 1) $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4^{\log_2(x^2+y^2)} = 36, \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_4 5. \end{cases}$

8.22. 1) $\begin{cases} 3^{x^2+y^2} = 81, \\ \log_2 x + 2\log_4 y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3\log_{27} x + 2\log_9 y = 3\log_3 2, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

8.23. 1) $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 5, \\ \lg x - \lg y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y + 1 = 3x, \\ 7^{y-4x+1} + 6 = 7^{y-2x+2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^{x+1} \cdot 9^{3y-2} = 9, \\ \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(y + \dfrac{1}{9}\right) = 4 - 2\log_3(1 + x); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ \log_5 x + 2\log_5 \sqrt{y} = 2. \end{cases}$

8.24. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 9^y = 27, \\ \lg(2x + y)^2 - \lg x = 2\lg 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2y, \\ \log_5(2y + x) + \log_5(x - y + 1) = \log_5(y + 1). \end{cases}$

8.25. 1) $\begin{cases} 2^x \cdot 0{,}25^{-y} = 512, \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{x+2y} = 6 + \sqrt{2x + y}, \\ 3\sqrt{2x + y} = 2^{x+2y} - 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6^{2x} = 12 - y \cdot 6^x, \\ y^2 + 8 + y \cdot 6^x = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6\sin x + 7\log_y 3 = -10, \\ -5\sin x + 2\log_y 3 = 0{,}5. \end{cases}$

8.26. 1) $\begin{cases} 9^x \cdot 3^{y-3} = 729, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x+y} = 4 + \log_2 x^2, \\ \log_2 x^2 = 6 - 2\sqrt[3]{x+y}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7^{2y} = 28 + x \cdot 7^y, \\ x^2 + 12 - x \cdot 7^y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3\cos x - 7\log_y 3 = 5, \\ 4\cos x + 5\log_y 3 = -0,5. \end{cases}$

4 **8.27.** $\begin{cases} \log_9 x^2 + \log_3(x-y) = 1, \\ \log_2 y = \log_4(xy-2). \end{cases}$

8.28. $\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_2 5 = \log_2(xy) - \log_2 6, \\ \log_5(y+6) = \log_5 y + \log_5 6 + \log_5 x. \end{cases}$

Розв'яжіть систему нерівностей **(8.29–8.30)**:

8.29. $\begin{cases} \log_{0,15}(x^2 - 12) < \log_{0,15}(-x), \\ 3^{x-1} > \dfrac{1}{27}. \end{cases}$

8.30. $\begin{cases} 2^{x^2-5x-4} < 4, \\ \log_{0,3}(x^2+3) \geqslant \log_{0,3}(4x). \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь **(8.31–8.37)**:

8.31. 1) $\begin{cases} y - \log_4 x = 1, \\ x^y = 4^6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{y-x}(x+y) = 1, \\ (x+y)^{x-y} = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (5x+y) \cdot 3^{x+y} = \dfrac{7}{3}, \\ x + y = -\log_7(5x+y); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5\left(y-\frac{x}{3}\right)}, \\ x^3 = y^{-1}. \end{cases}$

8.32. 1) $\begin{cases} y - 2 = \log_3 x, \\ x^y = 3^{24}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{-x-y}(x-y) = 1, \\ (x-y)^{x+y} = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (2x-y)2^{x+2y} = 14, \\ \log_7(2x-y) = x + 2y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} = x^{-1}, \\ (xy)^x \cdot x^{-y} = y^{\frac{28x-7y}{2}}. \end{cases}$

8.33. 1) $\begin{cases} \log_x y - 2\log_y x = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2,5, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - 2y = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy^2 = 243, \\ \log_{\frac{1}{y}} x - 2\log_{x^2} y = -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

8.34. 1) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2,5, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_y x - 2\log_x y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = -2, \\ x^2 - \dfrac{1}{y} = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 12, \\ 2\log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

8.35. $\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$

8.36. $\begin{cases} \log_2^2 y + \log_2 x \log_2 y - 2\log_2^2 x = 0, \\ 9x^2y - xy^2 = 1. \end{cases}$

8.37. $\begin{cases} 2\log_3^2 x + \log_3 x \log_3 y - \log_3^2 y = 0, \\ xy + \dfrac{x^2}{y} = 28. \end{cases}$

Розв'яжіть систему нерівностей з двома змінними **(8.38–8.39)**:

8.38. $\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$ **8.39.** $\begin{cases} \log_{x-1}(5-y) < 0, \\ \log_{2-y}(4-x) < 0. \end{cases}$

Розв'яжіть систему **(8.40–8.41)**:

8.40. $\begin{cases} y^2 + 4 = 2^{x+1}, \\ y^2 \geqslant 4^{x-1}. \end{cases}$ **8.41.** $\begin{cases} y^2 \geqslant 9^{x-2}, \\ y^2 + 9 = 2 \cdot 3^{x-1}. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь **(8.42–8.43)**:

8.42. 1) $\begin{cases} (1 + 2\log_{|xy|} 2) \cdot \log_{x+y} |xy| = 1, \\ x - y = 2\sqrt{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + \log_2 y = y \cdot \log_2 3 + \log_2 x, \\ x\log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$

8.43. 1) $\begin{cases} \log_{|xy|}(x-y) = 1, \\ 2\log_5 |xy| \cdot \log_{|xy|}(x+y) = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x, \\ x\log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 y. \end{cases}$

8.44. За годину роботи автомобільного двигуна спалюється 200 л кисню. Добова норма, що необхідна для дихання однієї людини, – 80 л кисню. Скільки добових норм кисню щоденно спалюють 400 автомобілів мешканців деякого населеного пункту під час поїздки на роботу, якщо шлях кожного з них на роботу займає в середньому 30 хв?

8.45. Розв'яжіть нерівність $|x^3 + x^2 - 2x + 1| \geqslant |x^3 + 2x^2 - 3x - 1|$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

8.46. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $ax = 2$; 2) $(a-1)x = a^2 - 1$;
3) $(a^2 - 1)x = a - 1$; 4) $(a^2 - a)x = a^2 - 1$.

8.47. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $ax \geqslant 1$; 2) $ax \leqslant a$;
3) $(a-1)x > a^2 - 1$; 4) $(a^2 - 1)x < a - 1$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 8

1. Знайдіть таке натуральне одноцифрове число n, щоб сума $600 + n$ ділилася на 9 без остачі.

А	Б	В	Г	Д
1	3	5	7	9

2. Спростіть вираз $\frac{x^2-y^2}{x-y} - \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$.

А	Б	В	Г	Д
xy	$x + y$	$\frac{x+y}{xy}$	$xy(x + y)$	$\frac{xy}{x+y}$

3. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $64^x = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1]$	$\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$	$\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$	$\left(\frac{1}{4}; 1\right)$	$[1; +\infty)$

4. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt{x+1}}{2^x - 1}$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 0) \cup$ $\cup (0; +\infty)$	$(-1; 0) \cup$ $\cup (0; +\infty)$	$[-1; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$	$(-\infty; -1]$

5. Укажіть похідну функції $y = x^3 + 2\cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$y' = 3x^2 - 2\cos x$	$y' = x^2 + 2\sin x$	$y' = 3x^2 - 2\sin x$	$y' = 3x^2 + 2\sin x$	$y' = x^3 - 2\sin x$

6. Обчисліть $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{128}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та кількістю його коренів на проміжку [–4; 4] (А–Д).

Рівняння		*Кількість коренів на* [–4; 4]	
1	$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	**А**	жодного
2	$\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 0$	**Б**	один
3	$\log_2 x = -3$	**В**	два
4	$\cos^2 x - \sin^2 x = -1$	**Г**	три
		Д	чотири

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Запишіть у градусах найбільший від'ємний корінь рівняння $\sin 2x - \sin x = 0$.

9. Знайдіть значення виразу $\log_7 8 \cdot \log_9 7 \cdot \log_2 9$.

§ 9. ПОКАЗНИКОВІ І ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРОМ. СИСТЕМИ ЛОГАРИФМІЧНИХ ТА ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ

1. Показникові рівняння з параметром

Приклад 1. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння

$$3 \cdot 5^x + 27 = a + a \cdot 5^x.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді: $(3 - a)5^x = a - 27$.

Далі розглянемо два випадки.

1) Якщо $a = 3$, то рівняння набуде вигляду $0 \cdot 5^x = -24$. Коренів це рівняння не має.

2) Якщо $a \neq 3$, то рівняння набуде вигляду $5^x = \dfrac{a-27}{3-a}$ і матиме корінь за умови $\dfrac{a-27}{3-a} > 0$, тобто коли $a \in (3;\ 27)$. Тоді $x = \log_5 \dfrac{a-27}{3-a}$.

Якщо $a < 3$ або $a \geqslant 27$, то вираз $\dfrac{a-27}{3-a} \leqslant 0$, отже, рівняння $5^x = \dfrac{a-27}{3-a}$ коренів не має.

Відповідь. Якщо $a \leqslant 3$ або $a \geqslant 27$, коренів немає; якщо $3 < a < 27$, то $x = \log_5 \dfrac{a-27}{3-a}$.

2. Логарифмічні рівняння з параметром

Приклад 2. Для всіх додатних значень параметра a розв'язати рівняння $\lg 2x + \lg(2 - x) = \lg\lg a$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2x > 0, \\ 2 - x > 0, \\ \lg\big(2x(2 - x)\big) = \lg\lg a; \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} 0 < x < 2, \\ 2x(2 - x) = \lg a. \end{cases}$$

Оскільки $2x(2 - x) > 0$, то $\lg a > 0$, і тому $a > 1$.

Маємо: $\begin{cases} 2x^2 - 4x + \lg a = 0, \\ 0 < x < 2. \end{cases}$

Знайдемо дискримінант отриманого квадратного рівняння: $D = 16 - 8 \cdot \lg a$. Рівняння має корені, якщо $D \geqslant 0$, тобто якщо $16 - 8 \cdot \lg a \geqslant 0$, звідки $\lg a \leqslant 2$, отже, $a \leqslant 100$. Тоді за умови, що $1 < a \leqslant 100$, матимемо: $\begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 0{,}5\lg a}, \\ 0 < x < 2. \end{cases}$

Оскільки $1 < a \leqslant 100$, то $0 < \lg a \leqslant 2$. Ця нерівність рівносильна такій: $0 \leqslant 1 - 0{,}5\lg a < 1$, а значить, $1 \leqslant 1 + \sqrt{1 - 0{,}5\lg a} < 2$ і $0 < 1 - \sqrt{1 - 0{,}5\lg a} \leqslant 1$, тобто обидва корені x_1 і x_2 задовольняють умову $0 < x < 2$, а отже, є коренями початкового рівняння.

Відповідь. Якщо $0 < a \leqslant 1$ або $a > 100$, то коренів немає; якщо $1 < a \leqslant 100$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 0{,}5\lg a}$.

3. Показникові та логарифмічні нерівності з параметром

Приклад 3. Для всіх значень параметра a ($a > 0$, $a \neq 1$) розв'яжіть нерівність $x^{\log_a x + 4} < a^4 x$.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо два випадки:
1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$.
1) Нехай $a > 1$. Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою a, отримаємо нерівність:
$(\log_a x + 4)\log_a x < \log_a a^4 + \log_a x$.
Нехай $\log_a x = t$. Маємо нерівність: $t^2 + 3t - 4 < 0$, звідки $-4 < t < 1$, тобто $-4 < \log_a x < 1$.

Оскільки $a > 1$, то $a^{-4} < x < a^1$, отже, $\frac{1}{a^4} < x < a$.

2) Нехай $0 < a < 1$. Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою a та врахувавши, що $0 < a < 1$, матимемо:
$(\log_a x + 4)\log_a x > \log_a a^4 + \log_a x$.
Нехай $\log_a x = t$. Маємо нерівність: $t^2 + 3t - 4 > 0$, звідки $t < -4$ або $t > 1$. Тому $\log_a x < -4$ або $\log_a x > 1$.

Оскільки $0 < a < 1$, то $x > a^{-4}$ або $0 < x < a^1$, отже, $x > \frac{1}{a^4}$ або $0 < x < a$.

В і д п о в і д ь. Якщо $0 < a < 1$, то $x \in (0; a) \cup \left(\frac{1}{a^4}; +\infty\right)$; якщо $a > 1$, то $x \in \left(\frac{1}{a^4}; a\right)$.

Приклад 4. (*ЗНО*, 2018 р.) Розв'язати нерівність
$\frac{\log_a x}{x^2 + (a-4)x + 4 - 2a} \leqslant 0$ залежно від значень параметра a.

Р о з в ' я з а н н я. Зауважимо, що якщо $a \leqslant 0$ або $a = 1$, то нерівність не має змісту. Отримали ОДЗ параметра: $a > 0$, $a \neq 1$. Розв'яжемо нерівність для допустимих значень параметра методом інтервалів.

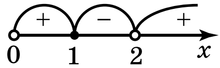
Нехай $f(x) = \frac{\log_a x}{x^2 + (a-4)x + 4 - 2a}$.

Для $D(f)$ маємо: $\begin{cases} x > 0; \\ x^2 + (a-4)x + 4 - 2a \neq 0. \end{cases}$

Рівняння $x^2 + (a-4)x + 4 - 2a = 0$ є квадратним для будь-якого значення a. Знайдемо дискримінант рівняння:
$D = (a-4)^2 - 4 \cdot (4 - 2a) = a^2$,
обчислимо корені: $x_1 = \frac{-(a-4) - a}{2} = 2 - a$; $x_2 = \frac{-(a-4) + a}{2} = 2$.
Отже, $D(f)$: $x > 0$; $x \neq 2 - a$; $x \neq 2$.
Знайдемо нулі функції $f(x)$. Маємо: $f(x) = 0$, якщо $\log_a x = 0$. Тоді $x = 1$, причому $1 \in D(f)$ для всіх допустимих значень параметра. Отже, $x = 1$ – нуль функції $f(x)$. Позначимо $D(f)$ та нулі функції на числовій осі, тобто позначимо на осі точку 1 та «порожні» точки $2 - a$ і 2. Але ми не знаємо, як саме на осі розташувати число $2 - a$ відносно початку від-

ліку (числа 0) та відносно чисел 1 і 2. Отже, слід розглянути всі можливі випадки розташування числа $2 - a$ на осі, а саме: 1) $2 - a \leqslant 0$; 2) $0 < 2 - a < 1$; 3) $2 - a = 1$; 4) $1 < 2 - a < 2$; 5) $2 - a = 2$; 6) $2 - a > 2$. Розглянемо кожний з них окремо, враховуючи ОДЗ параметра a.

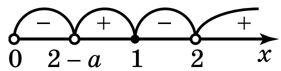
1) Маємо: $\begin{cases} 2 - a \leqslant 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$ звідси $a \geqslant 2$. Тоді $x \in [1; 2)$ (мал. 9.1).



Мал. 9.1

2) Маємо: $\begin{cases} 0 < 2 - a < 1, \\ a > 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$ звідси $1 < a < 2$.

Тоді $x \in (0; 2 - a) \cup [1; 2)$ (мал. 9.2).

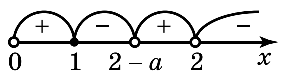


Мал. 9.2

3) Маємо: $\begin{cases} 2 - a = 1, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$ Система не має розв'язків, отже, для допустимих значень параметра a такий випадок неможливий.

4) Маємо: $\begin{cases} 1 < 2 - a < 2, \\ a > 0, \\ a \neq 1, \end{cases}$ звідси $0 < a < 1$.

Тоді $x \in [1; 2 - a) \cup (2; +\infty)$ (мал. 9.3).



Мал. 9.3

5) Маємо: $\begin{cases} 2 - a = 2, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$ Система не має розв'язків, отже, для допустимих значень параметра a такий випадок неможливий.

6) Маємо: $\begin{cases} 2 - a > 2, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$ Система не має розв'язків, отже, для допустимих значень параметра a такий випадок неможливий.

Усі випадки розглянуто, запишемо відповідь.

Відповідь. Якщо $0 < a < 1$, то $x \in [1; 2 - a) \cup (2; +\infty)$; якщо $1 < a < 2$, то $x \in (0; 2 - a) \cup [1; 2)$; якщо $a \geqslant 2$, то $x \in [1; 2)$.

4. Системи логарифмічних і показникових рівнянь з параметром

Приклад 5. При яких значеннях параметра a розв'язок системи

$$\begin{cases} \log_3 x + \frac{1}{a} \cdot 2^y = 3, \\ \log_3 x - \frac{1}{a} \cdot 2^y = -1 \end{cases}$$

задовольняє умову $x - y \geqslant 4$.

Розв'язання. ОДЗ параметра: $a \neq 0$. Додамо рівняння системи почленно, отримаємо рівняння: $2\log_3 x = 2$, звідки $x = 3$. Підставимо знайдене значення x у перше рівняння системи: $\log_3 3 + \frac{1}{a} \cdot 2^y = 3$, отримаємо рівняння: $\frac{1}{a} \cdot 2^y = 2$. На ОДЗ параметра рівняння набуде вигляду: $2^y = 2a$.

Якщо $a < 0$, то рівняння $2^y = 2a$ не має коренів.

Якщо $a > 0$, то $y = \log_2(2a)$, тобто $y = 1 + \log_2 a$.

Отже, $x = 3$, $y = 1 + \log_2 a$, тоді $x - y = 2 - \log_2 a$.

Знайдемо значення параметра a, для яких вираз $x - y$ задовольняє умову $x - y \geqslant 4$. Маємо рівняння: $2 - \log_2 a \geqslant 4$.

Тоді $\log_2 a \leqslant -2$, звідси $0 < a \leqslant 2^{-2}$, отже, $0 < a \leqslant 0,25$.

Відповідь. $0 < a \leqslant 0,25$.

- Поясніть, як розв'язано показникові і логарифмічні рівняння з параметрами у прикладах 1 і 2. • Поясніть, як розв'язано показникову і логарифмічну нерівності з параметром у прикладах 3 і 4. • Поясніть, як розв'язано систему, що містить показникові та логарифмічні рівняння з параметром у прикладі 5.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 При яких значеннях параметра a має корені рівняння **(9.1–9.2)**:

9.1. 1) $3^x = a$; 2) $0,1^{2x} = a - 2$; 3) $\sqrt[5]{10^x} = -a$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = a^2$?

9.2. 1) $5^x = a - 1$; 2) $0,5^{7x} = a$; 3) $\sqrt[3]{2^x} = \sqrt{a}$; 4) $0,13^x = a^4$?

2 Для кожного значення параметра a знайдіть кількість коренів рівняння **(9.3–9.4)**:

9.3. 1) $7^x = a + 1$; 2) $\left|3^x - 3\right| = a$; 3) $\log_5(2x - 4) = \log_5(a - 3x)$.

9.4. 1) $5^x = a$; 2) $\left|7^x + 7\right| = a$; 3) $\log_7(x - a) = \log_7(6 - x)$.

При яких значеннях параметра a нерівність справджується для всіх значень x **(9.5–9.6)**:

9.5. 1) $0,7^x > a$; 2) $-2^x \leqslant a$?

9.6. 1) $5^x > 0$; 2) $-\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant a$?

При яких значеннях параметра a рівняння **(9.7–9.8)**:

9.7. $\left|5^x + a\right| = 7$ має хоча б один корінь?

9.8. $\left|3^x - a\right| = 2$ має хоча б один корінь?

При яких значеннях параметра a розв'язок системи рівнянь **(9.9–9.10)**:

9.9. $\begin{cases} \log_2 x + \dfrac{1}{a} \cdot 3^y = 4, \\ \log_2 x - \dfrac{1}{a} \cdot 3^y = 2 \end{cases}$ задовольняє умову $y > 9 - x$?

9.10. $\begin{cases} \log_5 x + \dfrac{1}{a} \cdot 2^y = 3, \\ \log_5 x - \dfrac{1}{a} \cdot 2^y = 1 \end{cases}$ задовольняє умову $y \leqslant 29 - x$?

3

9.11. Знайдіть усі значення параметра a, при яких має хоча б один розв'язок рівняння:

1) $25^x - a \cdot 5^x + 3 - a = 0$; 2) $(a+1) \cdot 4^x + 4 \cdot 2^x + a - 2 = 0$.

9.12. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $(a-1)9^x - 4 \cdot 3^x + a + 2 = 0$ має хоча б один розв'язок.

При яких значеннях параметра a рівняння **(9.13–9.16)**:

9.13. $a + a \cdot 4^{x+2} = 27 + 48 \cdot 4^x$ не має розв'язків?

9.14. $25^x + 6a \cdot 5^x + 9 = 0$ не має розв'язків?

9.15. 1) $(x^2 - a^2)(5 - 25^x) = 0$ має рівно два корені;

2) $16^x - (20 + a) \cdot 4^x + 25a - 125 = 0$ має рівно один корінь?

9.16. 1) $(9^x - 5 \cdot 3^x + 4)(a - x) = 0$ має рівно два корені;

2) $25^x - (4 + 3a) \cdot 5^x + 12a = 0$ має рівно один корінь?

9.17. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність $a2^x \leqslant a^2$.

9.18. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність $a^2 2^x > a$.

Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння **(9.19–9.21)**:

9.19. $\log_5(x^2 - 2ax) = \log_5(2x - 4a)$.

9.20. $4^x - (2a + 1) \cdot 2^x + a^2 + a = 0$.

9.21. $9^x - (2a + 2) \cdot 3^x + a^2 + 2a = 0$.

Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність **(9.22–9.23)**:

9.22. 1) $(a^2 - 4) \cdot 3^x < a + 2$; 2) $5 \cdot 4^x + 4a \cdot 2^x - a^2 \leqslant 0$.

9.23. 1) $(a+1)2^x \geqslant a^2 - 1$; 2) $4^x - a \cdot 2^x - 2a^2 > 0$.

Розв'яжіть рівняння залежно від значень параметра a **(9.24–9.25)**:

9.24. 1) $\log_a(x - 2) = 1 + \log_a x$; 2) $\log_a(6 - x) + \log_a x = 2$.

9.25. 1) $\log_a(x + 6) - \log_a x = 1$; 2) $\log_a(4 - x) + \log_a x = 1$.

Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких будь-який розв'язок системи рівнянь **(9.26–9.27)**:

9.26. $\begin{cases} x - a^2 \log_5 y = 1, \\ x + 3a \log_5 y = 1 \end{cases}$ задовольняє нерівність $y > 1 - x$.

9.27. $\begin{cases} y - a^2 \log_3 x = 3, \\ y + a \log_3 x = 3 \end{cases}$ задовольняє нерівність $x > 3 - y$.

4 Розв'яжіть нерівність з параметром a відносно змінної x **(9.28–9.29):**

9.28. 1) $x^{3+\log_a x} < a^2x^2$; 2) $\log_a(1 - x^2) \geqslant 1$.

9.29. 1) $x^{\log_a x} > a$; 2) $\dfrac{1}{\log_a(x-3)} < 1$.

При яких значеннях параметра a рівняння **(9.30–9.31):**

9.30. $9^x - (2a + 1)3^x + (4a - 1) = 0$ має хоча б один додатний корінь?

9.31. $9^x - 3^{x+1} - a^2 + 5a - 4 = 0$ має один дійсний корінь?

При яких значеннях параметра a рівняння має єдиний корінь **(9.32–9.33):**

9.32. 1) $\log_5(x^2 + 2ax) = \log_5(8x - 6a - 3)$; 2) $\dfrac{\log_3(ax^2+1)}{\log_3(x+2)} = 2$?

9.33. 1) $\log_3(ax^2 + 1) = \log_3(x - a)$; 2) $\log_5(ax) = 2\log_5(x + 1)$?

Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння має лише один корінь **(9.34–9.35):**

9.34. 1) $\log_{x-1}(x - a) = 0{,}5$; 2) $\log_{ax-6}(4x - x^2) = 2$.

9.35. $\log_{4x}(1 + ax) = 0{,}5$.

9.36. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $a \cdot 5^{-x} > 2 - a$ справджується для всіх значень x.

9.37. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких розв'язком нерівності $a \cdot 2^x > 1 - a$ є будь-яке число.

Для всіх значень параметра a ($a > 0$, $a \neq 1$) розв'яжіть рівняння **(9.38–9.39):**

9.38. $\log_2 x + \log_4 x + \log_a x = 1$. **9.39.** $3\log_5 x + \log_a x = a$.

Для всіх значень параметра a ($a > 0$, $a \neq 1$) розв'яжіть нерівність **(9.40–9.41):**

9.40. $\log_a x + \log_a(x + 1) > 2$. **9.41.** $\log_a x + \log_a(x - 1) > 2$.

Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність **(9.42–9.43):**

9.42. $(a + 2)\log_{0,17}(x - 4a) \leqslant 0$. **9.43.** $(a - 1)\log_7(x + a) < 0$.

Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких система **(9.44–9.45):**

9.44. $\begin{cases} 1 + \log_2 x = \log_2(x - y), \\ (x - a)^2 + (x + y + a)^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

9.45. $\begin{cases} \log_3 x + 1 = \log_3(2x - y), \\ x(2x + y + 2a) = a - 2 \end{cases}$ має рівно два розв'язки.

Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння **(9.46–9.48)**:

9.46. $4^x + 2 = a \cdot 2^x \cdot \sin \pi x$ має тільки один корінь.

9.47. $\log_5 x + 4(1 - a^2)\log_{25x} 5 - 2 = 0$ має два корені, відстань між якими більша за $\frac{24}{5}$.

9.48. $2\log_a x + 3\log_{ax^2} a + 5 = 0$ має два корені, відстань між якими менша за $\frac{6}{25}$.

9.49. При яких значеннях параметра a всі корені рівняння $\log_3^2(x-2)+(6-5a)\log_3(x-2)4a^2-9a+5=0$ більші за число 11?

9.50. При яких значеннях параметра a хоча б один корінь рівняння $\log_4^2(x+3)+(3-5a)\log_3(x+3)+6a^2-7a+2=0$ менший за число 13?

Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність **(9.51–9.52)**:

9.51. $1+\log_5(x^2+1) \geqslant \log_5(ax^2+4x+a)$ справджується для будь-якого x.

9.52. $\log_2(ax^2+a) \leqslant 1+\log_2(2x^2+2x+3,5)$ має хоча б один розв'язок.

Для всіх значень параметра a ($a > 0$, $a \neq 1$) розв'яжіть нерівність **(9.53–9.54)**:

9.53. $\frac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x} > 1.$ **9.54.** $\frac{3\log_a x + 6}{2+\log_a^2 x} > 1.$

9.55. Гречану крупу вважають одним з найкорисніших продуктів для організму людини, а тому використовують і для дієтичного харчування. Для приготування звичайної гречаної каші на одну частину гречаної крупи беруть дві частини води.

1) Скільки грамів води треба взяти, якщо гречаної крупи взято 225 г?
2) Скільки гречаної крупи треба взяти, якщо води взято 700 г?
3) *Проектна діяльність*. Дізнайтеся з різноманітних джерел інформації, у яких пропорціях беруть крупу і воду для приготування інших каш, які з них використовують у дієтичному харчуванні, чим вони корисні для людини.

9.56. (*Задача Ейлера*). Доведіть, що

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4.$$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

9.57. Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^7$; 2) $y = 5$; 3) $y = \frac{1}{x^3}$; 4) $y = \frac{1}{x^7}$.

9.58. Знайдіть похідну складеної функції:

1) $y = (3x - 7)^{19}$; 2) $y = (x^2 + 2x)^7$;

3) $y = (4x - 9)^{-5}$; 4) $y = \dfrac{1}{(x^3 - 2x)^4}$.

9.59. Знайдіть критичні точки функції:

1) $y = x^3 - 3x$; 2) $y = x^4 - 3x^3$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 9

1. Кількість відмінників у класі складає 10 % від кількості учнів класу. Скільки учнів може бути в такому класі?

А	Б	В	Г	Д
25	28	30	32	35

2. Укажіть значення виразу $\sin^4\dfrac{\pi}{12} - \cos^4\dfrac{\pi}{12}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. Знайдіть область значень функції $y = \sqrt{x^2 + 4} - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$[2; +\infty)$

4. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^3 + 2t^2$ (час t вимірюється в секундах, шлях s – у метрах). Визначте його швидкість через 2 секунди після початку руху.

А	Б	В	Г	Д
45 м/с	20 м/с	16 м/с	8 м/с	2 м/с

5. Знайдіть найбільше число серед членів послідовності (a_n), якщо $a_n = -n^2 + 4n + 1$.

А	Б	В	Г	Д
2	5	–5	неможливо визначити	такого числа не існує

6. Укажіть кількість коренів рівняння $x^3 + 2x^2 + 7x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

7. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність

1 $(x + 1)(x - 5) \leqslant 0$
2 $\log_5 x \leqslant 1$
3 $|x - 2| < 3$
4 $3x - 10 < x$

Множина розв'язків

А $(-\infty; 5)$
Б $(-1; 5)$
В $[-1; 5]$
Г $(0; 5]$
Д $[0; 5]$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть $f'(2)$, якщо $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$.

9. Знайдіть значення виразу $4^{\frac{1}{2}\log_4 49 - \log_2 5}$.

§ 10. ПОХІДНІ ПОКАЗНИКОВОЇ, ЛОГАРИФМІЧНОЇ ТА СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЙ

Раніше ми розглянули формули для диференціювання деяких елементарних функцій (у тому числі функції $y = x^n$, де n – ціле число). У цьому параграфі доведемо формули для знаходження похідних показникової і логарифмічної функцій та степеневої функції $y = x^\alpha$, де α – будь-яке число.

1. Похідні показникових функцій

Як відомо з § 4 (п. 4), число e як основа показникової функції $y = e^x$ є таким, що кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції у точці (0; 1) дорівнює 1. Це означає, що $y'(0) = 1$. Тоді, за означенням похідної, матимемо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(0 + \Delta x) - y(0)}{\Delta x} = 1, \text{ тобто } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x} = 1 \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

Тепер знайдемо формулу для обчислення похідної показникової функції $y = e^x$ (за означенням).

1) $\Delta y(x) = y(x + \Delta x) - y(x) = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$;

2) $\dfrac{\Delta y(x)}{\Delta x} = \dfrac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$;

3) $y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot 1=e^x.$

Отже,

$$\boldsymbol{(e^x)' = e^x.}$$

Тепер знайдемо формулу для обчислення похідної показникової функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

За основною логарифмічною тотожністю маємо, що $a = e^{\ln a}$, тоді $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$.

Для знаходження похідної функції $y = a^x$ використаємо теорему про похідну складеної функції.

$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)' = e^{x\ln a}\cdot\ln a\cdot x' = (e^{\ln a})^x\cdot\ln a\cdot 1 = a^x \ln a.$

Отже,

$$\boldsymbol{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

Приклад 1. 1) $(2^x)' = 2^x\ln 2$;

2) $(e^{2x-7})' = e^{2x-7}\cdot(2x-7)' = 2e^{2x-7}$;

3) $(7^x\sin x)' = (7^x)'\sin x + (\sin x)'\cdot 7^x = 7^x\ln 7\sin x + \cos x\cdot 7^x = 7^x(\ln 7\sin x + \cos x)$.

Приклад 2. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{x+1}$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

Розв'язання. $f(x_0) = f(-1) = e^{-1+1} = e^0 = 1$;
$f'(x) = e^{x+1}(x+1)' = e^{x+1}$; $f'(-1) = e^{-1+1} = e^0 = 1$.
Тоді маємо рівняння дотичної: $y = 1 + 1(x+1)$, отже, $y = x + 2$.
Відповідь. $y = x + 2$.

Приклад 3. Знайти проміжки зростання і спадання функції

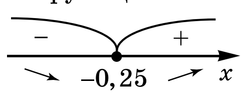
$$y = xe^{4x}.$$

Розв'язання. 1) $D(y)$: $x \in R$.

2) $y' = x'\cdot e^{4x} + (e^{4x})'\cdot x = 1\cdot e^{4x} + e^{4x}\cdot(4x)'\cdot x = e^{4x} + 4xe^{4x} = e^{4x}(1+4x)$.

3) Похідна існує на всій області визначення функції. Критичні точки – розв'язки рівняння $e^{4x}(1+4x) = 0$. Оскільки $e^{4x} > 0$ для $x \in R$, то $x = -0,25$ – єдина критична точка функції.

4) Визначаємо знаки похідної $y'(x)$ на кожному з проміжків (мал. 10.1).



Мал. 10.1

5) Отже, функція зростає на $[-0,25; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -0,25]$.

Відповідь. Зростає на $[-0,25; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -0,25]$.

2. Похідні логарифмічних функцій

Розглянемо функцію $y = \ln x$, де $x > 0$. Для всіх $x > 0$ справджується рівність $x = e^{\ln x}$. При цьому права і ліва частини рівності є однією і тією самою функцією, визначеною для $x > 0$. Тому $x' = (e^{\ln x})'$.

Похідну для $e^{\ln x}$ обчислимо за формулою $(e^x)' = e^x$ та правилом обчислення похідної складеної функції. Тоді

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)'.$$

Але $e^{\ln x} = x$, тому маємо: $(e^{\ln x})' = x \cdot (\ln x)'$.

Як відомо, $x' = 1$. Оскільки $x' = (e^{\ln x})'$, то $1 = x \cdot (\ln x)'$. Звідси

$$\boldsymbol{(\ln x)' = \frac{1}{x}}.$$

Тепер знайдемо формулу для обчислення похідної логарифмічної функції $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

За формулою переходу до іншої основи маємо:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x.$$

Тоді $\left(\log_a x\right)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$.

Отже,

$$\boldsymbol{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}.$$

Наприклад, $\left(\log_3 x\right)' = \frac{1}{x \ln 3}$;

$\left(\ln(x^2 - 2x)\right)' = \frac{1}{x^2 - 2x} \cdot (x^2 - 2x)' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$;

$(\cos x \cdot \ln x)' = (\cos x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot \cos x = -\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \cos x$.

Приклад 4. Знайти точки екстремуму та екстремуми функції

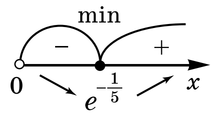
$$y = x^5 \ln x.$$

Розв'язання. 1) $D(y)$: $x > 0$.

2) $y' = (x^5)' \ln x + (\ln x)' \cdot x^5 = 5x^4 \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^5 = x^4(5\ln x + 1)$.

3) Похідна існує в усіх точках області визначення. Знайдемо критичні точки функції: $x^4(5\ln x + 1) = 0$. Оскільки $x > 0$, то $5\ln x + 1 = 0$. Тоді $\ln x = -\frac{1}{5}$, отже, $x = e^{-\frac{1}{5}}$ – єдина критична точка даної функції.

4)–5) Позначимо критичну точку на $D(y)$. Оскільки $e^{-\frac{1}{2}} < e^{-\frac{1}{5}}$ і $y'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) < 0$, а $y'(e) > 0$, можна визначити знаки похідної на кожному з отриманих проміжків (мал. 10.2).



Мал. 10.2

6) Отже, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{5}}$, $y_{\min} = y\left(e^{-\frac{1}{5}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{5}}\right)^5 \ln e^{-\frac{1}{5}} = e^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{5e}$.

В і д п о в і д ь. $x_{\min} = e^{-\frac{1}{5}}$; $y_{\min} = y\left(e^{-\frac{1}{5}}\right) = -\frac{1}{5e}$.

3. Похідна степеневої функції

Ми знаємо, що для будь-якого $n \in Z$ і будь-якого $x \in R$ ($x \neq 0$ при $n \leqslant 1$): $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Знайдемо формулу для знаходження похідної степеневої функції $y = x^\alpha$, де α – довільне число. Якщо α – не ціле, то областю визначення функції $y = x^\alpha$ є $x > 0$. Для всіх $x > 0$, використовуючи основну логарифмічну тотожність, можна записати, що $x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Тоді $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = (e^{\ln x})^\alpha \cdot \alpha \cdot (\ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} =$
$= \alpha x^{\alpha-1}$. Отже,

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, де α – будь-яке число, $x > 0$.

Наприклад, 1) $(x^{0,8})' = 0,8x^{0,8-1} = 0,8x^{-0,2}$;

2) $\left((2x+3)^{\frac{8}{7}}\right)' = \frac{8}{7}(2x+3)^{\frac{8}{7}-1} \cdot (2x+3)' = \frac{8}{7}(2x+3)^{\frac{1}{7}} \cdot 2 = \frac{16}{7}(2x+3)^{\frac{1}{7}}$.

Приклад 5. Знайти похідну функції: 1) $y = \sqrt[5]{x^7}$; 2) $y = x^2\sqrt[3]{x}$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Запишемо функцію у вигляді $y = x^{\frac{7}{5}}$. Тоді $y' = \left(x^{\frac{7}{5}}\right)' = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1} = \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$.

2) Оскільки $x^2\sqrt[3]{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{3}}$, то $y' = \left(x^{\frac{7}{3}}\right)' = \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$.

В і д п о в і д ь. 1) $\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$; 2) $\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$.

Приклад 6. Знайти кутовий коефіцієнт k дотичної до графіка функції $y = \sqrt[4]{x^3}$, проведеної у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо функцію у вигляді $y = x^{\frac{3}{4}}$.

Тоді $y' = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

Оскільки $k = y'(x_0)$, то $k = y'(1) = \frac{3}{4\cdot\sqrt[4]{1}} = \frac{3}{4} = 0,75$.

В і д п о в і д ь. $k = 0,75$.

- Запам'ятайте формули похідних функцій $y = e^x$ та $y = a^x$.
- Запам'ятайте формули похідних функцій $y = \ln x$ та $y = \log_a x$.
- Запам'ятайте формулу похідної функції $y = x^\alpha$, де $\alpha \in R$, $x > 0$.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Знайдіть похідну функції (**10.1–10.6**):

10.1. 1) $y = 5^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$; 3) $y = \log_3 x$; 4) $y = \log_{0,8} x$.

10.2. 1) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; 2) $y = 4^x$; 3) $y = \log_{0,7} x$; 4) $y = \log_9 x$.

10.3. 1) $y = x^{1,8}$; 2) $y = x^{-1,5}$; 3) $y = x^{\sqrt{2}}$; 4) $y = x^{-\sqrt{5}}$.

10.4. 1) $y = x^{-2,7}$; 2) $y = x^{2,9}$; 3) $y = x^{-\sqrt{3}}$; 4) $y = x^{\sqrt{7}}$.

2 **10.5.** 1) $y = 3^x + x^2$; 2) $y = x^5 - e^x$; 3) $y = \log_5 x - 2x^7$; 4) $y = e^x \ln x$; 5) $y = x^3 \ln x$; 6) $y = x^{1,2} - \sqrt{7}x^{\sqrt{7}}$.

10.6. 1) $y = x^7 - 2^x$; 2) $y = e^x + x^3$; 3) $y = 3x^4 + \log_2 x$; 4) $y = x^8 \ln x$; 5) $y = e^x x^5$; 6) $y = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}} + x^{1,7}$.

Знайдіть похідну даної функції у даній точці x_0 (**10.7–10.8**):

10.7. 1) $y = 4e^x + x^3$, $x_0 = 0$; 2) $y = \ln x - x^{1,7}$, $x_0 = 1$.

10.8. 1) $y = x^4 - 3e^x$, $x_0 = 0$; 2) $y = x^{1,8} + \ln x$, $x_0 = 1$.

Знайдіть похідну складеної функції (**10.9–10.10**):

10.9. 1) $y = 2^{3x}$; 2) $y = e^{4x-7}$; 3) $y = \ln 5x$; 4) $y = \log_3(2x + 1)$.

10.10. 1) $y = e^{5x}$; 2) $y = 3^{4x-2}$; 3) $y = \log_7 4x$; 4) $y = \ln(3x - 7)$.

Складіть рівняння дотичної до графіка функції (**10.11–10.12**):

10.11. $f(x) = 2^x$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

10.12. $f(x) = 5^x$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо **(10.13–10.14)**:

10.13. $f(x) = e^x$; $x_0 = 2$. **10.14.** $f(x) = e^x$; $x_0 = -1$.

Знайдіть похідну функції **(10.15–10.16)**:

10.15. 1) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{5}{\sqrt{x}}$; 2) $y = \sqrt[5]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 13$.

10.16. 1) $y = \sqrt{x} - \dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^7} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} - 11$.

10.17. Знайдіть $f'(1)$, якщо $f(x) = \sqrt[4]{x^3} - \dfrac{21}{\sqrt[7]{x}}$.

10.18. Знайдіть $g'(1)$, якщо $g(x) = \sqrt[5]{x^2} + \dfrac{12}{\sqrt[6]{x}}$.

Знайдіть критичні точки функції **(10.19–10.20)**:

10.19. 1) $y = x^2e^x$; 2) $y = x^3\ln x$.

10.20. 1) $y = xe^x$; 2) $y = x^2\ln x$.

3 Знайдіть похідну функції **(10.21–10.22)**:

10.21. 1) $y = \dfrac{2^x}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{e^x+5}{e^x-2}$; 3) $y = \dfrac{x^3}{\ln x}$; 4) $y = \dfrac{\log_5 x}{x}$.

10.22. 1) $y = \dfrac{e^x}{x-1}$; 2) $y = \dfrac{3^x-2}{3^x+1}$; 3) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 4) $y = \dfrac{x^2}{\log_3 x}$.

Обчисліть похідну даної функції у даній точці x_0 **(10.23–10.24)**:

10.23. 1) $f(x) = e^{x-2}(x^2 + 1)$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{4-x}$, $x_0 = 1$.

10.24. 1) $f(x) = e^{x+1}(2 - x^2)$, $x_0 = -1$; 2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+2}$, $x_0 = 1$.

Знайдіть похідну функції **(10.25–10.30)**:

10.25. $g(x) = e^{-x}\cos 4x$. **10.26.** $t(x) = e^{2x}\sin 3x$.

10.27. 1) $y = \sqrt[3]{2x+1}$; 2) $y = \sqrt[7]{4-2x}$; 3) $y = \sqrt[5]{x^2+1}$;

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2x-1}}$; 5) $y = \dfrac{10}{\sqrt{4x+2}}$; 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt[6]{x^3-3}}$.

10.28. 1) $y = \sqrt[4]{3x-1}$; 2) $y = \sqrt[5]{7-3x}$; 3) $y = \sqrt{x^2+7}$;

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt[7]{5x+11}}$; 5) $y = \dfrac{9}{\sqrt[3]{7x-1}}$; 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-3}}$.

10.29. 1) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{2}} + \ln\dfrac{2x+1}{3}$; 2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{7}} + e^{4x-2}$.

10.30. 1) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{3}} + \ln\dfrac{1-x}{5}$; 2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}} - e^{5x}$.

Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 (**10.31–10.32**):

10.31. 1) $f(x) = 0{,}1e^x - 10x;\ x_0 = 0$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x};\ x_0 = 1$.

10.32. 1) $f(x) = 3 + 4e^x;\ x_0 = -2$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}e^x;\ x_0 = 1$.

Знайдіть кут, який утворює дотична до графіка функції $y = g(x)$, проведена в точці x_0, з додатним напрямом осі абсцис (**10.33–10.34**):

10.33. 1) $g(x) = \dfrac{1}{3}e^{1-3x},\ x_0 = \dfrac{1}{3}$; 2) $g(x) = e^{\frac{\sqrt{3}}{3}x-1},\ x_0 = \sqrt{3}$.

10.34. 1) $g(x) = \dfrac{1}{5}e^{5x-1},\ x_0 = 0{,}2$; 2) $g(x) = e^{\sqrt{3}-x},\ x_0 = \sqrt{3}$.

10.35. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 12\ln x + 2x$; 2) $f(x) = 2\ln(x+7) - \sqrt{x+4}$;
3) $f(x) = 2\sqrt{x+2} - \ln(x-4)$; 4) $f(x) = \ln(x+3) + 3\ln x$.

10.36. Розв'яжіть рівняння $g'(x) = 0$, якщо:

1) $g(x) = 8\ln x - x^2 + 6x$; 2) $g(x) = 3\ln(x+2) - 2\sqrt{x}$;
3) $g(x) = \ln(x-2) - \sqrt{x+1}$; 4) $g(x) = 2\ln(x+2) + \ln(x-1)$.

Знайдіть значення виразу (**10.37–10.38**):

10.37. 1) $f'(-1) - f'(1)$, якщо $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$;

2) $g'(e) - g'(e^{-1})$, якщо $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

10.38. 1) $f'(0) - f'(1)$, якщо $f(x) = x^2e^x$;
2) $g'(e^{-2}) - g'(e)$, якщо $g(x) = x\ln x$.

Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 (**10.39–10.40**):

10.39. 1) $f(x) = xe^{-x},\ x_0 = 0$; 2) $f(x) = \ln(3x+4),\ x_0 = -1$.

10.40. 1) $f(x) = x^2e^x,\ x_0 = 0$; 2) $f(x) = \ln(5x-4),\ x_0 = 1$.

Обчисліть похідну даної функції у даній точці (**10.41–10.42**):

10.41. 1) $f(x) = 12x^{\frac{3}{4}},\ x_0 = 81$; 2) $f(x) = 10\sqrt[5]{x^2},\ x_0 = 32$.

10.42. 1) $f(x) = 48x^{-\frac{1}{3}},\ x_0 = 8$; 2) $f(x) = 2\sqrt[4]{x^5},\ x_0 = 16$.

Знайдіть проміжки зростання, спадання, точки екстремуму та екстремуми функції (**10.43–10.44**):

10.43. 1) $f(x) = xe^{-5x}$; 2) $f(x) = x^2\ln x$.

10.44. 1) $f(x) = xe^{-2x}$; 2) $f(x) = x^3\ln x$.

Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку (**10.45–10.46**):

10.45. 1) $f(x) = xe^{-x}$, $x \in [0; 2]$; 2) $f(x) = 3^{x^2+2x}$, $x \in [-2; 0]$.

10.46. 1) $f(x) = xe^{x}$, $x \in [-3; 0]$; 2) $f(x) = 2^{x^2-2x}$, $x \in [0; 2]$.

10.47. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = -6e^{x}$, якщо $f(x) = e^{x}(x^2 - 6x)$.

10.48. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = e^{x}$, якщо $f(x) = e^{x}(2x - x^2)$.

10.49. Розв'яжіть нерівність $g'(x) \leqslant a$, якщо:

1) $g'(x) = 5e^{x+4}$; $a = \frac{5}{e}$; 2) $g(x) = x + e^{4x-3}$; $a = 5$.

10.50. Розв'яжіть нерівність $g'(x) > a$, якщо:

1) $g(x) = \frac{1}{6}e^{6x-1}$; $a = \frac{1}{e}$; 2) $g(x) = e^{2x+1} - x$; $a = 1$.

10.51. Нехай $f(x) = \ln(-x) + x$. Доведіть, що $\min\limits_{[-4;\, -0,5]} f(x) > -3$.

10.52. Нехай $g(x) = x - \ln x$. Доведіть, що $\max\limits_{\left[\frac{1}{e};\, e\right]} g(x) < 1,8$.

10.53. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{2x} - 3$, яка паралельна прямій $y = 2x - 7$.

10.54. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{-x} + 2$, яка паралельна прямій $y = -x$.

Складіть рівняння дотичної до графіка функції (**10.55–10.56**):

10.55. $f(x) = \ln(x^2 + x)$, яка паралельна прямій $y = 1,5x + 11$.

10.56. $g(x) = \ln(3x + 2)$, яка паралельна прямій $y = x - 18$.

10.57. Знайдіть $f'(1)$, якщо $f(x) = \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.

10.58. Знайдіть $f'(1)$, якщо $f(x) = \sqrt[5]{x\sqrt[4]{x}}$.

4 Дослідіть властивості функції $f(x)$ та побудуйте схематично її графік, якщо (**10.59–10.60**):

10.59. 1) $f(x) = x^2 e^{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x) = x^3 - 3\ln x$.

10.60. 1) $f(x) = xe^{\frac{x}{3}}$; 2) $f(x) = 2\ln x - x^2$.

10.61. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > g'(x)$, якщо $f(x) = x^2 \ln x$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

10.62. Знайдіть $g'(2)$, якщо $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

10.63. Знайдіть $f'(1)$, якщо $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x + 1}}$.

10.64. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:

1) $f(x) = \ln(4 - x) + \sqrt{2x + 7}$; 2) $f(x) = \sqrt{x + 1} - \ln(2x + 3)$.

10.65. Розв'яжіть нерівність $g'(x) > 0$, якщо:

1) $g(x) = \ln(2 - x) + \sqrt{6 + x}$; 2) $g(x) = \sqrt{5 + x} - \ln(3 - x)$.

10.66. Знайдіть: 1) найменше значення функції $f(x) = x + \ln\frac{1}{x - 2}$, якщо $x \in (2; +\infty)$;

2) найбільше значення функції $g(x) = e^{-6x} + 6x$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$.

10.67. Знайдіть: 1) найбільше значення функції $f(x) = \ln(3 - 5x) + 5x$, якщо $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$;

2) найменше значення функції $g(x) = e^{2x} - 2x$, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$.

10.68. Знайдіть відстань від початку координат до дотичної до графіка функції $g(x) = 4\ln(x - 1) - x^2$, яка паралельна осі абсцис.

10.69. Знайдіть відстань від початку координат до дотичної до графіка функції $f(x) = x\ln x$, яка паралельна осі абсцис.

10.70. Знайдіть рівняння такої дотичної до графіка функції $f(x) = e^{2x} - x + 3$, яка разом з осями координат утворює рівнобедрений прямокутний трикутник.

10.71. Знайдіть рівняння такої дотичної до графіка функції $g(x) = 2\ln x - x - 1$, яка разом з осями координат утворює рівнобедрений трикутник.

10.72. Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = \left|x^2 + 2x - 3\right| + \frac{3}{2}\ln x$ на проміжку [0,5; 4].

10.73. Знайдіть найменше значення функції $g(x) = \ln\frac{1}{x} - \left|x^2 + x - 2\right|$ на проміжку [0,5; 2].

Доведіть, що для $x > 0$ справджується нерівність (**10.74–10.75**):

10.74. $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

10.75. $e^x > 1 + \ln(1 + x)$.

10.76. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = x^6 e^{-x}$ на проміжку $(a;\ a + 7)$:

1) має одну точку екстремума;
2) має дві точки екстремума;
3) спадає;
4) зростає?

10.77. При яких значеннях параметра a пряма $y = 3x + a$ є дотичною до графіка функції $f(x) = \ln(3x - 4)$?

10.78. При яких значеннях параметра a пряма $y = 2x + a$ є дотичною до графіка функції $g(x) = \ln(2x + 3)$?

10.79. Дотична до графіка функції $y(x) = \sqrt[3]{x^2}$ є такою, що абсциса точки дотику x_0 належить проміжку [0,5; 1]. При якому значенні x_0 площа трикутника, обмеженого цією дотичною, віссю абсцис і прямою $x = 2$, буде найменшою? Знайдіть цю площу.

10.80. Дотична до графіка функції $y(x) = \sqrt[5]{x}$ є такою, що абсциса точки дотику x_0 належить проміжку $\left[\frac{1}{7}; \frac{1}{2}\right]$. При якому значенні x_0 площа трикутника, обмеженого цією дотичною, віссю абсцис і прямою $x = 1$, буде найменшою? Знайдіть цю площу.

10.81. Відомо, що 1 га лісу за рік очищує 18 млн м^3 повітря. Скільки м^3 повітря очистить за рік ліс площею:
1) 4 га; 2) 3 км^2?

10.82. (*Міжнародне тестування PISA*). Ви готуєте власну заправку для салату, рецепт якої для приготування 100 мілілітрів (мл) виглядає так:
оливкова олія – 60 мл; оцет – 30 мл; соєвий соус – 10 мл.
Скільки мл оливкової олії треба взяти для приготування 150 мл цієї заправки?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

10.83. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^4$; 2) $f(x) = x^{-3}$; 3) $f(x) = \cos x$;
4) $g(x) = 5$; 5) $g(x) = \sqrt{x}$; 6) $g(x) = \operatorname{tg} x$.

10.84. 1) Знайдіть похідну функції: $y = x^2$; $y = x^2 - 7$; $y = x^2 + 8$.
2) Перевірте, що $(x^2)' = (x^2 - 7)' = (x^2 + 8)'$.

10.85. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 2\sin x - x$; 2) $g(x) = 3\operatorname{ctg} x - \frac{5}{x} + 11$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 10

1. Обчисліть $\log_a \sqrt{ab}$, якщо $\log_a b = 3$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	$\frac{1}{3}$

2. Знайдіть значення виразу $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{3\sin\alpha - \cos\alpha}$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	$\frac{1}{2}$	−1	неможливо визначити

3. Знайдіть суму коренів рівняння $3^{x^2+1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{1-2x}$.

А	Б	В	Г	Д
−2	2	4	−4	3

4. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 - 2t + 9$ (t – вимірюється в годинах, s – у кілометрах). У який момент часу t його швидкість буде дорівнювати 12 км/год?

А	Б	В	Г	Д
1 год	2 год	3 год	5 год	7 год

5. Знайдіть суму натуральних значень x, для яких справджується нерівність $\frac{4}{x} \geqslant 1$.

А	Б	В	Г	Д
6	8	10	12	20

6. Після того як ціну валізи знизили на 10 %, вона стала коштувати 1440 грн. Скільки коштувала валіза до знижки?

А	Б	В	Г	Д
1584 грн	1596 грн	1598 грн	1600 грн	1604 грн

7. Установіть відповідність між означенням елементів прогресії (1–4) і набором чисел (А–Д), які можуть бути цими елементами.

Означення елементів прогресії

1 три послідовних елементи арифметичної прогресії з різницею $d = 3$

2 три послідовних елементи арифметичної прогресії з різницею $d = -3$

3 три послідовних елементи геометричної прогресії зі знаменником $q = 3$

4 три послідовних елементи геометричної прогресії зі знаменником $q = -3$

Набір чисел

А $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1

Б 1; 3; 5

В −2; 1; 4

Г 1; −3; 9

Д 1; −2; −5

8. Знайдіть кількість коренів рівняння

$$\sqrt{x-2}(36^x - 4 \cdot 6^x - 12) = 0.$$

9. Знайдіть мінімум функції $y(x) = 5x^4 - 4x^5 + 7$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$.

А. $(0; 3)$ **Б.** $(0; 3]$ **В.** $(-\infty; 3)$ **Г.** $(3; +\infty)$

2. Укажіть всі значення параметра a, при яких рівняння $5^x = a + 2$ має розв'язки.

А. $(-\infty; +\infty)$ **Б.** $(2; +\infty)$ **В.** $(-2; +\infty)$ **Г.** $[-2; +\infty)$

3. Знайдіть похідну функції $y = x^{2,5}$.

А. $2,5x^{2,5}$ **Б.** $2,5x^{1,5}$ **В.** $1,5x^{2,5}$ **Г.** $1,5x^{1,5}$

2

4. Укажіть множину розв'язків нерівності $\log_2(3^x - 65) > 4$.

А. $[4; +\infty)$ **Б.** $(3; +\infty)$ **В.** $(5; +\infty)$ **Г.** $(4; +\infty)$

5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3^x + \log_2 y = 12, \\ 2\log_2 y - 3^x = -3. \end{cases}$ Для пари $(x_0; y_0)$, що є її розв'язком, укажіть значення суми $x_0 + y_0$.

А. 12 **Б.** 10 **В.** 8 **Г.** 6

6. Знайдіть усі критичні точки функції $y = x^2e^{-x}$.

А. 0 **Б.** 0; 2 **В.** 0; –2 **Г.** 2

3

7. Розв'яжіть нерівність $\log_2(x+3) + \log_2 x \leqslant 2$.

А. $(0; 1]$ **Б.** $(0; 1)$ **В.** $[-4; 1]$ **Г.** $[1; +\infty)$

8. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2^y \cdot 3^x = 144, \\ \log_{\sqrt[8]{2}}(y - x) = 8. \end{cases}$ Для пари $(x_0; y_0)$, що є її розв'язком, укажіть значення добутку $x_0 \cdot y_0$.

А. 6 **Б.** 10 **В.** 12 **Г.** 8

9. Складіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = \ln(3x - 2)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

А. $y = 3x + 3$ **Б.** $y = 3x$ **В.** $y = 3x - 3$ **Г.** $y = 3x - 2$

4

10. Знайдіть найменший натуральний розв'язок нерівності $\log_2 x > 3\log_x 2 - 2$.

А. 1 **Б.** 2 **В.** 3 **Г.** 4

11. Укажіть найбільше ціле значення параметра a, при якому рівняння $\log_{ax}(x-2a)=2$ має лише один корінь.

А. -1 **Б.** 1 **В.** 2 **Г.** -2

12. Укажіть кількість цілих розв'язків нерівності $f'(x)\leqslant 0$, якщо $f(x)=\ln(1-x)+2\sqrt{5+x}$.

А. один **Б.** два **В.** три **Г.** жодного

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 7–10

1

1. Розв'яжіть нерівність: 1) $\log_3 x > \log_3 7$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant -1$.

2. При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:
1) $3^x = a$; 2) $0{,}17^x = a-3$?

3. Знайдіть похідну функції:
1) $y=e^x$; 2) $y=7^x$; 3) $y=\log_4 x$; 4) $y=x^{1,8}$.

2

4. Розв'яжіть нерівність:
1) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < \log_{\frac{1}{2}}(4-x)$; 2) $\log_5(33-2^x)\geqslant 2$.

5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2^x+\log_5 y=5, \\ 2^x-2\log_5 y=2. \end{cases}$

6. Знайдіть критичні точки функції $y=x^3e^x$.

3

7. Розв'яжіть нерівність $\log_3(x+2)+\log_3 x\leqslant 1$.

8. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt[4]{3}}(x-y)=4. \end{cases}$

4

9. Розв'яжіть нерівність $x^{\log_a x} > a^4$ залежно від значень параметра a ($a>0$; $a\neq 1$).

Додаткові завдання

3

10. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y=\ln(2x-1)$ у точці з абсцисою $x_0=1$.

4

11. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^y = 64, \\ y+\log_2 x=5. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

1

1. Які з наведених функцій є зростаючими, а які – спадними:
1) $y=\pi^x$; 2) $y=(0{,}008)^x$; 3) $y=(0{,}111)^x$; 4) $y=2011^x$?

2. Порівняйте числа a і b, якщо: 1) $2^a > 2^b$; 2) $0{,}2^a < 0{,}2^b$.

2 **3.** Порівняйте числа: 1) $0{,}8^{-2}$ і $0{,}8^{-3}$; 2) $7^{1{,}12}$ і $7^{1{,}13}$.

4. Побудуйте схематично графік функції $y = y(x)$ та запишіть її властивості, якщо:

1) $y = 2{,}5^x$; 2) $y = 0{,}3^x$.

5. Порівняйте числа m і n, якщо:

1) $(\cos 12°)^m > (\cos 12°)^n$; 2) $\left(\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}\right)^m > \left(\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}\right)^n$.

6. Порівняйте число a з одиницею ($a > 0$), якщо:

1) $a^8 < a^6$; 2) $a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{2}{3}}$.

7. Знайдіть множину значень функції:

1) $y=\left(\dfrac{1}{7}\right)^x-2$; 2) $y = -3^x$; 3) $y = 4^x + 5$; 4) $y = 2 - \left(\dfrac{1}{8}\right)^x$.

8. Обчисліть:

1) $((\sqrt{3})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $3^{2-2\sqrt{3}} \cdot 3^{1+2\sqrt{3}}$; 4) $5^{4-\sqrt{7}} : 5^{3-\sqrt{7}}$.

9. При якому значенні a графік функції $y = a^x$ проходить через точку:

1) $M(1;\ 9)$; 2) $N(-1;\ 2)$; 3) $P\left(2;\ \dfrac{1}{9}\right)$; 4) $K(3;\ 64)$?

10. Точка $A(\cos 60°;\ y)$ належить графіку функції $y = 16^x$. Знайдіть y.

3 **11.** Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = 5^{-\frac{x}{8}}$; 2) $y = \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}\right)^{-x}$?

12. Обчисліть: 1) $5^{1-2\sqrt{3}} \cdot 25^{\sqrt{3}-1}$; 2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{(1-\sqrt{5})^2} : \left(\dfrac{1}{4}\right)^{7-2\sqrt{5}}$.

13. Порівняйте числа:

1) 1 і π^{-1}; 2) $0{,}01^{-13}$ і 1; 3) 1 і $2{,}7^{0{,}01}$; 4) $0{,}4^5$ і 1.

14. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x + 2$; 2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$; 3) $y = 2^{x-2}$; 4) $y = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

15. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = \pi^{|x|} + 1$; 2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-|x|} - 3$.

16. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, якщо $x \in [-3; 1]$.

4 **17.** Знайдіть множину значень функції:

1) $y = (0,5)^{-\sin x}$; 2) $y = 3 - 2^{\cos x}$;

3) $y = 4 + \left(\frac{1}{7}\right)^{|\cos x|}$; 4) $y = 3^{-|\sin x|} + 2$.

18. Порівняйте числа:

1) $((\sqrt{7})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ і $7^{1,5}$; 2) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^7$ і $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-7,1}$.

19. Побудуйте схематично графік функції:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}$; 2) $y = 5^{3-x}$.

20. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = -\frac{3}{x}$; 2) $5^x = 6 - x$.

21. 1) Скільки коренів має рівняння $2^{-x} = x^2$?
2) Скільки цілих коренів має рівняння $2^{-x} = x^2$?

До § 2

1 Розв'яжіть рівняння **(22–28)**:

22. 1) $5^x = 25$; 2) $7^x = 1$; 3) $2^x = -16$; 4) $4^x = 64$.

23. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16}$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 0$; 3) $3^{x-1} = 81$; 4) $5^{x+2} = 5$.

24. 1) $5^{x-1} = 5^{2x}$; 2) $(0,5)^{2x-7} = (0,5)^x$.

25. 1) $4^x = \frac{1}{4}$; 2) $3^x = \sqrt[5]{3}$; 3) $15^x = \sqrt[3]{15}$; 4) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = 1,25$.

2 **26.** 1) $3^x = 7^x$; 2) $2^{x+3} = 5^{x+3}$.

27. 1) $5^{x^2-2x-8} = 1$; 2) $4^{x^2+x} = 16$;

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{3-x}$; 4) $3^{x^2} = 27$.

28. 1) $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{49}{9}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 8$;

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{x-1} = 3,5^{x+3}$; 4) $(\sqrt{7})^{x+4} = 7^x$.

29. Знайдіть точку перетину графіків функцій $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ і $y = 4$.

Розв'яжіть рівняння (30–37):

30. 1) $8^{-x} = 16$; 2) $(2^{x-3})^{x+2} = 1$;

3) $(3^{x+1})^{x+3} = \dfrac{1}{3}$; 4) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^x \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^x = \dfrac{1}{12}$.

31. 1) $2^{x-2} + 2^x = 5$; 2) $3^{x-1} + 3^{x+2} = 252$.

32. 1) $16^x + 3 \cdot 4^x - 4 = 0$; 2) $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 = 0$.

33. 1) $3^{x-1} \cdot 2^x = 72$; 2) $4^{x-2} \cdot 5^{x+1} = 125$.

3 **34.** 1) $\sqrt{3^{2x}}\sqrt{4^{2x}} = 144$; 2) $\sqrt{5^x} = 25^{-\frac{1}{6}}$;

3) $\dfrac{1}{8}\sqrt{2^{x+2}} = 4^{-1,5}$; 4) $\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)^{2x-4} = 9$.

35. 1) $3^{x^2-4x} = 5^{x^2-4x}$; 2) $8^{x-3} = 5^{3-x}$.

36. 1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^{2x-1} + 7 \cdot 2^{2x-2} = 144$;
2) $0,1^{4-2x} - 2 \cdot 0,01^{3-x} = 98$.

37. 1) $5^x - 10 \cdot 5^{-x} = 3$; 2) $3^{2x+1} - 12 \cdot 3^x + 9 = 0$;

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 2^{x+3} = 6$; 4) $\dfrac{6}{2^x - 2} - \dfrac{5}{2^x + 1} = 2$.

38. Розв'яжіть однорідне рівняння:

$$4 \cdot 4^{2x} - 9 \cdot 4^x \cdot 5^x + 5 \cdot 5^{2x} = 0.$$

4 **39.** Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 6^x + 3 \cdot 6^{x-2}$; 2) $25^{x+\frac{1}{2}} - 2^{x+1} = 2^{x+2} - 5^{2x}$.

40. Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{1-x^2} + 4^{1+x^2} = 17$; 2) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$.

До § 3

1 Розв'яжіть нерівність (41–44):

41. 1) $3^x > 3^7$; 2) $2^x \leqslant 2^{-11}$; 3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$; 4) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^x < \left(\dfrac{3}{7}\right)^8$.

42. 1) $2^x \geqslant 16$; 2) $1,4^x < 1,96$; 3) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^x > \dfrac{1}{64}$; 4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \leqslant 1$.

2 **43.** 1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x < 9$; 2) $\left(\sqrt{5}\right)^x \geqslant \dfrac{1}{25}$; 3) $0,25^x \leqslant 4$; 4) $0,3^x > 3\dfrac{1}{3}$.

44. 1) $8^{7x-14} \leqslant 1$; 2) $3^{3x+1} > 81$; 3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2x} < 8$; 4) $4^{x_2+1} \geqslant 16$.

45. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2^x - 32}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{1}{25} - \left(\dfrac{1}{5}\right)^x}$.

3 **46.** Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^{x+5,5} > \frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $25^{0,5x_2-3} \leqslant 125$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x} \geqslant \frac{1}{81}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{|x|-3} < 36$.

47. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{x} - \left(\frac{1}{16}\right)^{x-5}}$; 2) $y = \frac{3}{\sqrt{5^{x-7} - 25^{\frac{1}{4}x}}}$.

Розв'яжіть нерівність (**48–52**):

48. 1) $4^{x-1} + 4^{x} \leqslant 20$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} > 18$.

49. 1) $9^{x} + 6 \cdot 3^{x} - 27 > 0$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 2 \leqslant 0$.

50. 1) $\frac{4^{x} - 2^{x}}{x^2 + 7} > 0$; 2) $\frac{0,04^{x} - 0,2}{-3x^2 - 1} \leqslant 0$.

4 **51.** $2^{x+3} + 9 \cdot 5^{x-2} \geqslant 5^{x} + 2^{x+2}$. **52.** $4^{x} + 10^{x} - 2 \cdot 25^{x} > 0$.

53. Розв'яжіть графічно нерівність $2^{x} \geqslant 6 - x$.

До § 4

1 **54.** Перевірте правильність рівності:

1) $\log_8 1 = 0$; 2) $\log_{19} 19 = 1$; 3) $\log_3 81 = 4$;
4) $\log_5 25 = 2$; 5) $\log_2 0,5 = -1$; 6) $\lg 0,001 = -3$;
7) $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$; 8) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = -4$.

55. Обчисліть:

1) $\log_3 3$; 2) $\log_3 9$; 3) $\log_{15} 1$; 4) $\log_2 16$.

56. Знайдіть значення виразу: 1) $5^{\log_5 7}$; 2) $0,3^{\log_{0,3} 8}$.

2 **57.** Знайдіть значення виразу:

1) $\log_7 \frac{1}{7}$; 2) $\log_3 \frac{1}{9}$; 3) $\log_5 \frac{1}{125}$; 4) $\lg 0,1$;
5) $\log_3 \sqrt{3}$; 6) $\log_{\frac{1}{5}} 25$; 7) $\log_{\sqrt{7}} 49$; 8) $\lg 0,1\sqrt{10}$.

58. Знайдіть значення виразу, якщо $a > 0$, $a \neq 1$:

1) $\log_a a^6$; 2) $\log_a \sqrt[7]{a}$; 3) $\log_a \frac{1}{a^7}$; 4) $\log_a \sqrt[3]{a^4}$.

59. Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 10 000; 2) $\sqrt[3]{10}$; 3) 0,0001;

4) $\sqrt[7]{10^2}$; 5) $\sqrt[4]{1000}$; 6) $\frac{1}{\sqrt[7]{10}}$.

60. Розв'яжіть рівняння: 1) $3^x = 8$; 2) $5^{x-1} = 9$.

61. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{4}\log_3 81 + \frac{1}{5}\log_2 32$; 2) $6\log_3 \frac{1}{9} - 4\log_{\frac{1}{2}} 16$.

62. Обчисліть:

1) $3^{2\log_3 7}$; 2) $5^{\frac{1}{2}\log_5 36}$; 3) $6^{1+\log_6 2}$; 4) $9^{\log_9 10-2}$.

63. Знайдіть значення виразу:

1) $\log_{18}3 + \log_{18}6$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}18 - \log_{\frac{1}{3}}6$;

3) $\log_7 \sqrt{14} - \log_7 \sqrt{2}$; 4) $\lg 5 + \lg 200$.

64. Обчисліть значення виразу:

1) $\log_7 \sqrt[5]{7^2}$; 2) $\log_3 \sqrt{3^7}$; 3) $\frac{\log_4 81}{\log_4 3}$; 4) $\frac{\lg 625}{\lg 5}$.

65. Прологарифмуйте вираз ($a > 0$; $b > 0$; $c > 0$):

1) $16a^3b\sqrt[3]{c}$ за основою 4; 2) $\frac{1}{9}a^{\frac{1}{6}}b^3\sqrt[5]{c^2}$ за основою 9.

66. Знайдіть число m з умови:

1) $\log_4 m = \log_4 26 + \log_4 3 - \log_4 13$;

2) $\lg 8 + \lg 5 + \lg 3 - \lg 40 = \lg m$.

67. Відомо, що $\lg 3 \approx 0,477$. Знайдіть:

1) $\lg 30$; 2) $\lg 300$; 3) $\lg 0,03$; 4) $\lg 0,0003$.

3 **68.** Обчисліть:

1) $\log_6(3\log_{11}121)$; 2) $\log_4\left(2\log_{\sqrt{3}} 9\right)$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 16$; 4) $\lg\left(2\log_3 243\right)^4$.

69. Обчисліть:

1) $\log_{11} \frac{1}{\sqrt[5]{11^2}}$; 2) $\log_{32} \sin\frac{\pi}{6}$; 3) $\log_{\sqrt{3}}\left(27\sqrt{3}\right)$; 4) $\log_{25} \sqrt[3]{5}$.

70. Прологарифмуйте вираз за основою 10, якщо $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$:

1) $\frac{\sqrt[3]{0,0001a^8\sqrt[7]{b}}}{\sqrt[4]{c^3}}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{100a^3b^7}{c}}$.

Обчисліть **(71–72)**:

71. 1) $\frac{\lg 24 + \lg 9}{2\lg 2 + \lg 9}$; 2) $\frac{\ln 125 - 2\ln 5}{\ln 75 + \ln\frac{1}{3}}$.

72. 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{0,5\log_{\frac{1}{7}}25}$; 2) $4^{1-\log_2 7}$;

3) $3^{\log_9 625\,-\,\log_{27}64}$; 4) $100^{\frac{1}{2}\lg 16+\lg 3}$.

73. Знайдіть x, якщо

1) $\log_{0,3} x = 5\log_{0,3} 4 - \frac{1}{2}\log_{0,3} 16 - 2\log_{0,3} 32$;

2) $\lg x = 3\lg 5 + 6\lg 3 - 4\lg 15$.

74. Відомо, що $\log_3 7 = a$; $\log_3 2 = b$. Виразіть через a і b:

1) $\log_3 14$; 2) $\log_3 21$; 3) $\log_3 28$; 4) $\log_7 2$.

75. Розв'яжіть рівняння:

1) $9^x + 2\cdot 3^x - 8 = 0$; 2) $4^x - 3\cdot 2^{x+1} + 5 = 0$.

4 **76.** Порівняйте вирази:

1) $8^{\log_7 9}$ і $9^{\log_7 8}$; 2) $4^{\log_2 5} + 0,01$ і $5^{\log_2 4} - 0,2$.

77. Обчисліть: 1) $3^{4\log_{81}125 - 6\log_{27}5}$; 2) $\log_2 7\cdot\lg 2\cdot\log_{49}10$.

78. Знайдіть значення виразу:

1) $\lg\operatorname{ctg}11^\circ + \lg\operatorname{ctg}79^\circ$; 2) $\log_4\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_4\left(2\cos\frac{\pi}{12}\right)$.

79. Обчисліть:

1) $7^{\frac{1}{\log_3 7}}$; 2) $4^{\frac{2}{\log_3 4}}$; 3) $6^{-\frac{1}{\log_5 6}}$; 4) $3^{\frac{1}{4\log_{16}3}}$.

80. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4^{\log_4 x} = 12$.

81. Відомо, що $\log_{45}25 = m$. Знайдіть $\log_9 15$.

82. Спростіть вираз $\dfrac{1-\log_n^3 m}{(\log_n m + \log_m n + 1)\log_n \frac{n}{m}}$.

До § 5

1 **83.** Які з наведених функцій є зростаючими, а які – спадними на $(0; +\infty)$:

1) $y = \log_\pi x$; 2) $y = \log_{0,18} x$; 3) $y = \log_{\frac{3}{5}} x$; 4) $y = \lg x$?

84. Порівняйте a і b, якщо:

1) $\log_9 a > \log_9 b$; 2) $\log_{0,32} a > \log_{0,32} b$.

85. Порівняйте числа:

1) $\log_5 1,7$ і $\log_5 1,8$; 2) $\log_{0,1} 5$ і $\log_{0,1} 6$.

2 **86.** Побудуйте схематично графік функції та вкажіть її властивості:

1) $y = \log_5 x$; 2) $y = \log_{0,3} x$.

87. Зростаючою чи спадною на $(0; +\infty)$ є функція:

1) $y = \log_{\operatorname{tg}46} x$; 2) $y = \log_{\sin\frac{\pi}{18}} x$?

88. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \log_5(3x + 12)$; 2) $y = \log_{0,2}(4x - x^2)$.

89. Порівняйте з одиницею основу логарифма a ($a > 0$), якщо:
1) $\log_a 8 < \log_a 8{,}2$; 2) $\log_a 4{,}5 > \log_a 5$.

90. Які з точок належать графіку функції $y = \log_{\frac{1}{3}} x$:
1) $A\left(\frac{1}{3}; 1\right)$; 2) $B(3; 1)$; 3) $C(1; 0)$; 4) $D\left(\frac{1}{9}; -2\right)$?

91. Побудуйте графік функції $y = \log_2 x$. Як змінюється y, коли x зростає від $\frac{1}{2}$ до 8?

92. Порівняйте з нулем число:
1) $\log_3 8$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 18$; 3) $\log_{0,1} 0{,}12$; 4) $\log_5 0{,}45$.

3

93. Порівняйте з одиницею число a, якщо:
1) $\log_a 4 = -0{,}15$; 2) $\log_a 0{,}2 = 0{,}5$;
3) $\log_a 7 = 2{,}73$; 4) $\log_a \frac{1}{8} = -2{,}3$.

94. Побудуйте графік функції $y = \log_2(x + 3)$ та запишіть її властивості.

95. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$ та запишіть її властивості.

96. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \log_{0,5} x$, якщо $x \in \left[\frac{1}{8}; 32\right]$.

97. Порівняйте числа:
1) $\log_\pi 3{,}5$ і 1; 2) $\log_3 \sqrt{7}$ і 1;
3) 3 і $\log_2 7{,}9$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}$ і $\log_2 5$.

98. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \log_3 \mathrm{tg}\, x$; 2) $y = \log_5(x + 2) + \sqrt{5 - x}$.

4

99. Побудуйте графік функції $y = 2\log_3(x - 2) + 1$.

100. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \log_3(1 + \cos x)$; 2) $y = \log_{x-2}(16 - x^2)$.

101. Розв'яжіть графічно рівняння:
1) $\log_{0,25} x = x - 5$; 2) $\log_2 x = 7 - 3x$.

102. Побудуйте графік функції:
1) $y = 0{,}3^{\log_{0,3}(2-3x)}$; 2) $y = 7^{2\log_7(x+1)}$.

До § 6

1 Розв'яжіть рівняння (**103–107**):

103. 1) $\log_7 x = 1$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} x = 0$; 3) $\log_{\frac{1}{7}} x = -1$; 4) $\log_5 x = 2$.

104. 1) $\log_3(x + 7) = \log_3 12$; 2) $\log_{\frac{1}{7}}(x - 2) = \log_{\frac{1}{7}} 4$.

105. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) = -2$; 2) $\log_3(4x - 1) = 2$;

3) $\log_3(x^2 - 2x + 1) = 0$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 3x) = -1$.

2 **106.** 1) $\log_5(x - 3) = \log_5(2x - 7)$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x + 4) = \log_{\frac{1}{2}} x$;

3) $\log_{0,13}(x^2 - 2) = \log_{0,13}(2x + 6)$;

4) $\log_{17}(x^2 - 1) = \log_{17}(x + 1)$.

107. 1) $\log^2_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{4}} x - 2 = 0$; 2) $\log^2_3 x - 3\log_3 x + 2 = 0$.

108. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x)$ і $y = -1$.

109. 1) Чи перетинаються графіки функцій $y = \log_4(x - 3)$ і $y = \log_4(11 - x)$?

2) Якщо відповідь позитивна, знайдіть точку перетину графіків.

Розв'яжіть рівняння (**110–115**):

110. 1) $\log_2 x^5 + \log_2 x^2 = 21$; 2) $14\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[7]{x} - \log_{\frac{1}{2}} x^3 = 4$.

111. 1) $\log^2_{\frac{1}{9}}(x^2 + 5) = 1$; 2) $\log_{81} \log_2 \log_{\sqrt[4]{5}} x = \frac{1}{4}$.

3 **112.** 1) $2\log_3(x - 1) = \log_3(2x + 1)$;

2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x - 2) = \log_{\frac{1}{4}}(4 - x)$.

113. 1) $\log_3(9^x - 72) = x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(2 \cdot 3^x - 5) = x - 1$.

114. 1) $\log_2(x + 2) + \log_2(x + 3) = 1$;

2) $\log_5(6x + 2) = 3\log_5 2 - \log_5(2x - 1)$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(2 - x) + 3\log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 3)$;

4) $\log_9(x - 3) - \log_9(x^2 - 7x) = \log_9 27 - 2$.

115. 1) $\lg^2(x - 3) + 2\lg(x - 3) - 3 = 0$;

2) $\log^2_3 x + \log_3 x^4 - 5 = 0$;

3) $\log^2_{0,5}(x-1) - 15\log_{0,5}\sqrt[5]{x-1} - 4 = 0$;

4) $\dfrac{1}{5+\lg x} + \dfrac{2}{1-\lg x} = 1$.

116. Знайдіть корені рівняння $\log_3 x + 4\log_x 3 = 5$.

Розв'яжіть рівняння (**117–120**):

117. 1) $\log_2(9-2^x) = 3-x$; 2) $\log_{4x}(2x^2-x-7) = 1$.

118. $\log_7(2^x-1) + \log_7(2^x-7) = 1$.

119. $\dfrac{1}{2}\log_2(4x-3) + \log_2 3 = \log_2(x+2)$.

120. 1) $\log_2(4x)\log_2\left(\dfrac{1}{4}x\right) = 5$; 2) $3 - \log_5 x = 2\sqrt{\log_5 x}$.

121. Скільки коренів має рівняння $\dfrac{\log_5(3x^2+2x)}{\log_{x+1}(x+7)} = 0$?

Розв'яжіть рівняння (**122–126**):

122. 1) $\sqrt{x-3}\log_7(x-4) = 0$; 2) $\sqrt{x^2-4}\log_8(x+2) = 0$.

4

123. 1) $|x|\log_2 x = 2x$; 2) $|x|\log_{\frac{1}{8}}(-x) = x$.

124. $|\log_2 x + 1| + |\log_2 x + 2| = 3$.

125. $(\log_4(2x+9)+1)\log_{x+2}2 = 1$.

126. $\log_x(125x)\cdot\log^2_{25} x = 1$.

До § 7

1

Розв'яжіть нерівність (**127–130**):

127. 1) $\log_7 x \geqslant \log_7 8$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} x > \log_{\frac{1}{4}} 2$;

3) $\log_{0,35} x \leqslant \log_{0,35} 3$; 4) $\log_{20} x < \log_{20} 4$.

128. 1) $\log_3 x \leqslant 1$; 2) $\log_{\frac{1}{8}} x < -2$;

3) $\log_{0,5} x > 2$; 4) $\log_7 x \geqslant -1$.

2

129. 1) $\log_2(x+3) > 1$; 2) $\log_{0,1}(x-1) \leqslant -1$;

3) $\lg(x-5) < 2$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x+7) \geqslant -3$.

130. 1) $\log_7(x+3) \geqslant \log_7(5-x)$;

2) $\log_{0,15}(x-3) > \log_{0,15}(3x-7)$.

3

131. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\log_4(x+7)}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\log_{0,17}(x-5)}}$.

Розв'яжіть нерівність **(132–134)**:

132. 1) $\log_2(x^2 + x) > 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) \geqslant -1$.

133. 1) $\log_3(x + 1) + \log_3(x + 7) < 3$;
2) $\log_{0,5}(x - 2) + \log_{0,5}(x - 2,5) \geqslant 1$.

134. 1) $\log^2_{\frac{1}{3}} x + 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3 > 0$; 2) $\log^2_5 x \geqslant 4$.

135. При яких значеннях x функція $y = \dfrac{\lg x - 1}{-|x| - 7}$ набуває лише додатних значень?

Розв'яжіть нерівність **(136–137)**:

136. 1) $\log_{0,7}(x^2 + 3x - 4) > \log_{0,7}(-2x - 4)$;
2) $2\lg(x + 1) > \lg(9x + 19)$.

137. 1) $|\log_2 x - 1| < 3$; 2) $|\log_{0,1} x - 2| \geqslant 1$.

4 **138.** Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності $\log_{0,3}(x + 2) + \log_{0,3}(x - 1) \geqslant \log_{0,3}(x + 7)$.

139. Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$\log_{\frac{1}{8}} \log_7(8 - x^2) > 0?$$

140. Розв'яжіть графічно нерівність $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant x - 4$.

141. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{x}{5}}(x^2 - 8x + 16) \geqslant 0$.

142. Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності $\log_{3x+4}x^2 < 1$.

До § 8

2 Розв'яжіть систему рівнянь **(143–147)**:

143. 1) $\begin{cases} 3^x + 2^y = 17, \\ 3^x - 2^y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_4 y = 3, \\ \log_3 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

3 **144.** 1) $\begin{cases} 4^x + 4^y = 17, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{2x} - 5^y = -21, \\ 2^x - 5^{\frac{y}{2}} = -3. \end{cases}$

145. 1) $\begin{cases} (\sqrt{2})^{x-y} = \dfrac{0,5^{y-3}}{8}, \\ \log_3(3x + 2y) + \log_3(x - 2y) = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4^x \cdot 3^y = 108, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 2. \end{cases}$

4 **146.** 1) $\begin{cases} \log_{xy} \dfrac{x}{y} - \log^2_x y = 1, \\ \log_2(x - y) = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^{\lg x} = 7, \\ xy = 70. \end{cases}$

147. $\begin{cases} 3^{\lg y} = 4^{\lg x}, \\ (4y)^{\lg 4} = (3x)^{\lg 3}. \end{cases}$

До § 9

3 **148.** Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність $a^2 3^x \leqslant a$.

149. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння $25^x - 5^x - a^2 - a = 0$.

4 **150.** Розв'яжіть нерівність з параметром a відносно змінної x:

1) $2 \cdot 4^{x+1} + a \cdot 2^{x+1} - a^2 < 0$; 2) $\log_a(x-1) + \log_a x > 2$.

151. При яких значеннях a рівняння $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ має рівно два розв'язки?

152. При яких значеннях параметра a рівняння має лише один корінь:

1) $2\log_3(x+3) = \log_3(ax)$; 2) $2\log_{x-1}(x+a) = 1$?

До § 10

1 Знайдіть похідну функції (**153–155**):

153. 1) $y = 8^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; 3) $y = \log_2 x$; 4) $y = \log_{0,1} x$.

154. 1) $y = x^{1,7}$; 2) $y = x^{-0,8}$; 3) $y = x^{\sqrt{5}}$; 4) $y = x^{-\sqrt{2}}$.

2 **155.** 1) $y = 5^x - x^7$; 2) $y = x^5 - e^x$; 3) $y = \log_4 x - \frac{1}{4}x^8$;

4) $y = x^9 \ln x$; 5) $y = x^3 e^x$; 6) $y = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}} - x^{1,5}$.

156. Знайдіть похідну функції $y = y(x)$ у точці x_0, якщо:

1) $y(x) = 5e^x - x^9$; $x_0 = 0$; 2) $y(x) = x^{1,4} + \ln x$; $x_0 = 1$.

157. Знайдіть похідну складеної функції:

1) $y = 4^{5x}$; 2) $y = e^{\frac{1}{2}x-7}$; 3) $y = \log_4 9x$; 4) $y = \ln(4x-9)$.

158. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

159. Знайдіть критичні точки функції:

1) $y = x^3 e^x$; 2) $y = x^4 \ln x$.

3 **160.** Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{e^x}{x+3}$; 2) $y = \frac{5^x - 2}{5^x + 1}$; 3) $y = \frac{x^2}{\ln x}$; 4) $y = \frac{\log_2 x}{x^3}$.

161. Обчисліть похідну функції $f(x)$ у точці x_0:

1) $f(x) = e^{x-3}(x^2 - 8)$; $x_0 = 3$; 2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+3}$; $x_0 = 1$.

162. Знайдіть похідну функції $\varphi(x) = e^{-3x}\cos 2x$.

163. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = x^2e^{-x}$; $x_0 = 0$; 2) $f(x) = \ln(3x - 2)$; $x_0 = 1$.

164. Знайдіть $f'(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = 15x^{\frac{4}{5}}$; $x_0 = 32$; 2) $f(x) = 9\sqrt[3]{x^4}$; $x_0 = 8$.

165. Знайдіть проміжки зростання, проміжки спадання, точки екстремуму та екстремуми функції:

1) $f(x) = xe^{-3x}$; 2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

166. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку:

1) $f(x) = x^2e^{-x}$; $x \in [0; 3]$; 2) $f(x) = e^{x_2+4x}$; $x \in [-3; 0]$.

167. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 2e^x$, якщо $f(x) = e^x(x^2 + 2x)$.

168. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{-2x} + 4$, яка паралельна прямій $y = 7 - 2x$.

169. Знайдіть: 1) $f'(8)$, якщо $f(x) = \sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$;

2) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, якщо $f(x) = e^{\cos x} - e^{\sin x}$.

4

170. Дослідіть функцію і побудуйте схематично її графік:

1) $f(x) = xe^{-\frac{x}{4}}$; 2) $f(x) = x^4 - 4\ln x$.

Українці у світі

***Олександр Григорович Гайштут** (1930–2015) – одна з найцікавіших постатей в учительському середовищі Києва та України. Розпочав учителювати в сільській школі, проте за короткий час став відомим завдяки своїй нестандартній авторській методиці викладання математики. У 1980 році світ побачила його перша книжка, а далі їх кількість зросла до 70. Нестандартний підхід до навчання математики переріс у захоплення логікою, і останні 35 років свого життя Олександр Григорович присвятив навчанню учнів логіки, ставши автором методики навчання логіки для учнів початкової школи.*

Олександр Григорович є автором перших в Україні збірників задач на готових малюнках з планіметрії та стереометрії, а його книжки з логіки дуже популярні не тільки в Україні, а й за її межами. Автори підручника були особисто знайомі з Олександром Григоровичем, спілкувалися з ним, він ділився з ними своїм досвідом.

РОЗДІЛ 2

ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ...

- ***познайомитеся*** *з поняттями первісної, невизначеного та визначеного інтегралів; таблицею первісних;*
- ***дізнаєтеся*** *про геометричний і фізичний зміст визначеного інтеграла;*
- ***навчитеся*** *знаходити первісні та інтеграли деяких функцій, застосовувати первісні та інтеграли до розв'язування задач.*

§ 11. ПЕРВІСНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Вивчаючи математику в попередніх класах, ви могли помітити, що до багатьох відомих нам дій (операцій) існують обернені. Оберненою до додавання є дія віднімання, оберненою до множення (на число, відмінне від нуля) є дія ділення, оберненою до дії множення одночлена на многочлен є винесення спільного множника за дужки тощо.

Також існує і операція, що є оберненою до знаходження похідної функції (операції диференціювання). Таку операцію називають *інтегруванням*.

1. Поняття первісної

Ми вже вміємо знаходити похідну заданої функції $y = f(x)$. Але в математиці часто доводиться розв'язувати обернену задачу: знаходити функцію $f(x)$ за її похідною $f'(x)$. Так, наприклад, у фізиці, якщо ми знаємо закон руху матеріальної точки $s(t)$, то можемо знайти закон зміни швидкості $v(t)$, оскільки $v(t) = s'(t)$. Часто виникає потреба визначити закон руху $s(t)$ за відомою функцією $v(t)$, тобто відновити функцію за її похідною, або, як кажуть математики, знайти первісну для даної функції.

Функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Знаходження функції $f(x)$ за її похідною $f'(x)$ називають *інтегруванням* (лат. *integratio* – відновлення). Ця дія є оберненою до диференціювання.

Приклад 1. Для функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ первісною є функція $F(x) = x^2$, оскільки для кожного x із цього проміжку справджується рівність $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$.

Зауважимо, що, наприклад, функція $x^2 + 1$ має ту саму похідну, що й функція x^2. Справді, $(x^2 + 1)' = 2x$. Тому функція $x^2 + 1$ також є первісною для функції $f(x) = 2x$. Зрозуміло, що замість числа 1 можна підставити будь-яке інше число C, матимемо $(x^2 + C)' = 2x$. Отже, можна дійти висновку, що якщо *задача знаходження первісної має хоча б один розв'язок, то вона має безліч розв'язків*.

Приклад 2. Для функції $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на її області визначення $(0; +\infty)$ однією з первісних є функція $F(x) = 2\sqrt{x}$, адже

$$F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x).$$

2. Основна властивість первісних

Вище ми вже встановили, що задача знаходження первісної має безліч розв'язків. Знайти всі ці розв'язки дає змогу *основна властивість первісної*.

Т е о р е м а (основна властивість первісної). **Кожна з первісних для функції $f(x)$ на заданому проміжку має вигляд $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна із цих первісних, а C – довільна стала.**

Перш ніж довести цю теорему, зауважимо, що в ній коротко сформульовано дві властивості первісної:

1) яке б число замість C не підставили у вираз $F(x) + C$, отримаємо первісну для $f(x)$ на заданому проміжку;

2) яку б первісну $F_1(x)$ для функції $f(x)$ на заданому проміжку ми не знайшли, завжди можна підібрати таке число C, що для всіх x із цього проміжку буде справджуватися рівність $F_1(x) = F(x) + C$.

Доведення теореми і зводиться до доведення цих двох властивостей.

Д о в е д е н н я. 1) За умовою $F(x)$ – одна з первісних для $f(x)$ на даному проміжку, тобто $F'(x) = f(x)$ для будь-якого x із цього проміжку. Нехай $C \in R$. Тоді

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

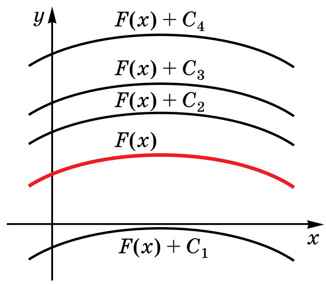
тобто $F(x) + C$ – також первісна для $f(x)$ на цьому проміжку.

2) Нехай $F_1(x)$ – інша первісна для функції $f(x)$ на заданому проміжку, тобто $F_1'(x) = f(x)$ для всіх x із цього проміжку. Розглянемо похідну різниці функцій $F_1(x) - F(x)$.

$(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$

Використовуючи ознаку сталості функції з курсу алгебри і початків аналізу 10 класу, доходимо висновку, що оскільки похідна різниці $F_1(x) - F(x)$ дорівнює нулю, то ця різниця є константою, тобто функція $F_1(x) - F(x)$ набуває деякого сталого значення C на даному проміжку. Отже, $F_1(x) - F(x) = C$, тобто $F_1(x) = F(x) + C$. Таким чином, будь-яка первісна $F_1(x)$ функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F_1(x) = F(x) + C$. ■

Приклад 3. Розглянемо функцію $f(x) = -3x^2$, для якої на проміжку $(-\infty; +\infty)$ однією з первісних є функція $-x^3$. Справді, $(-x^3)' = -3x^2 = f(x)$. Тоді загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x) = -3x^2$ можна записати у вигляді $F(x) = -x^3 + C$, де $C \in R$.



Мал. 11.1

Геометрично основна властивість первісної означає, що *графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ такі, що їх можна одержати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат* (мал. 11.1).

3. Невизначений інтеграл

Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ називають *невизначеним інтегралом* і позначають символом $\int f(x)dx$ (читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

У цьому записі $f(x)$ називають *підінтегральною функцією, x називають змінною інтегрування*.

Таким чином:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ – одна з первісних, а C – довільна стала.

Наприклад, оскільки x^2 – первісна для $2x$, то $\int 2xdx = x^2 + C$.

4. Найпростіші диференціальні рівняння

У попередніх класах, розв'язуючи рівняння, ви шукали значення змінної (корінь рівняння), тобто деяке невідоме число. У математиці також розглядають рівняння, у яких невідомими є не числа, а функції. Такі рівняння називають *функціональними рівняннями*. Серед функціональних рівнянь трапляються такі, що містять похідні шуканих функцій. Такі рівняння називають *диференціальними рівняннями*. Прикладами диференціальних рівнянь, де невідомою є функція $y = y(x)$, є рівняння $y' = \cos x + 3$; $y' + 2y = 0$; $x + 3y' + y = 0$ тощо.

Розв'язком диференціального рівняння називають будь-яку функцію, що задовольняє це рівняння (тобто функцію, після підстановки якої у задане рівняння одержуємо тотожність). *Розв'язати диференціальне рівняння* – означає знайти всі його розв'язки.

Приклад 4. Розглянемо диференціальне рівняння $y' = 2x^3$. Одним з розв'язків цього рівняння є функція $y = \frac{x^4}{2}$. Справді, $\left(\frac{x^4}{2}\right)' = \frac{1}{2}(x^4)' = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 = 2x^3$. Зауважимо, що для розв'язування рівняння $y' = 2x^3$ треба знайти функцію, похідна якої дорівнює $2x^3$, тобто знайти первісну для функції $2x^3$. Користуючись основною властивістю первісної, можна дійти висновку, що всі функції вигляду $\frac{x^4}{2} + C$ є розв'язками даного диференціального рівняння. Функцію $\frac{x^4}{2} + C$ називають *загальним розв'язком диференціального рівняння* $y' = 2x^3$.

● Яку функцію називають первісною для функції $y = f(x)$? ● Сформулюйте і доведіть основну властивість первісної. ● Що геометрично означає основна властивість первісної? ● Що називають невизначеним інтегралом? ● Яке рівняння називають диференціальним і що називають його розв'язком? ● Що означає розв'язати диференціальне рівняння?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

11.1. Які з функцій є первісними для функції $f(x) = -2$:
1) $F(x) = 2x$; 2) $F(x) = -2x$;
3) $F(x) = 0$; 4) $F(x) = -2x + 7$?

11.2. Які з функцій є первісними для функції $f(x) = 3$:
1) $F(x) = 3x$; 2) $F(x) = -3x + 1$;
3) $F(x) = 3x - 2$; 4) $F(x) = 0$?

11.3. Відомо, що $(\cos x)' = -\sin x$. Запишіть три довільні первісні для функції $f(x) = -\sin x$.

11.4. Відомо, що $(\sin x)' = \cos x$. Запишіть три довільні первісні для функції $f(x) = \cos x$.

2

Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$, якщо **(11.5–11.6)**:

11.5. 1) $F(x) = x^4 - 3x + 1$, $f(x) = 4x^3 - 3$;
2) $F(x) = \sin 2x + e^x$, $f(x) = 2\cos 2x + e^x$;
3) $F(x) = 14 - \cos 4x$, $f(x) = 4\sin 4x$;
4) $F(x) = x\cos x$, $f(x) = \cos x - x\sin x$.

11.6. 1) $F(x) = x^3 + 2x - 7$, $f(x) = 3x^2 + 2$;
2) $F(x) = e^x - \cos 2x$, $f(x) = e^x + 2\sin 2x$;
3) $F(x) = 3 + \sin 8x$, $f(x) = 8\cos 8x$;
4) $F(x) = x\sin x$, $f(x) = \sin x + x\cos x$.

Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку (**11.7–11.8**):

11.7. 1) $F(x) = \text{ctg}\, x + x^7$, $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} + 7x^6$, $x \in (0; \pi)$;

2) $F(x) = \ln 4x - \sin\dfrac{\pi}{6}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$.

11.8. 1) $F(x) = x^8 + \text{tg}\, x$, $f(x) = 8x^7 + \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) $F(x) = \cos\dfrac{\pi}{3} + \ln 7x$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$.

Чи правильно знайдено невизначений інтеграл (**11.9–11.10**):

11.9. 1) $\int x^2 dx = 2x + C$; 2) $\int \sin x dx = -\cos x + C$?

11.10. 1) $\int 5x^4 dx = x^5 + C$; 2) $\int \cos x dx = -\sin x + C$?

11.11. Покажіть, що функція $y = x^3 + 5$ є розв'язком диференціального рівняння $y' = 3x^2$.

11.12. Покажіть, що функція $y = x^2 - 7$ є розв'язком диференціального рівняння $y' = 2x$.

Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, якщо (**11.13–11.14**):

11.13. 1) $F(x) = 5\cos x - x^6$, $f(x) = -5\sin x - 6x^5$;
2) $F(x) = \sin 2x + 1$, $f(x) = \cos 2x$;
3) $F(x) = e^x - x$, $f(x) = e^x + 1$;
4) $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4)$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$?

11.14. 1) $F(x) = 3\sin x + x^2$, $f(x) = \cos x + 2x$;
2) $F(x) = \cos 3x - 5$, $f(x) = -3\sin 3x$;
3) $F(x) = x + e^x$, $f(x) = 1 + e^x$;
4) $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(x^4 + 3)$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 3}$?

Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(0; +\infty)$, якщо (**11.15–11.16**):

11.15. 1) $F(x) = \dfrac{2}{x^3} - 4\sin x$, $f(x) = 4\cos x - \dfrac{6}{x4}$;

2) $F(x) = 2\sqrt{x} + \ln(x + 1)$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x + 1}$?

11.16. 1) $F(x)=\frac{3}{x^2}+2\cos x,\ f(x)=-\frac{6}{x^3}-2\sin x;$

2) $F(x)=\ln(x+2)-\sqrt{x},\ f(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\sqrt{x}}?$

3 Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на R, якщо **(11.17–11.18)**:

11.17. 1) $F(x)=(3x^2+1)^7,\ f(x)=42x(3x^2+1)^6;$

2) $F(x)=\sqrt{x^2+1}-\cos^2 x,\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\sin 2x.$

11.18. 1) $F(x)=(4x^2-3)^6,\ f(x)=48x(4x^2-3)^5;$

2) $F(x)=\sin^2 x+\sqrt{x^2+4},\ f(x)=\sin 2x+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$

Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку **(11.19–11.20)**:

11.19. 1) $F(x)=8x^{-2,5}\sqrt{x},\ f(x)=-\frac{16}{x^3},\ x\in(0;+\infty);$

2) $F(x)=\frac{3}{x^4}+\ln(-x),\ f(x)=\frac{1}{x}-\frac{12}{x^5},\ x\in(-\infty;0).$

11.20. 1) $F(x)=2x^{-1,5}\sqrt{x},\ f(x)=-\frac{2}{x^2},\ x\in(0;+\infty);$

2) $F(x)=\frac{2}{x^5}+e^{-x},\ f(x)=-\frac{10}{x^6}-e^{-x},\ x\in(-\infty;0).$

Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку **(11.21–11.22)**:

11.21. 1) $F(x)=4x-\operatorname{tg}2x,\ f(x)=4+\frac{2}{\cos^2 2x},\ x\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right);$

2) $F(x)=2\sin x\cos x,\ f(x)=2\cos 2x,\ x\in(-\infty;+\infty);$

3) $F(x)=(2x^2+1)^5,\ f(x)=5(2x^2+1)^4,\ x\in(-\infty;+\infty);$

4) $F(x)=\frac{4}{x}-\cos 8x,\ f(x)=8\sin 8x-\frac{4}{x^2},\ x\in(0;+\infty)?$

11.22. 1) $F(x)=\operatorname{ctg}4x+8x,\ f(x)=8-\frac{4}{\sin^2 4x},\ x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right);$

2) $F(x)=\cos^2 x-\sin^2 x,\ f(x)=2\sin 2x,\ x\in(-\infty;+\infty);$

3) $F(x)=(3x+7)^8,\ f(x)=8(3x+7)^7,\ x\in(-\infty;+\infty);$

4) $F(x)=\sin 4x-\frac{6}{x},\ f(x)=4\cos 4x+\frac{6}{x^2},\ x\in(0;+\infty)?$

11.23. Покажіть, що функція $y=2e^{-3x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y'+3y=0$.

11.24. Покажіть, що функція $y = 5e^{4x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y' = 4y$.

11.25. Доведіть, що функція $G(x) = \dfrac{4x^5 - 3x^4 + x^3 - 1}{2x}$ є первісною для функції $g(x) = 8x^3 - 4,5x^2 + x + \dfrac{1}{2x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

11.26. Доведіть, що функція $G(x) = \dfrac{5x^7 - 4x^5 + 2x}{x^2}$ є первісною для функції $g(x) = 25x^4 - 12x^2 - \dfrac{2}{x^2}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо (**11.27–11.28**):

11.27. 1) $F(x) = \ln(2x-1) - \dfrac{1}{2x-1}$, $f(x) = \dfrac{4x}{(2x-1)^2}$, $x \in (0,5; +\infty)$;

2) $F(x) = \sqrt[5]{\sin^3 x}$, $f(x) = \dfrac{3\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$, $x \in (0; \pi)$?

11.28. 1) $F(x) = \ln(2x+1) - \dfrac{1}{2x+1}$, $f(x) = \dfrac{4x}{(2x+1)^2}$, $x \in (-0,5; +\infty)$;

2) $F(x) = \sqrt{\cos^3 x}$, $f(x) = -1,5\sin x\sqrt{\cos x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$?

Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку (**11.29–11.30**):

11.29. 1) $F(x) = |x^2 - 1| - 5x$, $f(x) = 2x - 5$, $x \in (1; +\infty)$;

2) $F(x) = |x^2 - 4| + 7x$, $f(x) = 7 - 2x$, $x \in (-2; 2)$.

11.30. 1) $F(x) = |x^2 - 4| + 4x$, $f(x) = 2x + 4$, $x \in (2; +\infty)$;

2) $F(x) = |x^2 - 1| - 3x$, $f(x) = -2x - 3$, $x \in (-1; 1)$.

4 **11.31.** Доведіть, що функція $F(x) = x^5|x|$ є первісною для функції $f(x) = 6x^4|x|$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

11.32. Доведіть, що функція $F(x) = 3x|x|$ є первісною для функції $f(x) = 6|x|$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

11.33. Чи є розв'язком диференціального рівняння $x^2y' = 1$ функція:

1) $y = 5 - \dfrac{1}{x}$; 2) $y = 4 + x$; 3) $y = \dfrac{1}{x}$; 4) $y = -\dfrac{1}{x} - \sqrt{3}$?

11.34. Чи є розв'язком диференціального рівняння $x^3y' = 2$ функція:

1) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 2) $y = 2 - \dfrac{1}{x^2}$; 3) $y = x^2$; 4) $y = -\dfrac{1}{x^2} - \sqrt{7}$?

11.35. Доведіть, що функція $F(x) = \ln|\sin x|$ є первісною для функції $f(x) = \text{ctg}\, x$ за умови, що $x \neq \pi n,\ n \in Z$.

11.36. Доведіть, що функція $F(x) = -\ln|\cos x|$ є первісною для функції $f(x) = \text{tg}\, x$ за умови, що $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

11.37. Доведіть, що функція $G(x) = \ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$ є первісною для функції $g(x) = \dfrac{6}{x^2-9}$ за умови, що $x \neq -3,\ x \neq 3$.

11.38. Доведіть, що функція $G(x) = \ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$ є первісною для функції $g(x) = \dfrac{4}{x^2-4}$ за умови, що $x \neq -2,\ x \neq 2$.

11.39. Доведіть, що функція $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ є первісною для функції $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, де $x \in R$.

11.40. Доведіть, що функція $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ є первісною для функції $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, де $x \in (1; +\infty)$.

Доведіть, що функція (**11.41–11.42**):

11.41. $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 4x + \dfrac{16}{3}, \text{ якщо } |x| > 2, \\ -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 4x - \dfrac{16}{3}, \text{ якщо } |x| \leqslant 2, \end{cases}$

є первісною для функції $f(x) = |x^2 - 4| + x$.

11.42. $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 - 9x, \text{ якщо } |x| \geqslant 2, \\ -\dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - 36, \text{ якщо } |x| < 2, \end{cases}$

є первісною для функції $f(x) = |x^2 - 9| - 6x$.

11.43. Щорічно кожен автомобіль внаслідок стирання покришок розсіює в повітря 10 кг гумового пилу. Якою кількістю гумового пилу забруднять повітря за рік усі автомобілі невеличкого містечка, у якому мешкають 6000 родин, 20 % яких мають по одному автомобілю, а 5 % – по два автомобілі?

11.44. (*Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 1962 р.*). Знайдіть усі дійсні числа, що є розв'язками рівняння $x^2 + 2x\sin xy + 1 = 0$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

11.45. Заповніть пропуски однією з можливих функцій:

1) $(\ldots)' = 2x$; 2) $(\ldots)' = \cos x$; 3) $(\ldots)' = 0$;
4) $(\ldots)' = 1$; 5) $(\ldots)' = -\sin x$; 6) $(\ldots)' = 3x^2$.

11.46. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 4x^7 - \operatorname{tg} x + 5$; 2) $f(x) = x^{-3} + 3\operatorname{ctg} x$;
3) $f(x) = \dfrac{3}{x^7} + 4\cos x - 18x$; 4) $f(x) = 8\sqrt{x} - 5\sin x + x^9$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 11

1. Поле, площа якого 24 га, зорали дві бригади. Перша зорала $\frac{2}{3}$ поля. Скільки гектарів зорала друга бригада?

А	Б	В	Г	Д
6	8	10	12	16

2. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $4^{2x-3} = 16$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$[0; 1]$	$(1; 2]$	$(2; 3]$	$(3; +\infty)$

3. Знайдіть найбільший від'ємний член арифметичної прогресії 4,9; 4,5; 4,1; ...

А	Б	В	Г	Д
−0,5	−0,4	−0,3	−0,2	−0,1

4. Обчисліть $\log_9 27$.

А	Б	В	Г	Д
3	2	1,5	1	обчислити неможливо

5. Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$	$(0; 5)$	$(0; 5]$	$[5; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup [5; +\infty)$

6. Подайте вираз $\frac{b}{\sqrt[6]{b}}$ у вигляді степеня з основою b.

А	Б	В	Г	Д
$b^{-\frac{5}{6}}$	b^6	$b^{\frac{1}{6}}$	$b^{\frac{5}{6}}$	$b^{-\frac{1}{6}}$

7. Для кожного виразу (1–4) знайдіть тотожно рівний йому вираз (А–Д).

Вираз

1 $(x-3)^2$
2 $(x-3)(x+3)$
3 $(x+3)(x+3)$
4 $(x+1)(x-9)$

Тотожно рівний вираз

А x^2+6x+9
Б x^2-6x+9
В x^2-8x+9
Г x^2+9
Д x^2-9

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Обчисліть $\mathrm{tg}75° + \mathrm{ctg}75°$.

9. Знайдіть $f'(-4)$, якщо $f(x)=\sqrt{8-2x}$.

§ 12. ТАБЛИЦЯ ПЕРВІСНИХ. ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРВІСНИХ

Із попереднього параграфа ви вже знаєте, як перевірити, чи є одна функція первісною для іншої. У цьому параграфі навчимося знаходити первісні (невизначені інтеграли) для деяких відомих функцій.

1. Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

У 10 класі ми склали таблицю похідних. У подальшому для деяких функцій будемо користуватися ще й *таблицею первісних* (*невизначених інтегралів*), яку складемо на основі таблиці похідних.

Тут і в подальшому вважатимемо, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на такому проміжку, на якому визначена кожна з функцій $F(x)$ і $f(x)$.

Для обґрунтування формул з таблиці на с. 147 достатньо перевірити, що похідна від первісної, записаної у другому стовпчику, дорівнює функції, заданій у першому стовпчику.

Перевіримо, наприклад, правильність знаходження первісних для функції $y = x^{\alpha}$ та $y = \frac{1}{x}$.

Оскільки $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right)' = \dfrac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1})' + C' = \dfrac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)x^{\alpha+1-1}+0 = x^{\alpha}$,

то $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ – загальний вигляд первісних для функції x^{α}.

Якщо маємо функцію $f(x)=\dfrac{1}{x}$, то $D(f)$: $x \neq 0$. Розглянемо функцію $F(x) = \ln|x| + C$ при $x > 0$ і $x < 0$.

Якщо $x > 0$, то $F(x) = \ln x + C$, тоді $F'(x)=(\ln x+C)' = \dfrac{1}{x}+0=\dfrac{1}{x}$;

якщо $x < 0$, то $F(x) = \ln(-x) + C$, тоді

$F'(x) = \left(\ln(-x) + C\right)' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)'+0 = \dfrac{1}{-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}$.

Отже, на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$ загальний вигляд первісних для функції $\dfrac{1}{x}$ має вигляд $\ln|x| + C$.

Функція $f(x)$	**Загальний вигляд первісних $F(x) + C$, де C – довільна стала**	**Відповідний запис за допомогою невизначеного інтеграла**
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\, x+C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}\, x+C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$

Приклад 1. Знайти всі первісні для функції:

1) $f(x) = x^7$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$; 3) $f(x)=\sqrt{x}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Урахуємо, що загальний вигляд первісних для функції x^α має вигляд $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.

1) Тоді $F(x) = \dfrac{x^{7+1}}{7+1} + C = \dfrac{x^8}{8} + C$.

2) Оскільки $f(x) = x^{-5}$, то $F(x) = \dfrac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \dfrac{x^{-4}}{-4} + C = -\dfrac{1}{4x^4} + C$.

3) Оскільки $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, то $F(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

4) Маємо $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$. Тоді $F(x) = \dfrac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+C = 3x^{\frac{1}{3}}+C = 3\sqrt[3]{x}+C$.

В і д п о в і д ь. 1) $\dfrac{x^8}{8}+C$; 2) $-\dfrac{1}{4x^4}+C$; 3) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$; 4) $3\sqrt[3]{x}+C$.

При знаходженні первісної (невизначеного інтегралу) для деякої функції цю функцію іноді попередньо спрощують.

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл $\int\left(\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $\cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} = \cos\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right) = \cos x$, то $\int\left(\cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}\right)dx = \int\cos x dx = \sin x + C$.

В і д п о в і д ь. $\sin x + C$.

Часто в задачах ставиться вимога знайти таку первісну, яка б задовольняла певні умови, наприклад, щоб графік цієї первісної проходив через певну точку.

Приклад 3. Для функції $f(x) = \sin x$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $F(x) = -\cos x + C$ – загальний вигляд первісних для функції $f(x) = \sin x$.

2) За умовою графік шуканої первісної проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$. Отже, координати точки A мають задовольняти рівняння первісної, тобто має справджуватися рівність $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Тому, підставляючи $\frac{\pi}{3}$ замість x, а $\frac{1}{2}$ замість $F(x)$ у загальний вигляд первісних, матимемо:

$\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} + C$, тобто $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C$, тоді $C = 1$.

Отже, шукана первісна $F_1(x) = -\cos x + 1$.

Відповідь. $-\cos x + 1$.

2. Правила знаходження первісних (правила інтегрування)

У попередньому пункті ми розглянули питання знаходження первісних (невизначених інтегралів) для функцій, що є похідними відомих вам функцій. А чи можна знайти первісні для функцій $f(x) = x^2 + \sin x$; $f(x) = 3x^5$; $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ тощо? Далі дамо відповідь на це запитання.

Як і у випадку похідної, для знаходження первісної недостатньо лише таблиці первісних. Треба знати ще й *правила знаходження первісних* (*правила інтегрування*). Ці правила схожі на правила диференціювання.

***Правило 1.* Якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F + G$ — первісна для $f + g$.**

Доведення. Оскільки F — первісна для f, а G — первісна для g, то $(F + G)' = F' + G' = f + g$. Тобто $F + G$ є первісною для $f + g$. ■

Користуючись позначенням невизначеного інтеграла, це правило можна записати так:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

тобто ***інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій.***

***Правило 2.* Якщо F — первісна для f, а k — стала, то kF — первісна для kf.**

Доведення. Враховуючи те, що сталий множник можна винести за знак похідної, матимемо: $(kF)' = kF' = kf$, тому kF — первісна для kf. ■

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$**, де** k **— стала,**

тобто ***сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла.***

Правило 3. **Якщо** $F(x)$ **— первісна для** $f(x)$**, а** k **і** l **— деякі сталі, причому** $k \neq 0$**, то** $\frac{1}{k}F(kx+l)$ **— первісна для функції** $f(kx+l)$**.**

Доведення. Враховуючи правило диференціювання складеної функції та те, що $F' = f$, матимемо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+l)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+l)\cdot(kx+l)' = \frac{1}{k}f(kx+l)\cdot k = f(kx+l),$$

тому $\frac{1}{k}F(kx+l)$ — первісна для функції $f(kx+l)$. ■

Використовуючи невизначений інтеграл, це правило можна записати так:

$$\int f(kx+l)dx = \frac{1}{k}F(kx+l) + C.$$

Розглянемо приклади застосування цих правил.

Приклад 4. Знайти загальний вигляд первісних для функції:

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{\cos^2 x}$; 2) $f(x) = 5e^x$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\frac{x^4}{4}$ — первісна для x^3, а $\operatorname{tg} x$ — первісна для $\frac{1}{\cos^2 x}$, то, використовуючи правило 1, для даної функції матимемо загальний вигляд первісних: $F(x) = \frac{x^4}{4} + \operatorname{tg} x + C$.

2) Оскільки e^x — первісна для e^x, то для даної функції, використовуючи правило 2, матимемо загальний вигляд первісних: $F(x) = 5e^x + C$.

Відповідь. 1) $\frac{x^4}{4} + \operatorname{tg} x + C$; 2) $5e^x + C$.

Приклад 5. Знайти $\int\left(4x^3 - \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$.

Розв'язання. Використовуючи правила 1 і 2, матимемо:

$$\int\left(4x^3 - \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx = \int 4x^3dx - \int\frac{2}{\sin^2 x}dx = 4\int x^3dx - 2\int\frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= 4\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot(-\mathrm{ctg}\,x) + C = x^4 + 2\mathrm{ctg}\,x + C.$$

Відповідь. $x^4 + 2\mathrm{ctg}x + C$.

Приклад 6. Знайти загальний вигляд первісних для функції

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right).$$

Розв'язання. Для $\cos x$ однією з первісних є $\sin x$. Використовуючи правило 3, матимемо загальний вигляд первісних:

$$F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + C.$$

Відповідь. $\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + C$.

Приклад 7. Для функції $f(x) = \left(\frac{1}{9}x - 1\right)^8$ знайти первісну $F(x)$ таку, що $F(18) = 3$.

Розв'язання. Використовуючи правило 3 і той факт, що однією з первісних для функції x^8 є $\frac{x^9}{9}$, матимемо:

$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{9}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{9}x - 1\right)^9}{9} + C = \left(\frac{1}{9}x - 1\right)^9 + C.$$

Оскільки $F(18) = 3$, отримаємо:

$3 = \left(\frac{1}{9}\cdot 18 - 1\right)^9 + C$, тобто $3 = 1^9 + C$, звідси $C = 2$.

Отже, $F(x) = \left(\frac{1}{9}x - 1\right)^9 + 2$.

Відповідь. $\left(\frac{1}{9}x - 1\right)^9 + 2$.

У деяких задачах на знаходження первісної (невизначеного інтеграла) спочатку доцільно звести формулу функції до вигляду, зручного для інтегрування.

Приклад 8. Знайти $\int(\sin 2x\cos 3x + \cos 2x\sin 3x)dx$.

Розв'язання. Спростимо підінтегральний вираз, застосувавши формулу синуса суми, матимемо:

$$\int \sin(2x+3x)dx = \int \sin 5x dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

В і д п о в і д ь. $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

У деяких задачах звести функцію до вигляду, зручного для інтегрування, можна за допомогою деяких штучних прийомів.

Приклад 9. Знайти первісну для функції $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо дріб $\frac{x}{(x-1)^2}$ у вигляді суми двох дробів: $\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

Отже, $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$. Тоді $F(x) = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$.

В і д п о в і д ь: $\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$.

3. Застосування первісної у фізиці

Якщо в задачі відомий закон прямолінійного руху тіла $s = s(t)$, то, щоб знайти його швидкість у момент часу t, треба знайти похідну: $v(t) = s'(t)$. Важливою є також обернена задача: за даною в кожний момент часу швидкістю визначити закон руху. Зрозуміло, що $s(t)$ є первісною для функції $v(t)$.

Аналогічно, оскільки прискорення $a(t) = v'(t)$, то $v(t)$ – первісна для функції $a(t)$. Таким чином, можна відновити закон руху за заданою швидкістю, а швидкість – за прискоренням.

Приклад 10. Точка рухається по прямій з прискоренням $a(t) = -2t$ (м/с^2). Знайти швидкість точки $v(t)$ як функцію від часу, якщо в момент часу $t = 4$ с швидкість точки була 10 м/с.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $v(t)$ – первісна для $a(t)$. Маємо:

$$v(t) = -2 \cdot \frac{t^2}{2} + C = -t^2 + C.$$

2) Оскільки для $t = 4$ с відомо, що $v = 10$, тобто $v(4) = 10$, то $10 = -4^2 + C$, отже, $C = 26$.

Таким чином, отримали закон швидкості: $v(t) = 26 - t^2$.

В і д п о в і д ь. $v(t) = 26 - t^2$.

Приклад 11. Швидкість точки, що рухається по прямій, задається рівнянням $v(t) = 1 + \frac{1}{2}t$ (t – у секундах, v – у м/с, s – у метрах). У момент часу $t = 2$ точка віддалена на $s = 7$ від початку координат. На якій відстані від початку координат буде знаходитися точка в момент часу $t = 10$?

Розв'язання. 1) Оскільки $s(t)$ – первісна для $v(t)$, то

$$s(t) = t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = t + \frac{t^2}{4} + C.$$

2) За умовою, $s(2) = 7$, тому $7 = 2 + \frac{2^2}{4} + C$, отже, $C = 4$.

Тоді $s(t) = t + \frac{t^2}{4} + 4$ – закон руху тіла.

3) Для $t = 10$ маємо: $s(10) = 10 + \frac{10^2}{4} + 4 = 39$ (м).

Відповідь. 39 м.

- Запам'ятайте таблицю первісних (невизначених інтегралів).
- Сформулюйте і доведіть правила знаходження первісних.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Знайдіть загальний вигляд первісних для функції (**12.1–12.2**):

12.1. 1) $f(x) = -3$; 2) $f(x) = x^7$; 3) $f(x) = 4^x$; 4) $f(x) = \cos x$.

12.2. 1) $f(x) = 2$; 2) $f(x) = x^{10}$; 3) $f(x) = 5^x$; 4) $f(x) = \sin x$.

Знайдіть невизначений інтеграл (**12.3–12.4**):

12.3. 1) $\int x^3 dx$; 2) $\int x^4 dx$; 3) $\int x^{-3} dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

12.4. 1) $\int x^9 dx$; 2) $\int x^8 dx$; 3) $\int x^{-5} dx$; 4) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$.

12.5. Знайдіть три різні первісні для функції:

1) $f(x) = 1$; 2) $f(x) = x^{0,5}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^8}$; 4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

12.6. Знайдіть дві різні первісні для функції:

1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^6}$; 4) $f(x) = \sqrt[7]{x}$.

2 Знайдіть загальний вигляд первісних для функції (**12.7–12.10**):

12.7. 1) $f(x) = 4e^x$; 2) $f(x) = \frac{5}{\cos^2 x}$;

3) $f(x) = 7x^6$; 4) $f(x) = \frac{3}{x}$.

12.8. 1) $f(x) = \frac{3}{\sin^2 x}$; 2) $f(x) = 10e^x$;

3) $f(x) = \frac{5}{x}$; 4) $f(x) = 4x^3$.

12.9. 1) $f(x) = 4 - x$; 2) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$;

3) $f(x) = 10x^4 + 16x^7$; 4) $f(x) = x^3 - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

12.10. 1) $f(x) = x + 2$; 2) $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$;

3) $f(x) = 18x^2 - 22x^{10}$; 4) $f(x) = x^5 + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Знайдіть невизначений інтеграл **(12.11–12.12)**:

12.11. 1) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx$; 2) $\int(3\sin x - 4\cos x)dx$.

12.12. 1) $\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x}\right)dx$; 2) $\int(2\cos x + 5\sin x)dx$.

Знайдіть загальний вигляд первісних для функції **(12.13–12.14)**:

12.13. 1) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}}$.

12.14. 1) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{5}{\sqrt[6]{x}}$; 2) $f(x) = \frac{4}{x\sqrt{x}} + \frac{8}{\sqrt[3]{x}}$.

Знайдіть невизначений інтеграл **(12.15–12.16)**:

12.15. 1) $\int(2+\sqrt[7]{x})dx$; 2) $\int\left(\frac{12}{\sqrt[5]{x}} - x^{\frac{1}{3}}\right)dx$.

12.16. 1) $\int(\sqrt[9]{x} - 3)dx$; 2) $\int\left(\frac{7}{\sqrt[8]{x}} + 4^{\frac{1}{4}}\right)dx$.

Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що задовольняє дану умову **(12.17–12.18)**:

12.17. 1) $f(x) = 5x^4$, $F(-1) = 2$; 2) $f(x) = \sin x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

12.18. 1) $f(x) = 3x^2$, $F(-1) = 3$; 2) $f(x) = \cos x$, $F(\pi) = -1$.

12.19. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку M:

1) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $M\left(\frac{3\pi}{4}; -2\right)$; 2) $f(x) = e^x$, $M(0; 1)$.

12.20. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку N:

1) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $N\left(\frac{3\pi}{4}; -3\right)$; 2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $N(1; 0)$.

Для даної функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що задовольняє дану умову, якщо **(12.21–12.22)**:

12.21. 1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $F(8) = -1$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$, $F(1) = 3$.

12.22. 1) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $F(1)=1{,}8$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $F(8)=-2$.

Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку P, якщо **(12.23–12.24)**:

12.23. $f(x)=5^x$, $P\left(\log_5 4;\ \dfrac{2}{\ln 5}\right)$. **12.24.** $f(x)=4^x$, $P\left(\log_4 3;\ \dfrac{4}{\ln 4}\right)$.

3 Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через дану точку, якщо **(12.25–12.26)**:

12.25. 1) $f(x)=9x^2-2x$, $A(2;\ -2)$; 2) $f(x)=3+\dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $A(1;\ 0)$.

12.26. 1) $f(x)=4x^3+6x$, $B(-1;\ 2)$; 2) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-5$, $B(1;\ -1)$.

Для функції $f(x)$ знайдіть загальний вигляд первісних **(12.27–12.32)**:

12.27. 1) $f(x)=(3x-2)^6$; 2) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{9}\right)$;

3) $f(x)=e^{4x+7}$; 4) $f(x)=\dfrac{6}{\sin^2 3x}$.

12.28. 1) $f(x)=(4x+1)^5$; 2) $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)$;

3) $f(x)=e^{5x-11}$; 4) $f(x)=\dfrac{8}{\cos^2 2x}$.

12.29. 1) $f(x)=-\dfrac{1}{(6x+1)^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{10}{(3x-5)^3}$;

3) $f(x)=\dfrac{12}{(x+11)^5}$; 4) $f(x)=\dfrac{24}{(2x-3)^7}$.

12.30. 1) $f(x)=\dfrac{10}{(2x-1)^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{9}{(3x+1)^4}$;

3) $f(x)=-\dfrac{16}{(4x+3)^3}$; 4) $f(x)=-\dfrac{18}{(x-3)^{10}}$.

12.31. 1) $f(x)=(6x-1)^{\frac{5}{6}}$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{2x+11}$;

3) $f(x)=\sqrt[8]{(8x+2)^5}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{15x-2}}$.

12.32. 1) $f(x)=(8x+1)^{\frac{7}{8}}$; 2) $f(x)=\sqrt[5]{4x-13}$;

3) $f(x)=\sqrt{(4x-1)^7}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{6x+3}}$.

Знайдіть невизначений інтеграл (**12.33–12.34**):

12.33. 1) $\int \frac{dx}{4x-5}$; 2) $\int 3^{4+2x}dx$.

12.34. 1) $\int \frac{dx}{8x+2}$; 2) $\int 5^{3x-9}dx$.

Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через дану точку (**12.35–12.36**):

12.35. 1) $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{12}; 1{,}5\right)$; 2) $f(x)=\frac{6}{3x+4}$, $C(-1; 3)$.

12.36. 1) $f(x)=\cos\left(4x-\frac{\pi}{12}\right)$, $D\left(\frac{\pi}{16}; \frac{1}{8}\right)$; 2) $f(x)=\frac{8}{4x+5}$, $D(-1; 9)$.

12.37. Швидкість руху точки задано рівнянням $v(t) = 3 + 2t$ (м/с). Знайдіть рівняння руху $s = s(t)$, якщо в момент часу $t = 5$ с точка знаходилася на відстані $s = 20$ м від початку координат.

12.38. Прискорення точки задано рівнянням $a(t) = 7 - 2t$ (м/с^2). Знайдіть рівняння швидкості $v = v(t)$, якщо в момент часу $t = 2$ с швидкість точки дорівнювала 9 м/с.

Знайдіть невизначений інтеграл (**12.39–12.40**):

12.39. 1) $\int (3^x \cdot 7^x)dx$; 2) $\int 5^x(1-5^{-x})dx$.

12.40. 1) $\int \frac{6^x}{2^x}dx$; 2) $\int 7^x(7^{-x}+1)dx$.

Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що задовольняє дану умову (**12.41–12.42**):

12.41. 1) $f(x) = 10e^{5x-4}$, $F(0{,}8) = 5$; 2) $f(x) = \frac{1}{2-3x}$, $F\left(\frac{1}{3}\right) = 1$.

12.42. 1) $f(x) = 4e^{2x+3}$, $F(-1{,}5) = 7$; 2) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$, $F(0) = 5$.

4 Для функції $f(x)$ знайдіть загальний вигляд первісних (**12.43–12.44**):

12.43. 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \frac{4}{\sin^2 \frac{x}{2}}$; 2) $f(x) = \sqrt{6x+2} - e^{4-x}$.

12.44. 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} - \frac{3}{\cos^2 \frac{x}{4}}$; 2) $f(x) = \sqrt{3x-4} + e^{1-x}$.

12.45. Для функції $f(x) = \sqrt[3]{6x+1}$ знайдіть первісну, яка проходить через точку $\left(0; 3\frac{1}{8}\right)$.

12.46. Для функції $f(x)=\sqrt[4]{8x+1}$ знайдіть первісну, яка проходить через точку (0; 2,1).

Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)$, попередньо спростивши її формулу (**12.47–12.48**):

12.47. 1) $f(x) = \sin x \cos x$; 2) $f(x) = \cos 5x \cos\frac{\pi}{8} - \sin 5x \sin\frac{\pi}{8}$;

3) $f(x) = (x^3 - 2x)^2$; 4) $f(x) = \frac{x^5-3x^2+2x}{x^2}$.

12.48. 1) $f(x) = \cos^2\frac{x}{8} - \sin^2\frac{x}{8}$;

2) $f(x) = \sin 3x \cos\frac{\pi}{12} - \cos 3x \sin\frac{\pi}{12}$;

3) $f(x) = (x^2 - x)^2$; 4) $f(x) = \frac{x^7-5x+3}{x}$.

12.49. Знайдіть первісну для функції $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, один з нулів якої дорівнює 1.

12.50. Знайдіть первісну для функції $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$, один з нулів якої дорівнює −1.

12.51. Точка рухається по прямій з прискоренням $a(t) = 5 - 4t$ (м/с²). У момент часу $t = 3$ с швидкість точки була 7 м/с. Якою була швидкість точки в момент часу $t = 5$ с?

12.52. Швидкість точки, що рухається по прямій, задається рівнянням $v(t) = 6t + 18$ (м/с). У момент часу $t = 1$ с точка перебувала на відстані $s = 2$ м від початку координат. На якій відстані від початку координат перебуватиме точка в момент часу $t = 3$ с?

Знайдіть загальний вигляд первісних для функції (**12.53–12.54**):

12.53. 1) $f(x) = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2$; 2) $f(x) = \frac{6x-1}{x+5}$;

3) $f(x) = \sin x \cos 3x$; 4) $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$.

12.54. 1) $f(x) = (\sin x - \cos x)^2$; 2) $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$;

3) $f(x) = \sin 3x \cdot \sin 5x$; 4) $f(x) = (e^x - e^{-x})^2$.

Розв'яжіть рівняння $F(x) = 0$, де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, $F(a) = 0$, якщо (**12.55–12.56**):

12.55. 1) $f(x) = 3x^2 - 2x - 25$, $a = 1$; 2) $f(x) = 2\cos 0,5x$, $a = \frac{\pi}{3}$.

12.56. 1) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$, $a = -2$; 2) $f(x) = 2\sin 2x$, $a = \frac{\pi}{2}$.

12.57. Для функції $f(x) = 7 - 6x$ знайдіть таку первісну, множиною значень якої є проміжок $(-\infty; 4]$.

12.58. Для функції $f(x) = 4x - 2$ знайдіть таку первісну, множиною значень якої є проміжок $[3; +\infty)$.

Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через дану точку **(12.59–12.60)**:

12.59. 1) $f(x) = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1$; $\left(\dfrac{\pi}{2}; 14\right)$;

2) $f(x) = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}$; $(0; 9)$;

3) $f(x) = 1 + tg^2 x$; $\left(\dfrac{\pi}{3}; 0\right)$; 4) $f(x) = ctg^2 x - 9$; $\left(-\dfrac{\pi}{4}; 1\right)$;

5) $f(x) = \sin\dfrac{x}{6}\cos\dfrac{5x}{6} + \cos\dfrac{x}{6}\sin\dfrac{5x}{6}$; $\left(\dfrac{3\pi}{4}; 7\right)$;

6) $f(x) = \cos\dfrac{5x}{3}\cos\dfrac{2x}{3} + \sin\dfrac{5x}{3}\sin\dfrac{2x}{3}$; $\left(\dfrac{2\pi}{3}; -2\right)$.

12.60. 1) $f(x) = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}$; $B\left(\dfrac{\pi}{2}; 13\right)$;

2) $f(x) = 8\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$; $B(0; -5)$;

3) $f(x) = ctg^2 x + 1$; $B\left(\dfrac{\pi}{2}; 4\right)$; 4) $f(x) = 3 + tg^2 x$; $B\left(-\dfrac{\pi}{6}; 1\right)$;

5) $f(x) = \cos\dfrac{x}{7}\cos\dfrac{6x}{7} - \sin\dfrac{x}{7}\sin\dfrac{6x}{7}$; $B\left(\dfrac{5\pi}{6}; -2\right)$;

6) $f(x) = \sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}$; $B\left(-\dfrac{3\pi}{4}; 3\right)$.

Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що задовольняє дану умову **(12.61–12.62)**:

12.61. 1) $F(x) = \sin x + \cos 3x$, $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1\dfrac{5}{12}$;

2) $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{x+4}} - 8$, $F(1) = 0$.

12.62. 1) $f(x) = 4\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$;

2) $f(x) = \dfrac{12}{\sqrt{3x-6}} + 1$, $F(5) = 0$.

12.63. Для функції $f(x) = 2x + 3$ знайдіть первісну, графік якої дотикається до осі абсцис.

12.64. Для функції $f(x) = 2x - 5$ знайдіть первісну, графік якої дотикається до осі абсцис.

12.65. Для функції $f(x) = 3x^3$ знайдіть первісну, дотичною до графіка якої є пряма $y = 3x + 5$.

12.66. Для функції $f(x) = 2x$ знайдіть первісну, дотичною до графіка якої є пряма $y = x + 2$.

Знайдіть **(12.67–12.70)**:

12.67. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}$; 2) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

12.68. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}}$; 2) $\int \frac{xdx}{(x+1)^3}$.

12.69. 1) $\int \sin^2 xdx$; 2) $\int \cos^2 2xdx$;

3) $\int \cos^4 xdx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

12.70. 1) $\int \cos^2 xdx$; 2) $\int \sin^2 5xdx$;

3) $\int \sin^4 xdx$; 4) $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

12.71. Лікарі радять під час спеки пити багато води, адже втрата людиною 10–12 % вологи тіла є небезпечною для життя. Припустимо, що маса тіла дівчини – 54 кг, а 65 % маси тіла складає вода. Втрата якої кількості води є небезпечною для цієї дівчини?

12.72. (*Всеукраїнська студентська олімпіада для педагогічних вишів, 1991 р.*) Доведіть, що існує нескінченно багато натуральних чисел, які не можна подати у вигляді суми кубів трьох натуральних чисел.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 12

1. Обчисліть $0{,}7 : \frac{7}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{49}{80}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{10}$

2. Укажіть кількість натуральних розв'язків нерівності $8 - 3x > 2$.

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	чотири	безліч

3. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії 8; 4; 2; ...

А	Б	В	Г	Д
$15\frac{1}{2}$	$16\frac{3}{4}$	$15\frac{3}{4}$	$15\frac{7}{8}$	$15\frac{1}{4}$

4. Розташуйте числа a, b і c в порядку зростання, якщо $a = \sin 90°$, $b = \sin 89°$, $c = \sin 107°$.

А	Б	В	Г	Д
$a < b < c$	$a < c < b$	$b < a < c$	$c < a < b$	$c < b < a$

5. Знайдіть $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, якщо $f(x) = 2\cos x - 3$.

А	Б	В	Г	Д
−5	−1	2	−2	0

6. Укажіть проміжок, якому належить число $\sqrt[5]{33}$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 1)	(1; 2)	(2; 3)	(3; 4)	(4; $+\infty$)

7. Установіть відповідність між функціями, заданими формулою (1–4), і значеннями їх похідних у точці $x = 0$ (А–Д).

Функція

1 $y = \ln(3x + 1)$

2 $y = x\cos x$

3 $y = 2e^x + 3x$

4 $y = 8\sin x + x$

Значення похідної

А 1

Б 3

В 5

Г 7

Д 9

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть значення виразу $\frac{m+2}{m^2-2m+1} \cdot \frac{5m-5}{m^2-4} - \frac{5}{m-2}$, якщо $m = 1{,}2$.

9. Обчисліть значення виразу $5^{\frac{2}{\log_3 5}} - \log_2 \sqrt[4]{2}$.

§ 13. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЙОГО ФІЗИЧНИЙ ТА ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

У цьому параграфі познайомимося з одним із найважливіших понять математичного аналізу – поняттям *визначеного інтеграла*.

1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

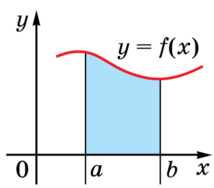
Задача 1 **(***про площу криволінійної трапеції***).** Нехай дано неперервну функцію $y = f(x)$, яка на проміжку $[a;\ b]$ набуває лише невід'ємних значень. Фігуру, яка обмежена графіком цієї функції, віссю абсцис та прямими $x = a$, $x = b$, називають *криволінійною трапецією* (мал. 13.1).

Кожна криволінійна трапеція має певну площу. Доведемо, що площу криволінійної трапеції можна знайти за допомогою первісної.

Теорема (про площу криволінійної трапеції). **Нехай $y = f(x)$ – неперервна на проміжку $[a;\ b]$ функція, яка на цьому проміжку набуває лише невід'ємних значень, а $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на цьому проміжку. Тоді площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис та прямими $x = a$ і $x = b$, можна знайти за формулою:**

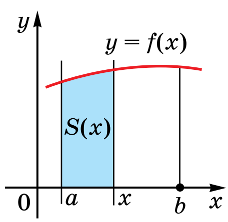
$$S = F(b) - F(a).$$

Доведення. Нехай x – довільна точка з проміжку $[a;\ b]$. Позначимо через $S(x)$ площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис, прямою $x = a$ та прямою, що проходить через точку $(x;\ 0)$ перпендикулярно до осі абсцис (мал. 13.2). Зрозуміло, що $S(x)$ – функція від x.



Мал. 13.1

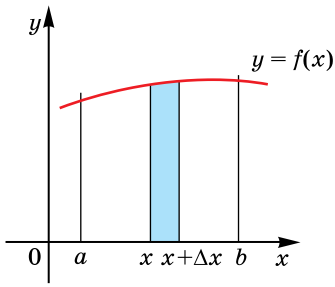
Доведемо, що $S'(x) = f(x)$ для будь-якого $x \in [a;\ b]$. Для цього достатньо довести (за означенням похідної), що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$.



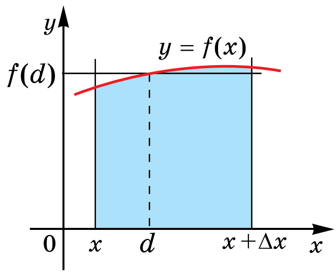
Мал. 13.2

Розглянемо випадок, коли $\Delta x > 0$ (випадок $\Delta x < 0$ розглядається аналогічно). Оскільки $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, то ΔS – площа фігури, заштрихованої на малюнку 13.3.

Розглянемо тепер прямокутник, що має таку саму площу ΔS, у якого одна зі сторін дорівнює відрізку з кінцями в точках $(x;\ 0)$ і $(x + \Delta x;\ 0)$. Такий прямокутник зображено на малюнку 13.4. Оскільки функція $y = f(x)$ неперервна, то висота цього прямокутника дорівнює $f(d)$, де $d \in [x;\ x + \Delta x]$. Тому $\Delta S = f(d) \cdot \Delta x$, а отже, $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(d)$.



Мал. 13.3



Мал. 13.4

Оскільки $y = f(x)$ – неперервна функція, то $d \to x$ і $f(d) \to f(x)$, якщо $\Delta x \to 0$. Отже, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$. А це означає, що $S'(x) = f(x)$, тобто $S(x)$ – первісна для функції $f(x)$.

За основною властивістю первісної для всіх $x \in [a; b]$ маємо: $S(x) = F(x) + C$, де $F(x)$ – одна з первісних функції $y = f(x)$, а C – деяка стала. Щоб знайти C, замість x у формулу первісної $S(x)$ підставимо число a. Очевидно, що $S(a) = 0$. Тоді $0 = F(a) + C$, отже, $C = -F(a)$.

Таким чином, $S(x) = F(x) - F(a)$. Враховуючи те, що шукана площа криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$, підставимо замість x число b в останню формулу і отримаємо:

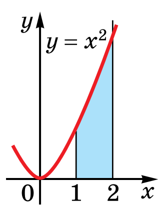
$$S = S(b) = F(b) - F(a). \blacksquare$$

Нехай $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Різницю $F(b) - F(a)$ називають *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»).

Для обчислення різниці $F(b) - F(a)$ можна користуватися будь-якою з первісних функції $f(x)$, загальний вигляд яких $F(x) + C$. Але $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. Тому прийнято використовувати ту первісну, у якій $C = 0$.

Зауважимо, що в математиці є й інше означення визначеного інтеграла (через інтегральні суми). Розглядати це означення в даному підручнику не будемо.



Мал. 13.5

Приклад 1. Обчислити площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x) = x^2$ та прямими $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

Р о з в ' я з а н н я. На малюнку 13.5 зображено дану криволінійну трапецію. Для функції

$f(x) = x^2$ однією з первісних є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Тоді

$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Відповідь. $2\frac{1}{3}$.

Задача 2 (про обчислення переміщення точки). Нехай швидкість точки, що рухається прямолінійно, у кожний момент часу $t \in [a; b]$ можна задати функцією $v = v(t)$. На прямій, уздовж якої рухається точка, виберемо систему координат і позначимо через $s(t)$ координату точки в момент часу t. Тоді переміщення точки за проміжок часу $[a; b]$ буде дорівнювати $s(b) - s(a)$. Оскільки швидкість є похідною від координати, тобто $v(t) = s'(t)$, то $s(t)$ – первісна для функції $v(t)$.

Отже, переміщення точки, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$ за проміжок часу $[a; b]$, дорівнює різниці $s(b) - s(a)$, де $s(t)$ – первісна для $v(t)$, тобто дорівнює інтегралу

$$\int_a^b v(t)dt.$$

Приклад 2. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 3t^2 + 1$ (м/с). Знайти переміщення точки за перші дві секунди руху.

Розв'язання. Маємо $s(t) = t^3 + t$ – один з можливих законів руху даної матеріальної точки. Обчислимо переміщення s точки за перші дві секунди руху:

$s = s(2) - s(0) = (2^3 + 2) - (0^3 + 0) = 10$ (м).

Відповідь. 10 м.

2. Геометричний зміст та фізичний зміст визначеного інтеграла

Виходячи з вищезазначеного, можна з'ясувати геометричний та фізичний зміст визначеного інтеграла.

Геометричний зміст визначеного інтеграла полягає у тому, що:

інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від функції $y = f(x)$, яка неперервна на проміжку $[a; b]$ і набуває на цьому проміжку лише невід'ємних значень, є площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком цієї функції та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$.

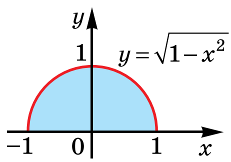
Геометричний зміст інтеграла можна використовувати для знаходження визначених інтегралів у тому випадку, коли первісну функції $y = f(x)$ знайти важко або неможливо, а площу фігури знайти легко, виходячи з геометричних міркувань.

Приклад 3. Обчислити $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$, використовуючи геометричний зміст інтеграла.

Розв'язання. Шуканий інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \sqrt{1-x^2}$ і $y = 0$ (мал. 13.6). Піднесемо обидві частини рівності $y = \sqrt{1-x^2}$ до квадрата і запишемо її у вигляді $x^2 + y^2 = 1$, де $y \geqslant 0$. Отже, ця криволінійна трапеція є півкругом радіуса 1. Тому

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.



Мал. 13.6

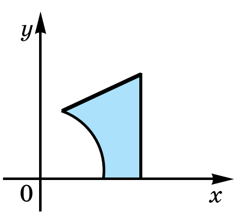
Фізичний зміст визначеного інтеграла полягає у тому, що:

інтеграл $\int_{a}^{b} v(t)dt$ є переміщенням за проміжок часу $[a; b]$ матеріальної точки, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$.

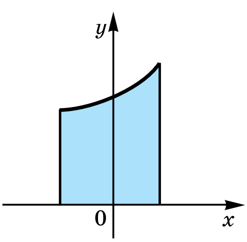
- Що називають криволінійною трапецією? • Сформулюйте теорему про площу криволінійної трапеції. • Що називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$? • У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла? • У чому полягає фізичний зміст визначеного інтеграла?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

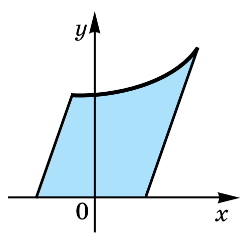
1 **13.1.** Які з фігур (мал. 13.7–13.12) можна назвати криволінійними трапеціями?



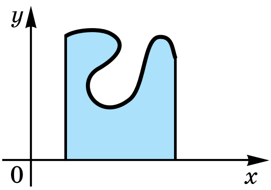
Мал. 13.7



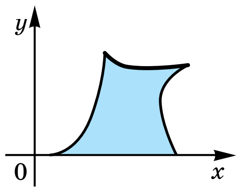
Мал. 13.8



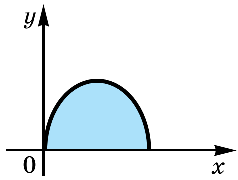
Мал. 13.9



Мал. 13.10

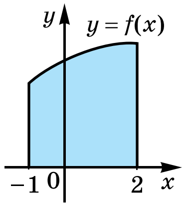


Мал. 13.11

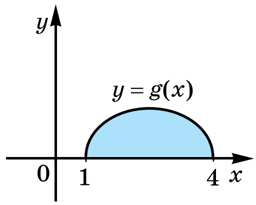


Мал. 13.12

13.2. Запишіть у вигляді визначеного інтеграла площу кожної з фігур, зображених на малюнках 13.13 та 13.14.



Мал. 13.13



Мал. 13.14

2 Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями **(13.3–13.4)**:

13.3. 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ і $x = 3$;
2) $y = x$, $y = 0$, $x = 2$ і $x = 5$;
3) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{6}$;
4) $y = 1 + x^2$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 1$.

13.4. 1) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ і $x = 2$;
2) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$ і $x = 4$;
3) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{\pi}{2}$;
4) $y = 1 + x$, $y = 0$, $x = 1$ і $x = 4$.

Знайдіть, виконавши попередньо схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями **(13.5–13.6)**:

13.5. 1) $y = x^3$, $y = 0$ і $x = 2$; 2) $y = 4 - x^2$ і $y = 0$.

13.6. 1) $y = x$, $y = 0$ і $x = 4$; 2) $y = 1 - x^2$ і $y = 0$.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями **(13.7–13.12)**:

13.7. 1) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 2$;
2) $y = 2^x$, $y = 0$, $x = -1$ і $x = 0$;
3) $y = 2 + e^x$, $y = 0$, $x = -1$ і $x = 1$;
4) $y = 3^x \ln 3$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 1$.

13.8. 1) $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$ і $x = 0$;
2) $y = 5^x$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 1$;
3) $y = 1 + e^x$, $y = 0$, $x = -2$ і $x = 2$;
4) $y = 2^x \ln 2$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 1$.

13.9. 1) $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$;

2) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 0{,}1$, $x = 10$.

13.10. 1) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^2$;

2) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = -5x = -0{,}2$.

13.11. 1) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 9$;

2) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 8$.

13.12. 1) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$;

2) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 8$.

13.13. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 6 + 0{,}4t$ (м/с). Знайдіть переміщення тіла:
1) за перші 2 с після початку відліку часу;
2) за інтервал часу від $t_1 = 4$ с до $t_2 = 10$ с.

13.14. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 8 + 0{,}6t$ (м/с). Знайдіть переміщення точки:
1) за перші 4 с після початку відліку часу;
2) за інтервал часу від $t_1 = 10$ с до $t_2 = 20$ с.

3 Знайдіть, виконавши попередньо схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями (**13.15–13.18**):

13.15. 1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$ і $x = 3$;

2) $y = x^2 - 2x$, $y = 0$ і $x = -1$;

3) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ і $x = 4$; 4) $y = \sqrt{x+1}$, $y = 0$ і $x = 0$.

13.16. 1) $y = x^2 - 4$, $y = 0$ і $x = 3$;

2) $y = x^2 + 2x$, $y = 0$ і $x = -4$;

3) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ і $x = 9$; 4) $y = \sqrt{x+4}$, $y = 0$ і $x = 0$.

13.17. 1) $y = \cos 4x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{8}$ і $x = \frac{\pi}{8}$;

2) $y = \sin\frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$ і $x = \pi$;

3) $y = e^{3x-6}$, $y = 0$, $x = 2$ і $x = 3$;

4) $y = \frac{1}{x+1}$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 1$.

13.18. 1) $y = \sin 2x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \frac{\pi}{2}$;

2) $y = \cos\frac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 2\pi$;

3) $y = e^{5x+1}$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 2$;

4) $y = \frac{1}{x-2}$, $y = 0$, $x = 3$ і $x = 5$.

Побудуйте фігуру, площа якої дорівнює даному інтегралу, та обчисліть її площу **(13.19–13.20)**:

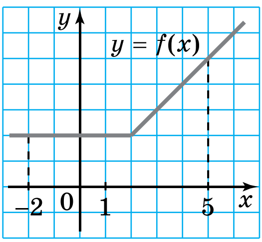
13.19. 1) $\int_{-1}^{2}(5+3x)dx$; 2) $\int_{4}^{5}(x^2-3x)dx$.

13.20. 1) $\int_{1}^{4}(2x-1)dx$; 2) $\int_{1}^{2}(x^2+2x)dx$.

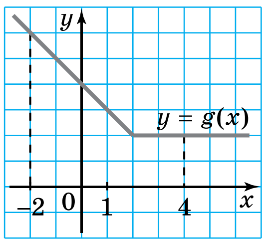
Використовуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, обчисліть **(13.21–13.22)**:

13.21. $\int_{1}^{5}(2x-1)dx$. **13.22.** $\int_{3}^{5}(2x+1)dx$.

13.23. Обчисліть $\int_{-2}^{5}f(x)dx$, якщо графік функції $y = f(x)$ зображено на малюнку 13.15.



Мал. 13.15



Мал. 13.16

13.24. Обчисліть $\int_{-2}^{4}g(x)dx$, якщо графік функції $y = g(x)$ зображено на малюнку 13.16.

Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями **(13.25–13.28)**:

13.25. 1) $y = 1 + 2\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

2) $y = 2 - \sin\frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

13.26. 1) $y = 1 + 2\sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

2) $y = 3 - \cos\frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

13.27. $y = \frac{1}{2x+3}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 3$.

13.28. $y = \dfrac{1}{3x-5}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$.

13.29. Швидкість потяга (у м/с), що рухається під уклін, можна обчислити за формулою $v(t) = 0,2t + 15$. Знайдіть довжину уклону, якщо потяг подолав його за 20 секунд.

13.30. Швидкість автомобіля (у м/с) під час гальмування можна обчислити за формулою $v(t) = 18 - 1,2t$. Знайдіть відстань, яку подолав автомобіль, якщо він зупинився через 15 с після початку гальмування.

13.31. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 5t - 0,2t^2$ (м/с). Знайдіть:
1) переміщення тіла від початку руху до зупинки;
2) прискорення тіла в момент часу $t = 10$ с.

13.32. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 4t - 0,4t^2$ (м/с). Знайдіть:
1) переміщення тіла від початку руху до зупинки;
2) прискорення тіла в момент часу $t = 5$ с.

13.33. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 2t - 3$ (м/с). За який час, починаючи від початку руху, тіло подолає шлях завдовжки 4 м?

13.34. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 4t + 1$ (м/с). За який час, починаючи від початку руху, тіло подолає шлях, що дорівнює 21 м?

Обчисліть інтеграл, використовуючи його геометричний зміст **(13.35–13.36)**:

13.35. 1) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

13.36. 1) $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{6} \sqrt{36 - x^2}\,dx$.

Знайдіть, виконавши попередньо схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями **(13.37–13.40)**:

13.37. 1) $y = \sqrt{|x|}$, $y = 0$, $x = -4$ і $x = -1$;

2) $y = |\sin x|$, $y = 0$, $x = \pi$ і $x = \dfrac{5\pi}{3}$.

13.38. 1) $y = \sqrt{|x|}$, $y = 0$, $x = -9$ і $x = -1$;

2) $y = |\cos x|$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ і $x = \dfrac{11\pi}{6}$.

4 **13.39.** $y = \begin{cases} 2\cos 2x, & -\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 0, \\ 2 - \dfrac{1}{3}x, & 0 < x \leqslant 6 \end{cases}$ і $y = 0$.

13.40. $y=\begin{cases}1+\dfrac{1}{4}x, & -4\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-\sin 2x, & 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$ і $y = 0$.

13.41. Матеріальна точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 3t^2 + 1$ (у м/с^2). Знайдіть шлях, який пройшла точка за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 2$ с, якщо в момент часу $t = 1$ с її швидкість була 5 м/с.

13.42. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 2t - 1$ (у м/с^2). Знайдіть шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1 = 3$ с до $t_2 = 6$ с, якщо в момент часу $t = 2$ с його швидкість була 7 м/с.

13.43. При якому значенні параметра a ($a < 0$) площа фігури, обмеженої лініями $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = a$ та $x = -1$, дорівнює $\dfrac{10}{11}$?

13.44. При якому значенні параметра a ($a > 0$) площа фігури, обмеженої лініями $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$ та $x = a$, дорівнює $\dfrac{7}{8}$?

Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчисліть **(13.45–13.46):**

13.45. 1) $\int\limits_0^4 \sqrt{4x - x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_{-1}^3 (|x-3| + 4x)\,dx$.

13.46. 1) $\int\limits_{-2}^0 \sqrt{-x^2 - 2x}\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^4 (|x-1| + 2x)\,dx$.

13.47. Перебуваючи під час літніх канікул у селі в бабусі, брат із сестричкою зібрали та насушили 8 кг липового цвіту.
1) На скільки склянок запашного корисного чаю вистачить зібраного школярами цвіту, якщо для заварювання однієї склянки такого чаю треба 2 г цвіту?
2) На скільки днів вистачить цього цвіту, якщо діти передадуть його до пульмонологічного відділення дитячої лікарні, де щодня в середньому проходять лікування 100 дітей, до медичних процедур яких включено 1 склянку чаю з липою на день?

13.48. Знайдіть найменше значення функції
$$y = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4).$$

Перевірте свою компетентність

Завдання № 13

1. Обчисліть $\log_2 12 - \log_2 3$.

А	Б	В	Г	Д
4	$\log_2 9$	9	2	1

2. Бригадир має розподілити чотири завдання між чотирма робітниками, роздавши кожному по одному завданню. Скількома способами він може це зробити?

А	Б	В	Г	Д
4	8	16	24	48

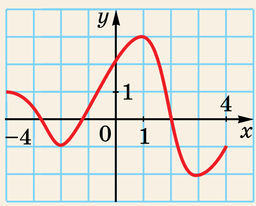
3. Відомо, що $m > n$. Серед наведених нерівностей укажіть правильну.

А	Б	В	Г	Д
$-m > -n$	$2 - m > 2 - n$	$-\frac{m}{2} < -\frac{n}{2}$	$\sqrt{5}m < \sqrt{5}n$	$\frac{m}{10} < \frac{n}{10}$

4. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $2\sin x + \sqrt{3} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$

5. На малюнку зображено графік функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $[-4; 4]$. Скільки всього коренів має рівняння $f(x) = -x$ на цьому проміжку?



А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

6. Обчисліть $125^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$.

А	Б	В	Г	Д
109	$71\frac{1}{3}$	17	16	33

7. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність

1 $(x-2)(x+4)<0$

2 $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 2$

3 $|x+1| \leqslant 3$

4 $3x-4<x$

Множина розв'язків

А $(-\infty; 2]$

Б $(-\infty; 2)$

В $(-4; 2)$

Г $[-4; 2]$

Д $(0; 2)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Обчисліть суму перших двадцяти непарних натуральних чисел.

9. Знайдіть найменше значення функції $f(x)=2x^3-3x^2$ на проміжку $[0; 2]$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Яка з наведених функцій не є первісною для функції $f(x)=-5$?

А. $F(x)=4-5x$ **Б.** $F(x)=-5x$

В. $F(x)=4+5x$ **Г.** $F(x)=-5x+1$

2. Укажіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)=x^4$.

А. $F(x)=4x^3$ **Б.** $F(x)=x^5+C$

В. $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$ **Г.** $F(x)=\dfrac{x^5}{5}+C$

3. $\int x^{-4}dx = \ldots$

А. $-4x^{-3}+C$ **Б.** $-\dfrac{1}{3x^3}+C$ **В.** $-\dfrac{3}{x^3}+C$ **Г.** $-\dfrac{1}{x^3}+C$

2

4. Укажіть функцію, що є первісною для функції $f(x)=3x^2-\sin x$.

А. $F(x)=x^3+\cos x+4$ **Б.** $F(x)=x^3-\cos x+1$

В. $F(x)=6x-\cos x$ **Г.** $F(x)=3x^3-\cos x-8$

5. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2$; $y=0$; $x=1$; $x=3$.

А. $\dfrac{8}{3}$ **Б.** 9 **В.** $\dfrac{26}{3}$ **Г.** 8

6. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 3 + 0,8t$ (м/с). Знайдіть відстань, яку подолає тіло за інтервал часу від $t_1 = 5$ с до $t_2 = 10$ с.

А. 4 м **Б.** 45 м **В.** 55 м **Г.** 50 м

3 **7.** Для функції $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $B\left(\frac{\pi}{8}; 3\right)$.

А. $F(x) = 0,5\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **Б.** $F(x) = 0,5\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2,5$

В. $F(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ **Г.** $F(x) = 0,5\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1,5$

8. Знайдіть, попередньо схематично виконавши малюнок, площу фігури, обмеженої лініями $y = |\sin x|$; $y = 0$; $x = -\pi$; $x = -\frac{\pi}{3}$.

А. 0,5 **Б.** 1,5 **В.** 1 **Г.** $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Знайдіть інтеграл $\int\left(e^{2x-4} + \frac{1}{7-x}\right)dx$.

А. $e^{2x-4} + \ln|7-x| + C$ **Б.** $0,5e^{2x-4} + \ln|7-x| + C$

В. $e^{2x-4} - \ln|7-x| + C$ **Г.** $0,5e^{2x-4} - \ln|7-x| + C$

4 **10.** Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$, попередньо спростивши її формулу:

А. $F(x) = x - 2 + \frac{1}{x^2} + C$ **Б.** $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{x} + C$

В. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{x} + C$ **Г.** $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} + C$

11. Для функції $f(x) = 6\sqrt{2x+1}$ знайдіть первісну $F(x)$, що задовольняє умову $F(4) = 50$.

А. $F(x) = 2(2x+1)^{\frac{3}{2}} - 4$ **Б.** $F(x) = 2(2x+1)^{\frac{3}{2}} + 4$

В. $F(x) = 2(2x+1)^{\frac{1}{2}} + 44$ **Г.** $F(x) = (2x+1)^{\frac{3}{2}} + 23$

12. При якому значенні параметра a, $a > 0$, площа фігури, обмеженої лініями $y = \frac{40}{x^3}$; $y = 1$; $y = a$ дорівнює 15?

А. таких значень a немає **Б.** 2; $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ **В.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ **Г.** 2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 11–13

1

1. Яка з функцій $F(x) = -3x$; $F(x) = 3x - 7$; $F(x) = 0$ є первісною для функції $f(x) = 3$?

2. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

1) $f(x) = x^8$; 2) $f(x) = 8^x$.

3. Знайдіть невизначений інтеграл:

1) $\int x^{-7}dx$; 2) $\int 5dx$.

2

4. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$, якщо:

1) $F(x) = x^4 - 3x + 7,\ f(x) = x^4 - 3$;

2) $F(x) = e^x + \sin 2x - 3,\ f(x) = e^x + 2\cos 2x$.

5. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

6. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 8 + 0,2t$ (м/с). Знайдіть переміщення тіла за інтервал часу від $t_1 = 10$ с до $t_2 = 20$ с.

3

7. Для функції $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{8}; -2\right)$.

8. Знайдіть, попередньо виконавши малюнок, площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ та $x = 16$.

4

9. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції, попередньо спростивши її формулу:

1) $f(x) = 4\sin 2x\cos 2x$;

2) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - x^2}{x^3}$.

Додаткові завдання

3

10. Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку:

1) $F(x) = 6x - tg4x;\ f(x) = 6 + \dfrac{4}{\cos^2 4x};\ x \in \left(-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right)$;

2) $F(x) = (3x^2 + 1)^9;\ f(x) = 54x(3x^2 + 1)^8;\ x \in (-\infty; +\infty)$?

4

11. Знайдіть, попередньо виконавши малюнок, площу фігури, обмежену лініями $y = |\cos 2x|$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{12}$.

§ 14. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

У попередньому параграфі ми ввели поняття визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ як різниці $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, розглянули його геометричний і фізичний зміст. У цьому параграфі розглянемо методи обчислення визначеного інтеграла.

1. Обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона–Лейбніца

З попереднього параграфа нам відомо, що:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Цю формулу називають *формулою Ньютона–Лейбніца*. Різницю $F(b) - F(a)$ ще позначають так: $F(x)\Big|_a^b$. Використовуючи це позначення, формулу Ньютона–Лейбніца записують ще й у такому вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона–Лейбніца є однією з найважливіших у курсі математичного аналізу. Її використовують для обчислення визначених інтегралів у випадку, коли для підінтегральної функції $f(x)$ можна знайти первісну $F(x)$. Саме такі визначені інтеграли і розглядають у шкільному курсі математики. При цьому зауважимо, що умова $f(x) \geqslant 0$ для будь-якого $x \in [a; b]$ не є обов'язковою, обов'язковою є лише неперервність функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Розглянемо приклади застосування формули Ньютона–Лейбніца.

Приклад 1. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Для функції $f(x) = \sin x$ однією з первісних є $F(x) = -\cos x$, тому за формулою Ньютона–Лейбніца маємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1.$$

В і д п о в і д ь. 1.

Приклад 2. Обчислити $\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо первісну для функції $f(x) = 2x - 3x^2$. Використовуючи правила знаходження первісних та таблицю первісних, матимемо:

$F(x) = 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^3}{3} = x^2 - x^3$. Отже,

$$\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx = (x^2-x^3)\Big|_{-1}^{1} = \left(1^2-1^3\right)-\left((-1)^2-(-1)^3\right) = 0-2 = -2.$$

Відповідь. -2.

Зауважимо, що знаходження первісної необов'язково записувати окремо, як ми зробили це у прикладі 2. Оформити розв'язання можна було так:

$$\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx = \left(2\cdot\frac{x^2}{2}-3\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(x^2-x^3\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(1^2-1^3\right)-\left((-1)^2-(-1)^3\right) = 0-2 = -2.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_{0}^{4}\sqrt{2x+1}\,dx$.

Розв'язання. Подамо підінтегральну функцію $f(x)=\sqrt{2x+1}$ у вигляді, зручному для інтегрування: $f(x)=(2x+1)^{\frac{1}{2}}$. Для знаходження первісної використаємо правило 3 і таблицю первісних.

Матимемо: $F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$.

Використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, отримаємо:

$$\int_{0}^{4}\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{4} = \frac{1}{3}(2\cdot4+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(2\cdot0+1)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{3}\left((3^2)^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{1}{3}(3^3-1) = 8\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $8\frac{2}{3}$.

Зауважимо, що в останньому прикладі винесення за дужки спільного множника $\frac{1}{3}$ спрощує обчислення.

2. Основні властивості визначеного інтеграла

Розглянемо найпростіші властивості визначеного інтеграла. Визначений інтеграл вигляду $\int\limits_a^b f(x)dx$ ми розглядали у випадку $a < b$, але його можна розглядати і у випадку $a \geqslant b$. При цьому справджуються такі властивості.

Властивість 1. **При перестановці меж інтегрування інтеграл змінює знак:**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

Доведення. Оскільки $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ і $-\int\limits_b^a f(x)dx = -\left(F(a) - F(b)\right) = F(b) - F(a)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$ ■

Властивість 2. **Для будь-якого a маємо:**

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

Доведення. $\int\limits_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$ ■

Розглянемо ще кілька властивостей визначеного інтеграла.

Властивість 3. **Інтеграл суми функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій, тобто**

$$\int\limits_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$, тоді $F(x) + G(x)$ – первісна для $f(x) + g(x)$. Маємо:

$$\int\limits_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \left(F(x) + G(x)\right)\Big|_a^b = \left(F(b) + G(b)\right) - \left(F(a) + G(a)\right) =$$

$$= \left(F(b) - F(a)\right) + \left(G(b) - G(a)\right) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx. \ ■$$

Зрозуміло, що властивість 3 справджується для будь-якої кількості доданків.

Властивість 4. **Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто**

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тоді функція $kF(x)$ буде первісною для $kf(x)$. Маємо

$$\int_a^b kf(x)dx = kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k\big(F(b) - F(a)\big) = k\int_a^b f(x)dx.$$

Дві останні властивості можна було використати і для обчислення інтегралів у прикладі 2 цього параграфа.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \left(\frac{8}{x} - 4x^3\right)dx.$

Розв'язання. Послідовно застосуємо властивості 4 і 3, матимемо:

$$\int_1^2 \left(\frac{8}{x} - 4x^3\right)dx = \int_1^2 \frac{8}{x}dx - \int_1^2 4x^3dx = 8\int_1^2 \frac{dx}{x} - 4\int_1^2 x^3dx = 8\ln|x|\Big|_1^2 - 4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^2 =$$

$= 8(\ln 2 - \ln 1) - (2^4 - 1^4) = 8\ln 2 - 15.$

Відповідь. $8\ln 2 - 15$.

Властивість 5. **Якщо $c \in [a; b]$, то**

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тоді

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Приклад 5. Обчислити $\int_{-2}^4 f(x)dx$, якщо:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ якщо } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2\sqrt{x}, \text{ якщо } 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\int_{-2}^4 f(x)dx = \int_{-2}^0 (-x)dx + \int_0^4 2\sqrt{x}dx = -\int_{-2}^0 xdx + 2\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^0 + 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^4 =$$

$$= -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = 2 + \frac{4}{3}\cdot 8 = 12\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $12\frac{2}{3}$.

3. Використання штучних прийомів для обчислення визначених інтегралів

Як і для знаходження первісних (невизначених інтегралів), для знаходження визначених інтегралів можна застосовувати певні штучні прийоми, які дадуть змогу подати підінтегральну функцію у вигляді, зручному для інтегрування, наприклад у вигляді суми або різниці простіших, ніж в умові, функцій, тобто функцій з таблиці первісних.

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int\limits_2^5 x\sqrt{x-1}dx$.

Розв'язання. Перетворимо вираз $x\sqrt{x-1}$ так:

$$x\sqrt{x-1}=(x-1+1)\sqrt{x-1}=(x-1)\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}=(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді

$$\int\limits_2^5 x\sqrt{x-1}dx=\int\limits_2^5\left((x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left.\left(\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\right|_2^5=$$

$$=\left.\left(\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right)\right|_2^5=\left(\frac{2}{5}\cdot 4^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{2}{5}\cdot 1^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot 32+\frac{2}{3}\cdot 8-\frac{2}{5}-\frac{2}{3}=\frac{2}{5}(32-1)+\frac{2}{3}(8-1)=17\frac{1}{15}.$$

Відповідь. $17\frac{1}{15}$.

А ще раніше...

Серед учених, які найбільш сприяли розвитку інтегрального числення, насамперед слід згадати Готфріда Лейбніца та Ісаака Ньютона.

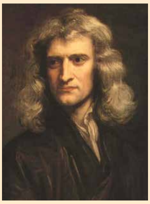
Саксонський філософ, логік, математик, механік, фізик, юрист, історик, дипломат, винахідник та мовознавець Г. Лейбніц у 1686 р. опублікував працю «Про приховану геометрію та аналіз неподільних», що стала першою серед праць з інтегрального числення. Основним поняттям у Лейбніца була сума всіх нескінченно малих трикутників, на які можна розбити криволінійну фігуру, тобто основним поняттям його праці став визначений інтеграл. У цій праці не тільки вперше з'явився символ інтеграла $\int$*, але й позначення* $\int ydx$*, причому Лейбніц попереджав, що не слід забувати записувати множник dx. Символ інтеграла – це нібито витягнута літера S, що є першою в латинському слові*

Готфрід Лейбніц (1646–1716)

*витта, що в перекладі означає – сума, а запис **ydx** нагадує доданки цієї суми. Назву символа інтеграла, тобто сам термін «інтеграл» (від латинського integer, у перекладі – цілий, тобто «вся площа»), було запропоновано в 1696 р. Йоганном Бернуллі та схвалено Лейбніцем, хоча математики цю назву сприйняли неохоче, бо Лейбніц на той час використовував термін «сума всіх **ydx**». Також у вищезазначеній праці Лейбніц встановив зв'язок між диференціальним та інтегральним численнями. Він також, виходячи з поняття визначеного інтеграла, дійшов поняття первісної $F(x)$ для функції $f(x)$. Це він записував так:*

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Лейбніц також дійшов висновку про те, що диференціальне та інтегральне числення є взаємно оберненими діями на кшталт додавання і віднімання, множення і ділення тощо.



Ісаак Ньютон (1643–1727)

Інший учений, англійський фізик, математик, механік та астроном Ісаак Ньютон у 1671 р. опублікував працю «Метод флюксій» (нагадаємо, що функцію він називав «флюентою», а похідну функції – «флюксією»). У цій праці він сформулював дві проблеми, як за даним співвідношенням між двома флюентами знайти співвідношення між флюксіями та як за даним рівнянням, що містить флюксії, знайти співвідношення між флюентами. Розв'язання першої проблеми приводить Ньютона до обчислення флюксії (похідної) від даної флюенти (функції), тобто до диференціального числення. Розв'язання ж другої проблеми, зокрема, містить знаходження функції за її похідною, тобто знаходження первісної. Саме ця проблема привела до поняття невизначеного інтеграла, а сам термін «первісна» було введено Лагранжем на початку XVIII ст.

Таким чином, для Ньютона в побудові теорії інтегрального числення початковими стали поняття первісної або невизначеного інтеграла. У той же час для Лейбніца первісним поняттям для його теорії став визначений інтеграл. Обидва цих учених, незалежно один від одного, дійшли формули:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

тому її і називають «формулою Ньютона–Лейбніца».

М.В. Остроградський (1801–1862)

Значний внесок у розвиток інтегрального числення було зроблено відомим українським математиком Михайлом Васильовичем Остроградським. Його ім'я носять кілька формул, теорем і методів знаходження інтегралів. Кілька праць Остроградського присвячено і розв'язуванню диференціальних рівнянь.

● Запам'ятайте формулу Ньютона–Лейбніца. ● Сформулюйте і доведіть властивості визначених інтегралів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **14.1.** Чи правильно знайдено визначений інтеграл:

1) $\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$; 2) $\int\limits_{-2}^1 5dx = 5x + C$;

3) $\int\limits_{-2}^0 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^0 = \frac{(-2)^2}{3} - \frac{0^3}{3} = -\frac{8}{3}$;

4) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$?

Обчисліть інтеграл (**14.2–14.25**):

14.2. 1) $\int\limits_{-3}^0 x^2dx$; 2) $\int\limits_4^7 3dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 5) $\int\limits_{-1}^0 e^x dx$; 6) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

14.3. 1) $\int\limits_0^1 x^4dx$; 2) $\int\limits_{-1}^2 4dx$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int\limits_0^2 e^x dx$; 6) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$.

2 **14.4.** 1) $\int\limits_0^1 (x+2)dx$; 2) $\int\limits_2^4 (x-5)dx$; 3) $\int\limits_1^3 (2x-3)dx$;

4) $\int\limits_0^2 (6x+1)dx$; 5) $\int\limits_0^1 (x^2+1)dx$; 6) $\int\limits_1^2 (3x^2-x)dx$;

7) $\int\limits_0^2 (x^2+2x-1)dx$; 8) $\int\limits_1^3 (6x^2-4x+2)dx$.

14.5. 1) $\int\limits_0^1 (x-3)dx$; 2) $\int\limits_1^4 (x+1)dx$; 3) $\int\limits_0^2 (4x+2)dx$;

4) $\int_1^3 (2x-1)dx$; 5) $\int_0^1 (x^2-1)dx$; 6) $\int_1^5 (3x^2+x)dx$;

7) $\int_0^1 (x^2+4x-1)dx$; 8) $\int_1^2 (9x^2+2x-1)dx$.

14.6. 1) $\int_1^5 (2x+1)dx$; 2) $\int_0^2 (x^3-x)dx$; 3) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$; 4) $\int_{-2}^{-1} \left(2-\frac{1}{x^4}\right)dx$.

14.7. 1) $\int_0^3 (x^2-2x)dx$; 2) $\int_{-2}^2 (1+x^3)dx$;

3) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^2}$; 4) $\int_{0,5}^1 \left(\frac{1}{x^5}+1\right)dx$.

14.8. 1) $\int_1^2 (2^x \ln 2-1)dx$; 2) $\int_0^1 0{,}1^x \ln 10dx$;

3) $\int_{-2}^0 (e^x+x)dx$; 4) $\int_2^3 (4^x \ln 2-3x^2)dx$.

14.9. 1) $\int_{-3}^{-1} (3^x \ln 3+1)dx$; 2) $\int_0^2 0{,}2^x \ln 5dx$;

3) $\int_0^3 (e^x-x)dx$; 4) $\int_1^2 (2x-9^x \ln 3)dx$.

3 **14.10.** 1) $\int_1^4 \frac{6x}{x^{1{,}5}}dx$; 2) $\int_1^{16} \frac{x}{\sqrt[4]{x^3}}dx$.

14.11. 1) $\int_1^9 \frac{2\sqrt{x}}{x}dx$; 2) $\int_1^8 \frac{x^2dx}{x^{\frac{4}{3}}}$.

14.12. 1) $\int_0^2 (x-1)(x+2)dx$; 2) $\int_1^4 (x^2+1)(x-3)dx$.

14.13. 1) $\int_0^3 (x+1)(x-2)dx$; 2) $\int_1^2 (x^2-1)(x+2)dx$.

14.14. 1) $\int_0^4 (x+2\sqrt{x})dx$; 2) $\int_1^9 \left(2x-\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int_0^8 (6x-\sqrt[3]{x})$; 4) $\int_1^8 \left(x+\frac{8}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

14.15. 1) $\int_0^9 (x - 4\sqrt{x})$; 2) $\int_1^4 \left(4x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int_0^1 (8x - \sqrt[3]{x})$; 4) $\int_1^8 \left(x - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

14.16. 1) $\int_0^5 \frac{6dx}{\sqrt{3x+1}}$; 2) $\int_2^7 \frac{4dx}{\sqrt{x+2}}$.

14.17. 1) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$; 2) $\int_{-2}^{\frac{1}{3}} \frac{2dx}{\sqrt{10-3x}}$.

14.18. 1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$; 2) $\int_0^{\pi} 2\sin\frac{x}{3}dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{6dx}{\sin^2 2x}$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{12dx}{\cos^2 3x}$.

14.19. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$; 2) $\int_0^{\pi} 2\cos\frac{x}{6}dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{6dx}{\cos^2 2x}$; 4) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3dx}{\sin^2 3x}$.

14.20. 1) $\int_0^1 (x-1)^4 dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \cos\frac{x}{3}dx$; 3) $\int_{-1}^0 (2x+1)^5 dx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$; 5) $\int_{-3}^0 \sqrt{1-x}\,dx$; 6) $\int_{-3,5}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}}$.

14.21. 1) $\int_{-1}^1 (x+1)^3 dx$; 2) $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{4}dx$; 3) $\int_0^1 (1-2x)^4 dx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$; 5) $\int_3^8 \sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{1+5x}}$.

14.22. 1) $\int_0^3 e^{-2x}dx$; 2) $\int_{-1}^0 e^{\frac{x}{5}}dx$; 3) $\int_0^{0,2} 2^{5x+1}\ln 2dx$; 4) $\int_1^{10} \frac{dx}{5x-4}$.

14.23. 1) $\int_{-2}^0 e^{3x}dx$; 2) $\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}dx$; 3) $\int_{0,5}^2 3^{2x-1}\ln 3dx$; 4) $\int_0^3 \frac{dx}{4x+1}$.

14.24. 1) $\int_{0,1}^{0,2} \left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)dx$; 2) $\int_0^4 \left(2^{\frac{x}{4}} - \sin\pi x\right)dx$.

14.25. 1) $\int\limits_{0,2}^{0,5}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx;$ 2) $\int\limits_{0}^{2}\left(4^{\frac{x}{2}}+\cos\pi x\right)dx.$

Обчисліть інтеграл, використовуючи його геометричний зміст **(14.26–14.27):**

14.26. 1) $\int\limits_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx;$ 2) $\int\limits_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx.$

14.27. 1) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx;$ 2) $\int\limits_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx.$

Обчисліть інтеграл **(14.28–14.35):**

14.28. 1) $\int\limits_{0}^{3}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}-\frac{3}{(x+1)^2}\right)dx;$ 2) $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{x}(x+1)dx.$

14.29. 1) $\int\limits_{-2}^{1}\left(\frac{2}{\sqrt{x+3}}-\frac{3}{(x+4)^2}\right)dx;$ 2) $\int\limits_{0}^{9}\sqrt{x}(x-1)dx.$

14.30. 1) $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}dx;$ 2) $\int\limits_{0}^{4}\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx.$

14.31. 1) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx;$ 2) $\int\limits_{4}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx;$

4 **14.32.** 1) $\int\limits_{0}^{2}(x^2+2x)^2dx;$ 2) $\int\limits_{0,25}^{0,5}\frac{2x^5-x^4+x^2}{x^4}dx;$

3) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 x\,dx;$ 4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{16^x-4^x}{2^x}dx.$

14.33. 1) $\int\limits_{0}^{3}(2x-x^2)^2dx;$ 2) $\int\limits_{2}^{4}\frac{2x^3-x^2-1}{x^2}dx;$

3) $\int\limits_{0}^{2\pi}\cos^2 x\,dx;$ 4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{12^x-6^x}{3^x}dx.$

14.34. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\cos 3x\,dx;$ 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}\,dx;$

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{4}}12\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\,dx;$ 4) $\int\limits_{-\pi}^{0}\left(2\sin^2\frac{x}{4}-1\right)dx;$

5) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (3 - 3ctg^2 x)dx;$ 6) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 x + \cos x)dx.$

14.35. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 7x \cos 5x dx;$ 2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 3x dx;$

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{0} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)dx;$ 4) $\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{4}} \left(1 - 2\cos^2 \frac{x}{3}\right)dx;$

5) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2tg^2 x)dx;$ 6) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (6\cos^2 2x + \sin 3x)dx.$

14.36. Знайдіть $\int\limits_{-2}^{1} f(x)dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ 2x + 3, \text{ якщо } -1 < x \leqslant 1. \end{cases}$

14.37. Знайдіть $\int\limits_{0}^{4} f(x)dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ якщо } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x^2 + 1, \text{ якщо } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$

Обчисліть інтеграл (**14.38–14.39**):

14.38. $\int\limits_{1}^{4} |x - 2|\, dx.$ **14.39.** $\int\limits_{-2}^{5} |x - 1|\, dx.$

14.40. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{-2}^{2} \left(1 + \sqrt{4 - x^2}\right)dx$, використовуючи його геометричний зміст.

14.41. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} (3 + \sqrt{1 - x^2})dx$, використовуючи його геометричний зміст.

Знайдіть (**14.42–14.43**):

14.42. 1) $\int\limits_{0}^{3} \frac{x}{x + 1} dx;$ 2) $\int\limits_{0}^{2} \frac{2x - 1}{2x + 1} dx.$

14.43. 1) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x}{x + 2} dx;$ 2) $\int\limits_{0}^{5} \frac{4x - 1}{4x + 1} dx.$

Обчисліть (**14.44–14.49**):

14.44. 1) $\int\limits_{0}^{1} x(x + 1)^4 dx;$ 2) $\int\limits_{2}^{5} \frac{x^2 + 2}{x - 1} dx.$

14.45. 1) $\int\limits_{-1}^{0} x(x-1)^3dx$; 2) $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{x^2+3}{x+1}dx$.

14.46. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{(x^2-x)(x+5)}{x+1}dx$. **14.47.** $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{(x^2+2x)(x-1)}{x+1}dx$.

14.48. 1) $\int\limits_{1}^{2} (|x^2-1|+3x)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{2} (|x-2|+|x+2|)dx$.

14.49. 1) $\int\limits_{2}^{3} (|x^2-4|+x)dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{1} (|x-3|+|x+3|)dx$.

14.50. Нехай $f(x)=a\sin \pi x+b$; $f'(1)=2$; $\int\limits_{0}^{2} f(x)dx=4$. Знайдіть a і b.

Розв'яжіть рівняння відносно змінної t (**14.51–14.52**):

14.51. 1) $\int\limits_{5}^{t} \dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}}=4$; 2) $\int\limits_{1}^{t} (18x^2-22x-4)dx=5$.

14.52. 1) $\int\limits_{0}^{t} \dfrac{dx}{\sqrt{2x+4}}=2$; 2) $\int\limits_{-1}^{t} (4x^3+3x^2-4x-4)dx=6$.

Розв'яжіть нерівність відносно змінної t (**14.53–14.54**):

14.53. 1) $\int\limits_{0}^{t} (2x+5)dx>6$; 2) $\int\limits_{1}^{t} \sin x dx<\dfrac{1}{2}$.

14.54. 1) $\int\limits_{0}^{t} (2x-1)dx\leqslant 12$; 2) $\int\limits_{0}^{t} \cos x dx<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

14.55. Після уроків під час прибирання класних кімнат було зібрано 0,9 кг паперових відходів.

1) Якщо учні вашої школи щодня залишатимуть таку кількість паперу, то скільки його буде викинуто за 190 навчальних днів? А скільки у тридцяти школах району?

2) Для виробництва 1 т паперу потрібно приблизно 900 м^2 лісу. Скільки кубометрів лісу врятують школярі цих шкіл, якщо не викидатимуть вищевказану кількість паперового сміття, а здаватимуть на переробку?

3) *Проектна діяльність*. З'ясуйте: 1) як правильно підготувати (відсортувати) паперові відходи (макулатуру) для переробки; 2) які паперові відходи не приймають на переробку і чому; 3) які товари з найближчого до вас супермаркету виготовляють з переробленої паперової сировини.

14.56. (*Національна олімпіада Австрії, 1971 р.*) Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a, b і c справджується нерівність:

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 14

1. У деякому класі кількість хлопців відноситься до кількості дівчат як 2 : 3. Якою може бути кількість учнів у цьому класі?

А	Б	В	Г	Д
20	21	22	23	24

2. На полиці стоять 5 книжок з алгебри, 3 – з геометрії, 2 – з фізики. З полиці навмання беруть одну книжку. Яка ймовірність того, що вона не з фізики?

А	Б	В	Г	Д
0,2	0,3	0,5	0,7	0,8

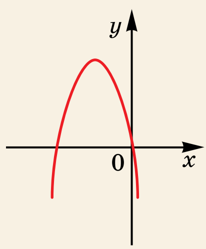
3. Спростіть вираз $(1 - \sin^2\alpha)\mathrm{tg}^2\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\sin 2a$	$\sin^2 a$	$\mathrm{tg}\, 2a$	$\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$	інша відповідь

4. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5}(x-1) > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;\ 2)$	$(-\infty;\ 1)$	$(1;\ +\infty)$	$(1;\ 2)$	$(2;\ +\infty)$

5. На малюнку зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажіть правильне твердження про коефіцієнти a, b і c.



А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a>0 \\ b<0 \\ c<0 \end{cases}$	$\begin{cases} a<0 \\ b<0 \\ c>0 \end{cases}$	$\begin{cases} a<0 \\ b<0 \\ c=0 \end{cases}$	$\begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ c=0 \end{cases}$	$\begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ c>0 \end{cases}$

6. Обчисліть $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}\sqrt[4]{5}$	1,5	2,5	4,5	$\frac{2}{3}$

7. Установіть відповідність між властивістю чисел (1–4) і парою чисел (А–Д), що має цю властивість.

Властивість чисел

1 Числа парні
2 Найбільший спільний дільник чисел дорівнює 3
3 Найменше спільне кратне чисел дорівнює 50
4 Числа взаємно прості

Пара чисел

А 21 і 24
Б 25 і 10
В 20 і 35
Г 18 і 20
Д 30 і 49

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть найменший корінь рівняння $||2x - 1| + 3| = 5$.

9. Знайдіть значення виразу $\sin 15° \sin 75°$.

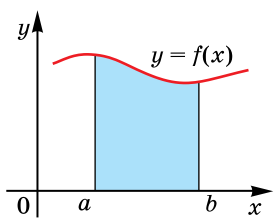
§ 15. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР ТА ІНШІ ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛА

В одному з попередніх параграфів ми використовували первісну функції як для знаходження площі криволінійної трапеції, так і для розв'язання певних фізичних задач. Розглянемо використання визначеного інтеграла для обчислення площ плоских фігур, об'ємів тіл обертання та деяких інших задач.

1. Обчислення площ плоских фігур

Як ми вже знаємо, площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$, прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ за умови, що $f(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in [a; b]$, обчислюють як різницю $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ (мал. 15.1). З іншого боку, за формулою Ньютона–Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$



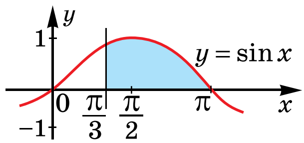
Мал. 15.1

Отже, можна дійти висновку, що

площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$, прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ за умови, що $f(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in [a; b]$, обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Приклад 1. Обчислити за допомогою визначеного інтеграла площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \sin x$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \pi$.



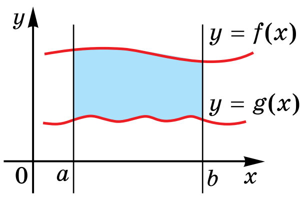
Мал. 15.2

Розв'язання. Маємо (мал. 15.2):

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = -\cos\pi - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5.$$

Відповідь. 1,5.

Розглянемо плоску фігуру, обмежену зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу – графіком функції $y = g(x)$, а також вертикальними прямими $x = a$, $x = b$, причому функції $y = f(x)$, $y = g(x)$ – неперервні на $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ справджуються нерівності $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, $f(x) \geqslant g(x)$ (мал. 15.3).



Мал. 15.3

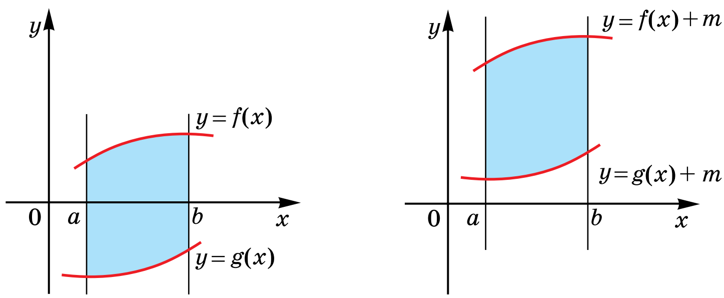
Площа цієї фігури S дорівнює різниці площ $S_f - S_g$, де S_f – площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, а S_g – площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = g(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Маємо:

$$S = S_f - S_g = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Використовуючи властивості інтеграла, отримаємо:

$$\boldsymbol{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.}$$

Ця формула буде правильною і у випадку, коли одна або обидві умови $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$ не виконуються. Адже в цьому випадку достатньо перенести плоску фігуру вздовж осі ординат на m одиниць, вибравши m довільним чином так, щоб уся фігура розмістилася вище осі абсцис (мал. 15.4).



Мал. 15.4

Тоді площа шуканої фігури

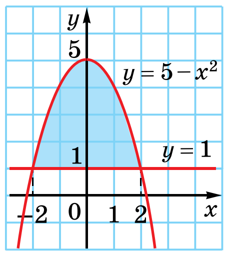
$$S=\int_a^b\big((f(x)+m)-(g(x)+m)\big)dx=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx.$$

Отже,

площу S плоскої фігури, яка обмежена неперервними на проміжку $[a;\ b]$ функціями $y=f(x)$ і $y=g(x)$, такими, що $f(x)\geqslant g(x)$ для всіх $x\in[a;\ b]$, та прямими $x=a$ і $x=b$, обчислюють за формулою

$$S=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx.$$

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=5-x^2$ і $y=1$.



Мал. 15.5

Розв'язання. 1) Знайдемо абсциси точок перетину графіків, розв'язавши рівняння: $5-x^2=1$, звідки $x_{1,2}=\pm 2$. Ординати обох точок перетину дорівнюють 1.

2) Зобразимо схематично графіки функцій і абсциси їх точок перетину (мал. 15.5).

3) Тоді:

$$S=\int_{-2}^{2}(5-x^2-1)dx=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=$$

$$=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\left(4\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(4\cdot(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right)=10\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $10\frac{2}{3}$.

Приклад 3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2+2x$ і $y=4-x$.

Розв'язання. 1) Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій:

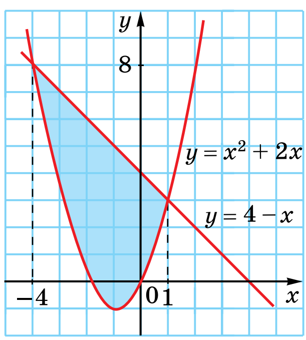
$$x^2+2x=4-x;$$
$$x^2+3x-4=0;$$
$$x_1=1;\ x_2=-4.$$

Ординати точок перетину $y_1=3$; $y_2=8$.

2) Зобразимо графіки функції схематично (мал. 15.6).

3) Отже,

$$S=\int_{-4}^{1}\big((4-x)-(x^2+2x)\big)dx=$$



Мал. 15.6

$$= \int_{-4}^{1} (4 - x^2 - 3x)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-4}^{1} =$$

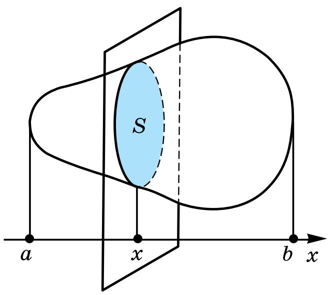
$$= \left(4 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} - \frac{3 \cdot 1^2}{2}\right) - \left(4 \cdot (-4) - \frac{(-4)^3}{3} - \frac{3 \cdot (-4)^2}{2}\right) =$$

$$= 2\frac{1}{6} + 18\frac{2}{3} = 20\frac{5}{6}.$$

Відповідь. $20\frac{5}{6}$.

2. Обчислення об'ємів тіл

За допомогою визначеного інтеграла можна обчислювати об'єми тіл. Нехай є тіло певного об'єму V і деяка пряма, перпендикулярно до якої проведено площини, які перетинають це тіло (мал.15.7). Припустимо, що всі значення S площ перерізів тіла, що при цьому утворилися, нам відомі. Площина, перпендикулярна до осі абсцис, перетинає її у деякій точці x, що належить відрізку $[a; b]$. Тому кожному числу $x \in [a; b]$ ставиться у відповідність єдине число $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною, що проходить через цю точку, перпендикулярно до осі абсцис. Таким чином, на відрізку $[a; b]$ задано деяку функцію $S(x)$. Якщо функція $S(x)$ – неперервна на $[a; b]$, то об'єм тіла V можна знайти за формулою



Мал. 15.7

$$\boldsymbol{V = \int_a^b S(x)dx.}$$

Доведення цієї формули є досить громіздким, тому ми його не наводимо.

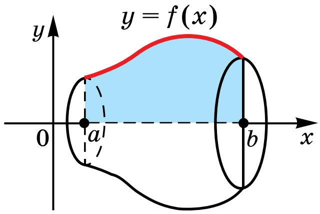
За цією формулою можна знаходити *об'єми тіл обертання.*

Приклад 4. Нехай дано криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної на $[a; b]$ функції $y = f(x)$ такої, що $f(x) \geqslant 0$ для кожного $x \in [a; b]$, та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$. Довести, що об'єм тіла, яке утворилося внаслідок обертання цієї трапеції навколо осі абсцис, можна обчислити за формулою

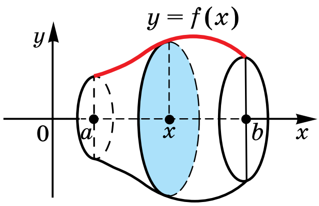
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Доведення. Розглянемо тіло, задане в умові (мал. 15.8). Кожна площина, що перпендикулярна до осі абсцис і перетинає відрізок $[a; b]$ у точці x, дає в перерізі тіла круг, радіус якого дорівнює $f(x)$ (мал. 15.9). Тоді маємо площу такого круга: $S(x) = \pi f^2(x)$. Отже, для об'єму тіла обертання отримаємо:

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

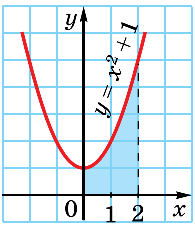


Мал. 15.8



Мал. 15.9

Приклад 5. Знайти об'єм тіла, яке утворилося внаслідок обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 2$.



Мал. 15.10

Р о з в ' я з а н н я. Криволінійну трапецію, яку обертають навколо осі y, зображено на малюнку 15.10. Знайдемо об'єм утвореного тіла обертання:

$$V = \pi\int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx = \pi\int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(\left(\frac{2^5}{5} + \frac{2\cdot 2^3}{3} + 2\right) - 0\right) = \frac{206\pi}{15}.$$

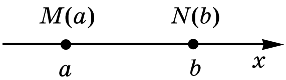
В і д п о в і д ь. $\dfrac{206\pi}{15}$.

3. Застосування визначеного інтеграла у фізиці

Розглянемо одне із застосувань визначеного інтеграла у фізиці.

Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекція якої на цю вісь – неперервна на деякому проміжку функція $f(x)$. Нехай відрізок $[a; b]$ належить проміжку неперервності функції, і під дією цієї сили матеріальна точка перемістилася з точки $M(a)$ у точку $N(b)$ (мал. 15.11). Тоді роботу A цієї сили можна обчислити за формулою

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$



Мал. 15.11

Приймемо цей факт без доведення.

Приклад 6. Обчислити роботу сили f під час розтягнення пружини на 0,05 м, якщо для розтягнення пружини на 0,02 м потрібна сила 4 Н.

Р о з в ' я з а н н я. 1) За законом Гука, сила f пропорційна розтягненню (або стисканню) пружини, тобто $f = kx$, де x – величина розтягнення (або стискання), k – стала.

2) Оскільки для $x = 0{,}02$ м маємо, що $f = 4$ Н, то можемо знайти k. Тоді $k = \frac{f}{x} = \frac{4}{0{,}02} = 200$. Отже, $F(x) = 200x$.

3) Знайдемо роботу A для розтягнення пружини на 0,05 м:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_0^{0{,}05} 200x dx = 200 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}05} = 100x^2\Bigg|_0^{0{,}05} = 100(0{,}05^2 - 0^2) =$$

$= 0{,}25$ (Дж).

В і д п о в і д ь. 0,25 Дж.

● Як обчислити площу плоскої фігури? ● Як за допомогою визначеного інтеграла можна обчислювати об'єми тіл? ● Як застосовують визначений інтеграл у фізиці?

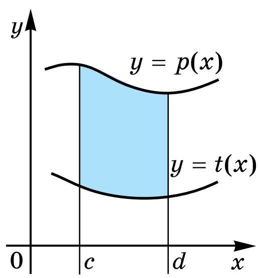
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

15.1. За якою формулою можна знайти площу заштрихованої фігури, зображеної на малюнку 15.12:

1) $\int_0^d (p(x) - t(x))dx$; 2) $\int_c^d (t(x) - p(x))dx$;

3) $\int_c^d (p(x) - t(x))dx$; 4) $\int_c^d p(x)dx$?



Мал. 15.12

Знайдіть площу заштрихованої фігури **(15.2–15.3)**, зображеної на:

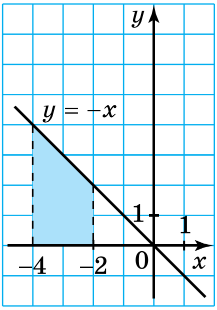
15.2. 1) Малюнку 15.13; 2) малюнку 15.14.

15.3. 1) Малюнку 15.15; 2) малюнку 15.16.

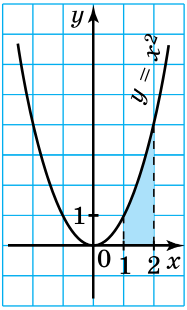
2

Обчисліть за допомогою інтеграла площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями **(15.4–15.7)**:

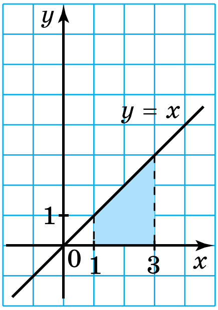
15.4. 1) $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;
2) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;
3) $y = x^4 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
4) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;



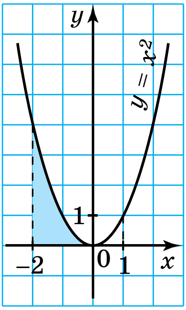
Мал. 15.13



Мал. 15.14



Мал. 15.15



Мал. 15.16

5) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}},\ \ y = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 4;$

6) $y = \sin x,\ \ y = 0,\ \ x = \dfrac{\pi}{2},\ \ x = \pi;$

7) $y = \cos x,\ \ y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = \dfrac{\pi}{2};$

8) $y = \sin\dfrac{x}{2},\ \ y = 0,\ \ x = \dfrac{\pi}{2},\ \ x = \pi.$

15.5. 1) $y = 4x + 1,\ \ y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = 2;$
2) $y = x^3,\ \ y = 0,\ \ x = 2,\ \ x = 3;$
3) $y = x^4 + 2,\ \ y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = 1;$

4) $y = \dfrac{1}{x^2},\ \ y = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 10;$

5) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}},\ \ y = 0,\ \ x = 4,\ \ x = 9;$

6) $y = \cos x,\ \ y = 0,\ \ x = \dfrac{\pi}{6},\ \ x = \dfrac{\pi}{2};$

7) $y = \sin x,\ \ y = 0,\ \ x = \dfrac{\pi}{3},\ \ x = \dfrac{\pi}{2};$

8) $y = \cos 2x,\ \ y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = \dfrac{\pi}{4}.$

15.6. 1) $y = e^x,\ \ y = 0,\ \ x = 0,\ \ x = 3;$
2) $y = e^{-x},\ \ y = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 2;$

3) $y = \dfrac{1}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = e;$

4) $y = -\dfrac{1}{x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = -e^2.$

15.7. 1) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3;$ 2) $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2;$

3) $y = \dfrac{1}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = e^2;$

4) $y = -\dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = -e$.

Знайдіть площу фігури, яка обмежена віссю абсцис і параболою **(15.8–15.9)**:

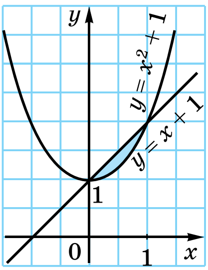
15.8. 1) $y = 4 - x^2$; 2) $y = -x^2 + 3x - 2$;
3) $y = (2x + 4)(3 - x)$; 4) $y = (1 - x)(x + 3)$;
5) $y = 24 - 2x - 2x^2$; 6) $y = -2(x - 3)^2 + 2$.

15.9. 1) $y = 1 - x^2$; 2) $y = -x^2 + 4x - 3$;
3) $y = (2x + 4)(3 - x)$; 4) $y = (1 - x)(x + 3)$;
5) $y = 24 - 2x - 2x^2$; 6) $y = -2(x - 3)^2 + 2$.

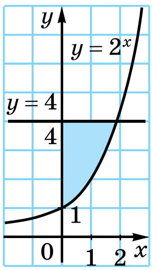
Знайдіть площу заштрихованої фігури **(15.10–15.11)**, зображеної на:

15.10. 1) Малюнку 15.17; 2) малюнку 15.18.

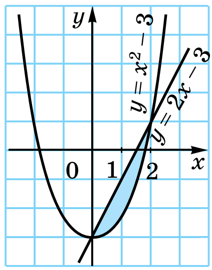
15.11. 1) Малюнку 15.19; 2) малюнку 15.20.



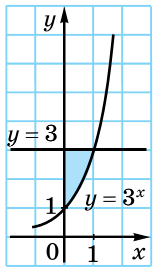
Мал. 15.17



Мал. 15.18



Мал. 15.19



Мал. 15.20

15.12. Тіло рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекцію якої на цю вісь задано формулою $f(x) = x^2 - 2x$. Знайдіть роботу, яку виконує ця сила при переміщенні тіла з точки з абсцисою 3 в точку з абсцисою 6.

15.13. Тіло рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекцію якої на цю вісь задано формулою $f(x) = 2x + 5$. Знайдіть роботу, яку виконує ця сила при переміщенні тіла з точки з абсцисою 2 в точку з абсцисою 4.

15.14. Дано прямолінійний неоднорідний стержень довжини l. Його густину в точці x можна знайти за формулою $q = q(x)$. Знайдіть масу стержня, якщо:
1) $q(x) = 2x + 1$, $l = 3$; 2) $q(x) = 8x + x^2$, $l = 4$.

15.15. Дано прямолінійний неоднорідний стержень довжини l. Його густину в точці x можна знайти за формулою $q = q(x)$. Знайдіть масу стержня, якщо:
1) $q(x) = 2x + 3$, $l = 4$; 2) $q(x) = 6x - x^2$, $l = 3$.

Знайдіть об’єм тіла, що утворилося внаслідок обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями **(15.16–15.17)**:

15.16. 1) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 2$ і $x = 5$; 2) $y = x^2$, $y = 0$ і $x = 5$.

15.17. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=4$ і $x=6$; 2) $y=x$, $y=0$ і $x=3$.

3 Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (**15.18–15.25**):

15.18. 1) $y=x^2$ і $y=3x$; 2) $y=2-x^2$ і $y=x$;
3) $y=7-x^2$ і $y=3$; 4) $y=3x^2$ і $y=2x+1$;
5) $y=3x^2$ і $y=4-x^2$;
6) $y=x^2-2x$, $y=3$ і $x=0$ за умови, що $x\leqslant 0$.

15.19. 1) $y=x^2$ і $y=-3x$; 2) $y=x^2-3$ і $y=2x$;
3) $y=4-x^2$ і $y=3$; 4) $y=2x^2$ і $y=x+1$;
5) $y=x^2$ і $y=8-x^2$;
6) $y=x^2-3x$, $y=4$ і $x=0$ за умови, що $x\leqslant 0$.

15.20. 1) $y=6x-x^2$ і $y=x+4$; 2) $y=(x+2)^2$ і $y=x+2$;
3) $y=3-x^2+2x$ і $x+y=3$;
4) $y=x^2-3x+2$ і $y=x-1$;
5) $y=5-2x^2+3x$ і $y=x+1$;
6) $y=-x^2+4x-3$ і прямою, яка проходить через точки $(1;\ 0)$ і $(0;\ -3)$.

15.21. 1) $y=4-x^2$ і $y=x+2$; 2) $y=(x-2)^2$ і $y=x-1$;
3) $y=x^2-1$ і $y-2x=2$;
4) $y=x^2+4x$ і прямою, яка проходить через точки $(0;\ 0)$ і $(2;\ 8)$.

15.22. 1) $y=2x$, $y=x-2$, $x=4$; 2) $y=x^2-4x$, $y=-(x-4)^2$;
3) $y=x^2+2x-3$, $y=5+2x-x^2$;
4) $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$;
5) $y=x$, $y=x^3$, $-1\leqslant x\leqslant 0$; 6) $y=\sqrt{x}$, $y=-2\sqrt{x}$, $x=4$;
7) $y=x^3$, $y=-2x^3$, $x=2$; 8) $y=\sqrt{x+1}$, $x-3y+3=0$.

15.23. 1) $y=1-x$, $y=3-2x$, $x=0$;
2) $y=x^2-6x+9$, $y=(x+1)(3-x)$;
3) $y=x^2-4x+3$, $y=6x-x^2-5$;
4) $y=2\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$, $x=9$;
5) $y=2x^3$, $y=-x^3$, $x=1$; 6) $y=\sqrt{x}$, $x-3y+2=0$.

15.24. 1) $y=2^x$, $y=4^x$ і $x=1$; 2) $y=e^x$, $y=1$ і $x=1$;
3) $y=\dfrac{6}{x}$, $x=3$ і $y=3$; 4) $y=\dfrac{4}{x}$ і $y=5-x$.

15.25. 1) $y=e^x$, $y=e^{2x}$ і $x=1$; 2) $y=4^x$, $y=1$ і $x=1$;
3) $y=\dfrac{8}{x}$, $x=4$ і $y=4$; 4) $y=\dfrac{6}{x}$ і $y=7-x$.

Знайдіть об'єм тіла, що утворилося внаслідок обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями (**15.26–15.27**):

15.26. 1) $y=\sqrt{\sin x}$, $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{3}$ і $x=\dfrac{\pi}{2}$;
2) $y=3x+1$, $y=0$, $x=1$ і $x=2$.

15.27. 1) $y=\sqrt{\cos x}$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{6}$;

2) $y = 3x - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

15.28. Сила у 3 Н розтягує пружину на 1 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути цю пружину на 5 см?

15.29. Сила в 5 Н розтягує пружину на 2 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути цю пружину на 6 см?

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (**15.30–15.37**):

15.30. 1) $y = \cos x$, $y = -3\cos x$, $x=-\frac{\pi}{6}$, $x = 0$; 2) $y=-\sqrt{x}$ і $y=-\frac{x}{3}$.

15.31. 1) $y = \sin x$, $y = -2\sin x$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x = 0$; 2) $y=\sqrt{x}$ і $y=\frac{x}{4}$.

15.32. 1) $y = \sin x$, $y = -x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

2) $y = \cos\frac{x}{2}$, $y = x - \pi$, $x = 0$, $x = \pi$.

15.33. 1) $y = \cos x$, $y = -x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

2) $y = \sin 2x$, $y = x - \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

15.34. $y = 4\cos 3x - \sin 2x + 6$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$.

15.35. $y = \cos 2x - 2\sin 4x + 5$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

4 **15.36.** $y = 2^x$, $y = 4^{-x}$ і $y = 4$.

15.37. $y = 3^{-x}$, $y = 9^x$ і $y = 9$.

15.38. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 4x$, дотичною, проведеною до цієї параболи в точці з абсцисою $x = -1$, та віссю ординат.

15.39. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$, дотичною, проведеною до цієї параболи в точці з абсцисою $x = 1$, і віссю ординат.

Знайдіть об’єм тіла, що утворилося внаслідок обертання навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями (**15.40–15.41**):

15.40. $y=\sqrt{x}$, $y = 1$ і $x = 3$.

15.41. $y = x$, $y = 2$ і $x = 5$.

15.42. Для того щоб стиснути пружину на 0,03 м, треба виконати роботу в 16 Дж. На яку довжину можна стиснути цю пружину, виконавши роботу у 144 Дж?

15.43. Для того щоб стиснути пружину на 0,02 м, треба виконати роботу в 4 Дж. На яку довжину можна стиснути цю пружину, виконавши роботу у 100 Дж?

15.44. Знайдіть площу фігури, яка обмежена графіком функції $y = 2x - 5$ і графіком її первісної, який проходить через точку $A(1; -3)$.

15.45. Знайдіть площу фігури, яка обмежена графіком функції $y = 4x + 1$ і графіком її первісної, який проходить через точку $B(2; 6)$.

Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями (**15.46–15.57**):

15.46. 1) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 2^x - 1$, $x = 2$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = x^2 + 1$, $x = 2$.

15.47. 1) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 2^{x-1}$, $x = 4$; 2) $y = e^x$, $y = \frac{e}{x}$, $x = 0$, $y = 0$.

15.48. $y = \sin \pi x$ і $y = 4x^2 - 4x$. **15.49.** $y = \sin x$ і $y = x^2 - \pi x$.

15.50. 1) $y = 2^x$, $y = 3 - x$, $y = 0$, $x = 0$;

2) $y = \frac{1}{\sin^2 x}$, $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$.

15.51. 1) $y = 3^x$, $y = 5 - 2x$, $y = 0$, $x = 0$;

2) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

15.52. 1) $y = 5 + 4x$, $y = -x^3$, $x = 0$; 2) $y = 5 + 4x$, $y = -x^3$, $y = 0$.

15.53. 1) $y = 10 - x$, $y = x^3$, $x = 0$; 2) $y = 10 - x$, $y = x^3$, $y = 0$.

15.54. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{8 - x}$, $y = 0$, $x = 1$.

15.55. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{18 - x}$, $y = 0$, $x = 14$.

15.56. 1) $y = 2 - (1 - x)^2$ і $y = |x + 1|$; 2) $y = 1 + |x|$ і $y = 3 - x^2$.

15.57. 1) $y = 2 - |x + 1|$ і $y = (x - 1)^2$; 2) $y = 2 - |x|$ і $y = x^2$.

15.58. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^{\frac{4}{3}}$, дотичною, проведеною до графіка цієї функції у точці з абсцисою $x_0 = 8$, і віссю абсцис.

15.59. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^{\frac{5}{4}}$, дотичною, проведеною до графіка цієї функції у точці з абсцисою $x_0 = 1$, і віссю ординат.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (**15.60–15.63**):

15.60. $y = -x^2 + 2x + 2$, $y = -x^2 - 4x - 1$ і $y = 3$.

15.61. $y = x^2 - 4x + 5$, $y = x^2 + 8x + 17$ і $y = 1$.

15.62. $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - \sqrt{x}$, $3x + 5y = 22$.

15.63. $y = \sqrt{x}$, $y = 3 - 2\sqrt{x}$, $4x - 5y = 21$.

15.64. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 3 - 0,5x^2$ та двома взаємно перпендикулярними дотичними, проведеними до неї з точки, що належить осі ординат.

15.65. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 0{,}5x^2 + 2{,}5$ та двома взаємно перпендикулярними дотичними, проведеними до неї з точки, що належить осі ординат.

15.66. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 4x + 5$ і дотичними, проведеними до неї у точках з абсцисами $x = 1$ і $x = 4$.

15.67. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2x + 2$ і дотичними, проведеними до неї у точках з абсцисами $x = 0$ і $x = 3$.

15.68. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$ та двома дотичними до неї, що проходять через точку $A(0{,}75;\ 1{,}5)$.

15.69. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$ та двома дотичними до неї, що проходять через точку $B(2;\ 3)$.

15.70. Пряма $y = ax + b$ є дотичною до кожної з двох парабол $y = x^2 + 5x + 7$ і $y = x^2 - x - 5$. Знайдіть:
1) значення a і b;
2) координати точок дотику;
3) площу фігури, яка обмежена цими параболами та цією дотичною.

15.71. Прямі $y = 2x + 2$ і $y = 3{,}5 - x$ дотикаються до параболи $y = ax^2 + x + b$. Знайдіть:
1) значення a і b;
2) координати точок дотику;
3) площу фігури, яка обмежена параболою та цими прямими.

15.72. Знайдіть усі значення параметра a $(a \geqslant 2)$, при кожному з яких площа фігури, що лежить у півплощині $x \geqslant 0$ і обмежена прямими $y = 1$ і $y = 2$ та графіками $y = \sqrt{ax}$ і $y = 0{,}5\sqrt{ax}$, буде найбільшою. Знайдіть цю площу.

15.73. Знайдіть усі значення параметра a $(2 \leqslant a \leqslant 5)$, при кожному з яких площа фігури, що лежить у півплощині $x \geqslant 0$ і обмежена прямими $y = 2$ і $y = 3$ та графіками $y = \sqrt{ax}$ і $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{ax}$, буде найменшою. Знайдіть цю площу.

15.74. Знайдіть усі значення параметра b $(b > 0)$, при кожному з яких площа фігури, обмеженої параболами $y = 1 - x^2$ і $y = bx^2$, буде дорівнювати числу S. При яких значеннях S задача має розв'язки?

15.75. Знайдіть усі значення параметра p $(p < 0)$, при кожному з яких площа фігури, обмеженої параболами $y = x^2$ і $y = px^2 + 2$, дорівнюватиме числу S. При яких значеннях S задача має розв'язки?

15.76. Офіс обладнано приладами освітлення, які споживають 900 Вт щогодини. Щодоби прилади працюють по

10 годин. Якщо замінити їх на енергозберігаючі прилади, то витрати скоротяться на 80 %.

1) Скільки Вт протягом тижня (5 робочих днів) можна заощадити, використовуючи енергозберігаючі прилади?

2) *Проектна діяльність.* Дізнайтеся тариф на 1 кВт · год (1 кВт = 1000 Вт) електроенергії. Обчисліть, скільки коштів можна заощадити протягом цих 5 днів, якщо використовувати енергозберігаючі прилади освітлення.

15.77. (*Національна олімпіада Чехословаччини, 1956 р.*)

Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, де $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, що є розв'язками системи рівнянь: $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y} = 2\cos^2 y; \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2\sin^2 y. \end{cases}$

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 15

1. Яка з точок належить графіку рівняння $2x - 3y = 7$?

А	Б	В	Г	Д
$(-2; 1)$	$(2; -1)$	$(-2; -1)$	$(2; 1)$	жодна із запропонованих

2. Числа 4, x і 1 є послідовними членами геометричної прогресії. Знайдіть x.

А	Б	В	Г	Д
2,5	2	2 або −2	0	визначити неможливо

3. Множиною значень функції $y = 2^x + 1$ є проміжок...

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$[1; +\infty)$

4. Для функції $f(x) = \sin x$ укажіть первісну, яка проходить через точку $(\pi; 2)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\cos x$	$-\cos x + 2$	$-\cos x + 1$	$\sin x + 1$	$\cos x + 3$

5. Укажіть рівняння, що має безліч розв'язків.

А	Б	В
$2(x-1)=2x-2$	$\sin x=-1{,}5$	$\lvert x-3\rvert=1$
Г	**Д**	
$\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{3}$	$x^2+2x-3=0$	

6. Обчисліть $\sqrt{(\sqrt{11}-4)^2}+4$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{11}$	$\sqrt{11}+2$	$8-\sqrt{11}$	$\sqrt{11}+8$	15

7. Установіть відповідність між формулою функції (1–4) і критичними точками цієї функції (А–Д).

Функція

1 $f(x)=x^2+2x$

2 $f(x)=4x-x^2$

3 $f(x)=e^x-x$

4 $f(x)=\ln(x^2-2x)$

Критичні точки функції

А функція не має критичних точок

Б -1

В 0

Г 1

Д 2

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть найбільше значення функції $y=\frac{1}{4\cos x+5}$. Якщо функція не має найбільшого значення, то запишіть у відповідь число 100.

9. У ящику 7 білих, 5 чорних і кілька жовтих кульок. Знайдіть, скільки всього кульок у ящику, якщо ймовірність витягнути навмання жовту кульку дорівнює 0,25.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

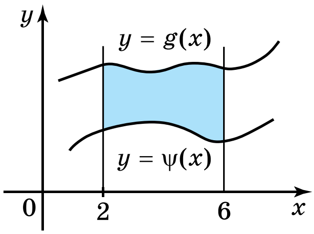
1 **1.** Обчисліть інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$.

А. $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Б.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **В.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Г.** $\frac{1}{2}$

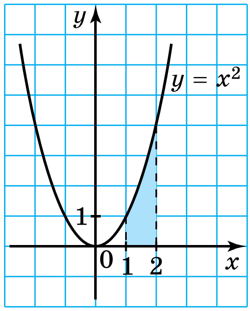
2. За якою формулою можна знайти площу заштрихованої на малюнку 15.21 фігури?

А. $\int_0^6 (g(x)-\psi(x))dx$ **Б.** $\int_2^6 (\psi(x)-g(x))dx$

В. $\int_2^6 (g(x)-\psi(x))dx$ **Г.** $\int_6^2 (\psi(x)-g(x))dx$



Мал. 15.21



Мал. 15.22

3. Знайдіть площу заштрихованої фігури на малюнку 15.22.

А. 4 **Б.** $2\frac{2}{3}$ **В.** $2\frac{1}{3}$ **Г.** $1\frac{2}{3}$

2 **4.** Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^{3} (1-4x)dx.$

А. −16 **Б.** −15 **В.** −8 **Г.** −12

5. Обчисліть за допомогою визначеного інтегралу площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = 2^x \ln 2$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

А. 14 **Б.** 12 **В.** $\frac{14}{\ln 2}$ **Г.** 16

6. Знайдіть об'єм тіла, що утворилося внаслідок обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = x$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

А. $7{,}5\pi$ **Б.** 24π **В.** 21π **Г.** $\frac{64\pi}{3}$

3 **7.** Обчисліть $\int_1^{16} \frac{x^2}{\sqrt[4]{x}}dx.$

А. 128 **Б.** 510 **В.** 512 **Г.** 127

8. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 6x$ і $y = 2x^2$.
А. 9 **Б.** 27 **В.** 18 **Г.** 12

9. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx$, використовуючи його геометричний зміст.

А. $\frac{1}{2}\pi$ **Б.** 4π **В.** π **Г.** 2π

4 **10.** Знайдіть $\int\limits_{-3}^{4} f(x)dx$, якщо $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{ якщо } -3 \leqslant x < 0; \\ (0,5x+1)^4, \text{ якщо } 0 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$

А. 96,8 **Б.** 109,2 **В.** 97,2 **Г.** 108,8

11. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos 2x dx$.

А. $\frac{1}{6}$ **Б.** $\frac{1}{12}$ **В.** $\frac{1}{3}$ **Г.** $\frac{1}{2}$

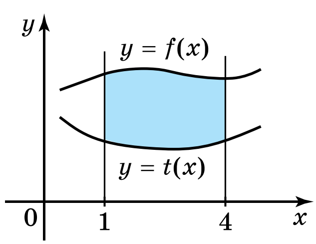
12. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2x$, дотичною, проведеною до неї у точці з абсцисою $x = 3$, і віссю ординат.

А. 9 **Б.** 12 **В.** 8 **Г.** 6

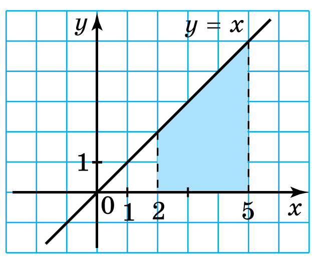
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 14–15

1 **1.** Обчисліть інтеграл: 1) $\int\limits_{1}^{3} x^2 dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi} \cos x dx$.

2. За якою формулою можна знайти площу заштрихованої фігури, зображеної на малюнку 15.23?



Мал. 15.23



Мал. 15.24

3. Знайдіть площу заштрихованої фігури (мал. 15.24).

2 **4.** Обчисліть інтеграл:

1) $\int\limits_{-1}^{2} (2x+1)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{3} (4x^3 - 2^x \ln 2)dx$.

5. Обчисліть за допомогою визначеного інтегралу площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$.

6. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$.

3 **7.** Обчисліть інтеграл: 1) $\int\limits_1^8 \frac{x^3dx}{x^{\frac{5}{3}}}$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)dx$.

8. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 2x^2$ і $y = 4x$.

4 **9.** Знайдіть $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ якщо } -2 \leqslant x \leqslant 0; \\ (0,5x - 1)^4, \text{ якщо } 0 < x \leqslant 2. \end{cases}$

Додаткові завдання

3 **10.** Обчисліть інтеграл $\int\limits_0^3 \sqrt{9 - x^2}dx$, використовуючи його геометричний зміст.

4 **11.** Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 4x - x^2$, дотичною, проведеною до неї в точці з абсцисою $x = 1$, і віссю ординат.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 11

1 **1.** Які з функцій є первісними для функції $f(x) = 5$:

1) $F(x) = 5x^2$; 2) $F(x) = 5x$; 3) $F(x) = 0$; 4) $F(x) = 5x - 7$?

2. Відомо, що $(x^2)' = 2x$. Запишіть три довільні первісні для функції $f(x) = x^2$.

2 **3.** Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$:

1) $F(x) = x^5 - 4x + 7$, $f(x) = 5x^4 - 4$;
2) $F(x) = e^{3x} - \cos x$, $f(x) = 3e^{3x} + \sin x$;
3) $F(x) = 12 + \sin 3x$, $f(x) = 3\cos 3x$;
4) $F(x) = e^x \sin x$, $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$.

4. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку:

1) $F(x) = \mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x$, $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $F(x) = \ln x + \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$.

5. Чи правильно знайдено невизначений інтеграл:

1) $\int 7xdx = 7 + C$; 2) $\int \cos xdx = \sin x + C$?

6. Покажіть, що функція $f(x) = x^4 + 3$ є розв'язком диференціального рівняння $y' = 4x^3$.

3 **7.** Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на R.

1) $F(x) = (5x^3 - 7)^4$, $f(x) = 60x^2(5x^3 - 7)^3$;

2) $F(x) = \sqrt{x^2+3} + \cos^2 x$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} - \sin 2x$.

8. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на вказаному проміжку:

1) $F(x) = 4x^{-3,5}\sqrt{x}$, $f(x) = -\dfrac{12}{x^4}$, $x \in (0; +\infty)$;

2) $F(x) = \dfrac{2}{x^5} - \ln(-x)$, $f(x) = -\dfrac{10}{x^6} - \dfrac{1}{x}$, $x \in (-\infty; 0)$.

9. Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на вказаному проміжку:

1) $F(x) = 2x + \operatorname{tg}4x$, $f(x) = 2 + \dfrac{4}{\cos^2 4x}$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{8}\right)$;

2) $F(x) = \cos 4x + \dfrac{5}{x}$, $f(x) = -\sin 4x - \dfrac{5}{x^2}$, $x \in (0; +\infty)$;

3) $F(x) = 3x^2 - \operatorname{ctg}2x$, $f(x) = 6x - \dfrac{2}{\sin^2 2x}$, $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

4) $F(x) = (3x^2 + 7)^5$, $f(x) = 30x(3x^2 + 7)^4$, $x \in (-\infty; +\infty)$?

10. Покажіть, що функція $y = 5e^{2x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y' - 2y = 0$.

4 **11.** Доведіть, що функція $F(x) = x^3|x|$ є первісною для функції $f(x) = 4x^2|x|$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

12. Чи є розв'язком диференціального рівняння $x^4y' = -3$ функція:

1) $y = \dfrac{1}{x^3}$; 2) $y = 4 - \dfrac{1}{x^3}$; 3) $y = \dfrac{1}{x^3} - 4$; 4) $y = -\dfrac{3}{x^4}$?

13. Чи є функція $F(x) = |x - 3|$ первісною для функції $f(x) = 1$, якщо $x \in [0; 4]$?

До § 12

1 **14.** Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

1) $f(x) = -5$; 2) $f(x) = e^x$; 3) $f(x) = x^5$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

15. Знайдіть невизначений інтеграл:

1) $\int x^{-8}dx$; 2) $\int \sin x dx$.

16. Знайдіть три різні первісні для функції:

1) $\int(x)=\frac{1}{x^3}$; 2) $f(x)=\sqrt[5]{x}$.

2 Знайдіть загальний вигляд первісних для функції **(17–18)**:

17. 1) $f(x) = 3\cdot 2^x$; 2) $f(x)=\frac{5}{\sin^2 x}$;

3) $f(x) = 3x^8$; 4) $f(x) = -7\cos x$.

18. 1) $f(x) = x^7 + x^2$; 2) $f(x) = 4x^3 - 2x + 7$;

3) $f(x) = 10x^4 + 12x^5$; 4) $f(x)=x^{10}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

19. Знайдіть невизначений інтеграл:

1) $\int\left(\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x}\right)dx$; 2) $\int(2\cos x - 3\sin x)dx$.

20. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, яка набуває даного значення в даній точці:

1) $f(x) = 4x^3$; $F(-1) = 3$; 2) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$; $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$.

21. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку A:

1) $f(x) = e^x$; $A(0;\ 7)$; 2) $f(x) = \cos x$; $A\left(\frac{\pi}{2};\ -2\right)$.

22. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що задовольняє дану умову:

1) $f(x)=\sqrt[9]{x}$; $F(1) = 3{,}9$; 2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; $F(16) = 4$.

3 **23.** Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку B:

1) $f(x) = 5x^4 - 6x$; $B(1;\ 2)$; 2) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-2$; $B(4;\ 4)$.

24. Для функції $f(x)$ знайдіть загальний вигляд первісних:

1) $f(x) = (2x + 3)^4$; 2) $f(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)$;

3) $f(x) = e^{0,5x-3}$; 4) $f(x)=\frac{3}{\sin^2\frac{x}{4}}$.

25. Знайдіть невизначений інтеграл:

1) $\int\frac{dx}{3x+7}$; 2) $\int 5^{\frac{1}{3}x-7}dx$.

26. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку C:

1) $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{24};0\right)$; 2) $f(x)=\frac{35}{7x-6}$, $C(1;\ 2)$.

27. Швидкість руху точки (в м/с) задано рівнянням $v(t) = 5 + 4t$. Знайдіть рівняння руху $s = s(t)$ цієї точки, якщо в момент часу $t = 1$ с точка пройшла $s = 10$ м.

4 **28.** Для функції $f(x)$ знайдіть загальний вигляд первісних:

1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6x-5}}+\frac{4}{\cos^2\frac{x}{3}}$; 2) $f(x)=\sqrt{2x+1}-e^{7-x}$.

29. Для функції $f(x)=\sqrt[5]{10x+1}$ знайдіть первісну, яка проходить через точку $\left(0;-\frac{11}{12}\right)$.

30. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)$, попередньо спростивши її формулу:

1) $f(x) = 2\sin 3x\cos 3x$; 2) $f(x)=\cos 2x\cos\frac{\pi}{8}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{8}$;

3) $f(x) = (2x^2 + x)^2$; 4) $f(x)=\frac{x^6-4x^3+x^2}{x^3}$.

31. Знайдіть первісну для функції $f(x) = 5x^4 + 2x - 7$, один з нулів якої дорівнює 2.

32. Точка рухається по прямій з прискоренням $a(t) = 7 + 2t$ (м/с^2). У момент часу $t = 2$ с швидкість точки була 20 м/с. Якою була швидкість точки в момент часу $t = 1$ с?

33. Чи можна стверджувати, що первісна для періодичної функції є також функцією періодичною?

До § 13

2 **34.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x$; $y = 0$; $x = 2$; $x = 4$; 2) $y = x^3$; $y = 0$; $x = 2$; $x = 3$;

3) $y=\frac{1}{\cos^2 x}$; $y = 0$; $x = 0$; $x=\frac{\pi}{4}$;

4) $y = x^2 + 2$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 3$.

35. Знайдіть площу фігури, обмеженої даними лініями, попередньо виконавши схематичний малюнок:

1) $y = x^4$; $y = 0$; $x = 2$; 2) $y = 9 - x^2$; $y = 0$.

36. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = e^x$; $y = 0$; $x = -2$; $x = 0$; 2) $y = 3^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$;
3) $y = e^x + 1$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 2$;
4) $y = 5^x\ln 5$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

37. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 10 + 0{,}2t$ (м/с). Знайдіть переміщення тіла:

1) за перші 3 с після початку відліку часу;
2) за інтервал часу з $t_1 = 10$ с до $t_2 = 20$ с.

3 Знайдіть, попередньо схематично виконавши малюнок, площу фігури, обмеженої лініями **(38–39)**:

38. 1) $y = x^2 - 1,\ y = 0,\ x = -2;$ 2) $y = x^2 - 3x,\ y = 0,\ x = 6;$
3) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 16;$ 4) $y = \sqrt{x+9},\ y = 0,\ x = 0.$

39. 1) $y = \cos 2x,\ y = 0,\ x = -\frac{\pi}{12},\ x = \frac{\pi}{12};$
2) $y = \sin\frac{x}{4},\ y = 0,\ x = 2\pi,\ x = 4\pi;$
3) $y = e^{3x+1},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1;$
4) $y = \frac{1}{x-3},\ y = 0,\ x = 4,\ x = 7.$

40. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 6t - 0{,}3t^2$ (м/с). Знайдіть:

1) переміщення тіла від початку руху до зупинки;
2) прискорення тіла в момент часу $t = 5$ с.

Знайдіть, попередньо виконавши схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями **(41–42)**:

41. 1) $y = \sqrt{|x|},\ y = 0,\ x = -9,\ x = -4;$
2) $y = |\sin x|,\ y = 0,\ x = -\frac{2\pi}{3},\ x = -\frac{\pi}{3}.$

4 **42.** $y = 0,\ y = \begin{cases} 1 + \sin\frac{x}{2}; & -\pi \leqslant x < 0; \\ 1 - \frac{x}{5}; & 0 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$

43. Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 3t^2 - 2t$ (м/с^2). Знайдіть переміщення точки за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с, якщо в момент часу $t = 2$ с її швидкість була 10 м/с.

До § 14

1 **44.** Чи правильно знайдено визначений інтеграл:

1) $\int_0^1 x^2 dx = 2x\Big|_0^1 = 2\cdot 1 - 2\cdot 0 = 2;$ 2) $\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4;$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1;$

4) $\int_{-4}^{2} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{0} = \frac{(-4)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 8?$

Обчисліть інтеграл **(45–51)**:

45. 1) $\int_0^4 x\,dx$; 2) $\int_1^4 5\,dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;

4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 5) $\int_{-2}^{0} e^x dx$; 6) $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$.

2 **46.** 1) $\int_{-2}^{1} (2x+3)dx$; 2) $\int_0^3 (4x^3 - x^2)dx$;

3) $\int_1^2 \frac{dx}{x^4}$; 4) $\int_{-5}^{-1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx$.

47. 1) $\int_0^1 (5^x \ln 5 + 2)dx$; 2) $\int_0^2 0{,}25^x \ln 4\,dx$;

3) $\int_0^1 (e^x + 3x^2)dx$; 4) $\int_2^4 (2^x \ln 4 - x)dx$.

3 **48.** 1) $\int_1^9 \frac{x\,dx}{x^{2,5}}$; 2) $\int_1^{32} \frac{6x}{\sqrt[5]{x^4}}dx$.

49. 1) $\int_{-2}^{0} (x+2)^5 dx$; 2) $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{2}dx$; 3) $\int_0^1 (1-3x)^3 dx$;

4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}$; 5) $\int_{-6}^{-1} \sqrt{3-x}\,dx$; 6) $\int_0^{121} \frac{dx}{\sqrt[5]{2x+1}}$.

50. 1) $\int_0^2 e^{-x}dx$; 2) $\int_{-4}^{0} e^{\frac{x}{4}}dx$; 3) $\int_0^{\frac{1}{3}} 7^{3x-1} \ln 7\,dx$; 4) $\int_0^2 \frac{dx}{5x+1}$.

51. 1) $\int_{0,1}^{1} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^4}\right)dx$; 2) $\int_0^6 \left(3^{\frac{x}{6}} + \sin \pi x\right)dx$.

52. Обчисліть, використовуючи геометричний зміст інтеграла:

1) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$; 2) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

4 **53.** Обчисліть інтеграл:

1) $\int_0^1 (x^2-4x)^2\,dx$;   2) $\int_{0,2}^{0,5} \frac{2x^4+x^3-x}{x^3}\,dx$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx$;   4) $\int_0^1 \frac{18^x+6^x}{2^x}\,dx$.

54. Знайдіть $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$, якщо $f(x)=\begin{cases}3x^2, \text{ якщо } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x+2, \text{ якщо } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

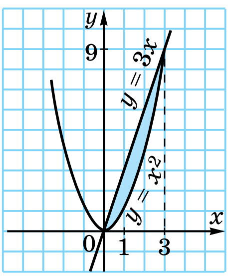
55. Обчисліть $\int_{-3}^{0} |x+1|\,dx$.

56. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^{2} \left(5-\sqrt{4-x^2}\right)dx$, використовуючи його геометричний зміст.

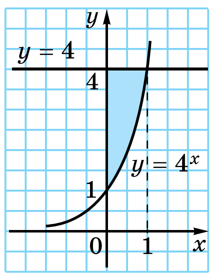
57. При якому значенні параметра a значення інтеграла $\int_0^a (4-2x)\,dx$ буде найбільшим?

До § 15

2 **58.** Знайдіть площу фігури, зображеної на:
1) малюнку 15.25;   2) малюнку 15.26.



Мал. 15.25



Мал. 15.26

3 **59.** Тіло рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекцію якої на цю вісь можна задати формулою $f(x) = 3x^2 - 2x$. Знайдіть роботу, яку виконає ця сила при переміщенні тіла з точки з абсцисою 2 у точку з абсцисою 5.

60. Знайдіть об'єм тіла, що утвориться внаслідок обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:
1) $y = x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$;   2) $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2$.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями **(61–62)**:

61. 1) $y = x^2$ і $y = -2x$; 2) $y = 3 - x^2$ і $y = 2x$;
3) $y = 5 - x^2$ і $y = 1$; 4) $y = 3x^2$ і $y = 1 - 2x$;
5) $y = x^2$ і $y = 2 - x^2$;
6) $y = x^2 + 4x$; $y = 5$ і $x = 0$ за умови, що $x \geqslant 0$.

62. 1) $y = 3^x$, $y = 9^x$, $x = 1$; 2) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;
3) $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 4$, $y = 4$; 4) $y = \dfrac{8}{x}$ і $y = 9 - x$.

63. Знайдіть об'єм тіла, що утвориться внаслідок обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y = \dfrac{1}{\cos x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $y = 2x - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

64. Сила в 4 Н розтягує пружину на 1 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 10 см?

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями **(65–66)**:

65. 1) $y = -\sin x$, $y = 2\sin x$, $x = -\dfrac{2\pi}{3}$, $x = 0$;

2) $y = \sqrt{x}$ і $y = \dfrac{x}{2}$.

66. $y = 8^x$, $y = 2^{-x}$ і $y = 8$.

Знайдіть об'єм тіла, що утворилося внаслідок обертання навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями **(67–68)**:

67. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ і $x = 8$.

68. $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 0$.

Українки у світі

***Зінаїда Іванівна Слєпкань** (1931–2006) в 1949 році разом з батьками оселилася у м. Мелітополь (Запорізька область), де з відзнакою закінчила фізико-математичний факультет педінституту й усе своє подальше життя присвятила педагогіці й математиці. У Києві захистила кандидатську дисертацію з педагогіки. З 1988 року професор кафедри методики математики. Перша жінка, яка за часів існування СРСР захистила докторську дисертацію з педагогічних наук. Крім багатьох опублікованих наукових праць з методики навчання математики як школярів, так і студентів, є співавтором підручника з алгебри і початків аналізу для 10–11 класів, за яким протягом десятка років навчалися українські школярі.*

РОЗДІЛ 3

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ...

- ***пригадаєте*** *поняття множини, ймовірності випадкової події; комбінаторні правила суми і добутку;*
- ***познайомитеся*** *з елементами комбінаторики; аксіомами теорії ймовірностей, операціями над подіями, умовною ймовірністю, випадковою величиною;*
- ***навчитеся*** *розв'язувати задачі з комбінаторики; знаходити ймовірність випадкової події, математичне сподівання випадкової величини.*

§ 16. МНОЖИНА ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ

Спочатку пригадаємо та розширимо поняття *множини*.

1. Поняття множини. Підмножина

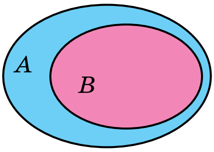
Раніше ми вже розглядали числові множини: натуральних чисел – N, цілих чисел – Z, раціональних чисел – Q, дійсних чисел – R.

Поняття *множини* в більш широкому розумінні є одним з основних у математиці і тому не може означатися через якісь елементарні поняття. Будемо розуміти під поняттям множини сукупність об'єктів будь-якої природи, а самі об'єкти при цьому будемо називати *елементами множини*.

Як правило, множини позначають великими латинськими літерами. Якщо, наприклад, множина A складається із чисел 1, 2, 3, 4, то це записують так: $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Числа 1, 2, 3, 4 – елементи множини A. Той факт, що число 1 належить множині A, записують за допомогою відомого нам символа належності $\in$, а саме: $1 \in A$. Якщо число 5 не належить множині A, це записують так: $5 \notin A$.

У математиці також розглядають множину, яка не містить жодного елемента, тобто *порожню множину*. Її позначають символом $\varnothing$. Так, наприклад, порожньою множиною є множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Якщо кожен елемент множини B є елементом множини A, то кажуть, що множина B є підмножиною множини A.



Мал. 16.1

Записують це за допомогою символа підмножини: $B \subset A$, а схематично можна проілюструвати за допомогою кругів Ейлера, які ще називають *діаграмами Ейлера–Венна* (мал. 16.1).

Приклад 1. Нехай $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{4; 5\}$. Тоді множина B є підмножиною множини A, тобто $B \subset A$. Множина C не є підмножиною множини A, оскільки множина C містить елемент 5, який не міститься в множині A.

Приклад 2. Для відомих нам числових множин маємо: $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $N \subset Q$, $Z \subset R$ тощо.

Вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

2. Рівність множин

Розглянемо множини $A = \{1; 2; 3\}$ і $B = \{2; 3; 1\}$. Ці множини складаються з одних і тих самих елементів. Такі множини називають *рівними* і записують так: $A = B$.

Множини A і B містять скінченну кількість елементів. Такі множини називають *скінченними*, а у протилежному випадку – *нескінченними*. Отже,

скінченні множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів.

Означення рівних множин (як скінченних, так і нескінченних) можна сформулювати і через поняття підмножини:

дві множини називають рівними, якщо кожна з них є підмножиною іншої.

3. Впорядковані множини

Повернемося до множин $A = \{1; 2; 3\}$ і $B = \{2; 3; 1\}$, які ми вже розглянули вище та з'ясували, що $A = B$. Помічаємо, що порядок розташування елементів у кожній з множин A і B різний. Для рівності множин порядок розташування значення не має. Але часто в математиці цей порядок має значення, тобто важливо, який елемент множини стоїть на першому місці, який – на другому, який – на третьому і так само далі. Множини, для яких порядок розташування елементів має значення, називають *впорядкованими*. Для запису впорядкованих множин замість фігурних дужок використовують круглі. Якщо множини A і B розглядати як впорядковані, то їхній запис виглядaтиме так: $A = (1; 2; 3)$ і $B = (2; 3; 1)$. У цьому випадку вони вже не будуть рівними, тобто $A \neq B$, оскільки для рівності впорядкованих множин важливим є ще й порядок розташування елементів у множині, який надалі в теорії множин і задачах з комбінаторики коротко називатимемо порядком елементів.

Невпорядковані множини можна впорядковувати за різними правилами.

Приклад 3. Дано невпорядковану множину $A = \{2; -1; 4\}$. Упорядкувати множину A за: 1) зростанням; 2) спаданням; 3) зростанням модулів її елементів.

Розв'язання. 1) $B = (-1; 2; 4)$; 2) $C = (4; 2; -1)$; 3) $D = (-1; 2; 4)$. Зауважимо, що, наприклад, $B \neq C$, але $B = D$.

• Що розуміють під поняттям множини? • Що називають елементами множини? • Що таке порожня множина? • Коли множину B називають підмножиною множини A? • Які скінченні множини називають рівними? • Сформулюйте означення рівних множин через поняття підмножини. • Які множини називають впорядкованими?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

16.1. (*Усно*). Наведіть приклади скінченних і нескінченних множин.

16.2. (*Усно*). Назвіть елементи множини:

1) $A = \{7; 5; 9; 11\}$; 2) $B = \{*; \triangle; \square\}$.

До яких відомих числових множин (N, Z, Q або R) належать числа **(16.3 –16.4)**:

16.3. 1) 8,2; 2) $-3\frac{1}{7}$; 3) 0; 4) π; 5) $\sqrt{11}$; 6) -6; 7) $\frac{e}{2}$; 8) 13?

16.4. 1) $-7,2$; 2) $2\frac{1}{3}$; 3) e; 4) 10; 5) $\sqrt{13}$; 6) $\frac{\pi}{3}$; 7) -5; 8) 111,2?

Запишіть множину (та назвіть усі її елементи) **(16.5–16.6)**:

16.5. 1) Одноцифрових непарних натуральних чисел;
2) парних натуральних чисел, менших за число 20;
3) букв слова «атом»;
4) днів тижня.

16.6. 1) Двоцифрових натуральних чисел, кратних числу 33;
2) непарних натуральних чисел, менших за число 15;
3) букв слова «зима»;
4) місяців року.

16.7. Множина A складається з коренів рівняння $\cos x = 3$. Що це за множина?

16.8. Множина B складається з коренів рівняння $|x| + 5 = 0$. Що це за множина?

16.9. (*Усно*). Наведіть приклади порожніх множин.

2 Чи правильне твердження (**16.10–16.11**):

16.10. 1) $N \subset Z$; 2) $Q \subset Z$; 3) $N \subset R$; 4) $R \subset Q$?

16.11. 1) $Q \subset N$; 2) $N \subset Q$; 3) $Z \subset R$; 4) $R \subset N$?

16.12. Укажіть характерну властивість множини:
1) $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$;
2) $B = \{$до; ре; мі; фа; соль; ля; сі$\}$?

16.13. Чи правильно, що $A \subset B$, якщо:
1) $A = \{1\}$; $B = \{1; 8; 7\}$; 2) $A = \{*; !\}$; $B = \{*; \triangle; \square\}$;
3) $A = \varnothing$; $B = \{$а; б; в$\}$; 4) $A = \{P; L; Q\}$; $B = \{P\}$;
5) A – множина простих чисел; B – множина цілих чисел;
6) A – множина натуральних чисел; B – множина натуральних чисел, кратних числу 10?

16.14. Чи правильно, що $C \subset D$, якщо:
1) $C = \{7; 8\}$; $D = \{7; 9; 10\}$; 2) $C = \{\triangle; \square\}$; $D = \{*; \triangle; \bigcirc; \square\}$;
3) $C = \{2; 7; 13\}$; $D = \varnothing$; 4) $C = \{A; Б; B\}$; $D = \{A; Б; B\}$?

3 **16.15.** Множина C складається з розв'язків рівняння $|x| - 1 = 0$, а множина D – з розв'язків рівняння $x^2 - 1 = 0$. Чи правильно, що C є підмножиною D? А навпаки?

16.16. Множина B складається з розв'язків рівняння $x^2 - 3x - 10 = 0$, а множина A з розв'язків рівняння $(x - 5)(x + 2) = 0$. Чи правильно, що B є підмножиною A? А навпаки?

16.17. Упорядкуйте елементи множини $A = \{-2; 9; 7\}$:
1) за зростанням; 2) за спаданням;
3) за зростанням їх модулів; 4) за спаданням їх модулів.
Чи є серед цих впорядкованих множин рівні між собою впорядковані множини?

16.18. Упорядкуйте елементи множини $B = \{2; -1; 7\}$:
1) за зростанням; 2) за спаданням;
3) за зростанням їх модулів; 4) за спаданням їх модулів.
Чи є серед цих впорядкованих множин рівні між собою впорядковані множини?

16.19. Запишіть усі підмножини множини $C = \{4; 5; 6\}$, що складаються з:
1) одного елемента; 2) двох елементів;
3) трьох елементів.

16.20. Запишіть усі підмножини множини $D = \{\triangle; \square; \bigcirc\}$, що складаються з:

1) одного елемента; 2) двох елементів;
3) трьох елементів.

4

16.21. Множина A складається з коренів рівняння $\sin x = 0$, а множина B – з коренів рівняння $\cos x = 1$. Чи правильно, що:

1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A = B$?

16.22. Множина C складається з коренів рівняння $\sin x = 1$, а множина D – з коренів рівняння $\cos x = 0$. Чи правильно, що:

1) $C \subset D$; 2) $D \subset C$; 3) $C = D$?

16.23. Родина планує купити 5 т облицювальної цегли у одного з трьох постачальників. Вага однієї цеглини 2,5 кг. Ціни на цеглу та умови її доставки наведено в таблиці. Скільки коштуватиме найдешевший варіант покупки?

Постачальник	Ціна цегли (грн за шт)	Вартість доставки (грн)	Додаткові умови
А	5	2000	Немає
Б	5,3	1800	Для замовлень на суму понад 10 000 грн діє знижка 50 % на доставку
В	5,6	1200	Для замовлень на суму понад 10 000 грн доставка безкоштовна

16.24. Відомо, що $x^2 + y^2 = 1$. Якого найменшого і якого найбільшого значень може набувати вираз $4(x^3 - y^3) - 3(x - y)$?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

16.25. У класі 12 юнаків і 10 дівчат. Скількома способами можна вибрати:

1) одного представника від класу;
2) пару представників: юнака і дівчину?

16.26. Скількома способами можна вишикувати в шеренгу трьох учнів?

16.27. Скільки різних двоцифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, якщо в кожному з чисел цифри не повторюються?

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 16

1. Укажіть найменший додатний період функції $y = \cos\frac{x}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
2π	4π	6π	8π	16π

2. Знайдіть $f'(0)$, якщо $f(x) = 3x^2 - 5\sin x$.

А	Б	В	Г	Д
11	5	1	0	−5

3. Обчисліть $7^{\frac{1}{3}\log_7 8}$.

А	Б	В	Г	Д
2	7	8	64	512

4. Укажіть функцію, графік якої симетричний відносно початку координат.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2$	$y = \cos x$	$y = \sin x$	$y = \sqrt{x}$	$y = \frac{1}{x} + 1$

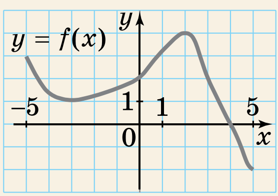
5. Укажіть нерівність, що має розв'язки.

А	Б	В	Г	Д
$5^x < -5$	$7^x \leqslant 0$	$x^2 + 1 < 0$	$2^x - 8 \geqslant 0$	$5^{x^2} < 1$

6. Спростіть вираз $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \text{tg}^2\,\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
−1	1	$1 - 2\text{tg}^2 a$	$\sin^2 a$	$\text{ctg}^2 a$

7. На малюнку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 5]$. Установіть відповідність між аргументом x_0 (1–4) та значенням функції $y = f(x_0)$ (А–Д).



Аргумент	*Значення функції*
1 x_0 – точка мінімуму функції $y = f(x)$	**А** 0
2 x_0 – точка максимуму функції $y = f(x)$	**Б** 1
3 x_0 – абсциса точки перетину графіка функції $y = f(x)$ із віссю Ox	**В** 2
4 x_0 – абсциса точки перетину графіка функції $y = f(x)$ із віссю Oy	**Г** 3
	Д 4

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Розв'яжіть рівняння $\log_2(x + 4) + \log_2(5 - x) = 3$. Якщо рівняння має кілька коренів, у відповідь запишіть їхню суму.

9. У двох сплавах цинк і мідь відносяться як 4 : 3 і 2 : 5 відповідно. На скільки кілограмів більше треба взяти одного сплаву, ніж другого, щоб одержати 20 кг нового сплаву з однаковим вмістом цинку і міді?

§ 17. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. РОЗМІЩЕННЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ, КОМБІНАЦІЇ

Комбінаторика – розділ математики, у якому вивчають способи вибору і розташування елементів з деякої скінченної множини відповідно до заданих умов. Вибрані (або вибрані й відповідно розміщені) групи елементів називають *сполуками*. Комбінаторика вивчає такі сполуки: *розміщення*, *перестановки*, *комбінації* тощо.

Перш ніж перейти до вивчення сполук, пригадаємо деякі комбінаторні правила.

1. Правило суми і правило добутку

Багато комбінаторних задач можна розв'язати за допомогою двох важливих правил, які називають відповідно комбінаторними *правилом суми* і *правилом добутку*.

Приклад 1. В овочевому відділі супермаркету є 5 сортів яблук червоного кольору і 4 сорти зеленого. Скількома способами можна вибрати для купівлі кілограм яблук одного сорту?

Зрозуміло, що вибрати яблука сорту червоного кольору можна 5 способами, а вибрати яблука зеленого кольору – 4 способами. Отже, вибрати один із сортів яблук можна $5 + 4 = 9$ способами.

Узагальнюючи, отримаємо *комбінаторне правило суми*:

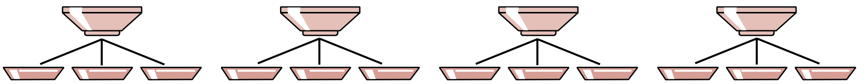
якщо деякий елемент A можна вибрати m способами, а деякий елемент B – k способами (причому будь-який вибір елемента A відрізняється від вибору елемента B), то вибрати A *або* B можна $m + k$ способами.

Зрозуміло, що це правило можна поширити на три і більше елементів.

Приклад 2. У шкільній їдальні можна вибрати обід з 4 перших і 3 других страв. Скільки різних варіантів обідів, що складаються з однієї першої і однієї другої страв, можна вибрати у цій їдальні?

Зрозуміло, що першу страву можна вибрати 4 способами і до кожної першої страви обрати другу страву 3 способами (мал. 17.1).
Отже, є $4 \cdot 3 = 12$ різних варіантів обідів.

Перші страви



Другі страви

Мал. 17.1

Узагальнюючи, отримаємо *комбінаторне правило добутку*:

якщо деякий елемент A можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору інший елемент B можна вибрати k способами, то пару об'єктів A *і* B можна вибрати $m \cdot k$ способами.

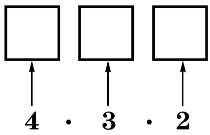
Це правило також можна поширити на три і більше елементів. Розглянемо кілька більш складних задач.

Приклад 3. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 5, 6, 7, 8, якщо в числі:

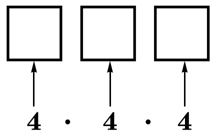
1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються?

Розв'язання. 1) Маємо 4 способи для сотень числа (мал. 17.2). Після того як місце сотень заповнене (однією з даних 4 цифр), для десятків залишається 3 способи (3 цифри, що залишилися), міркуючи далі, для одиниць – 2 способи. Отже, маємо: 4 способи, **і** після кожного з них – 3 способи, **і** після кожного з них – 2 способи. За правилом добутку маємо $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ числа.

2) Якщо цифри в числі повторюються, то кожне з трьох місць можна заповнити 4 способами (мал. 17.3), і тоді всіх чисел буде $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.



Мал. 17.2



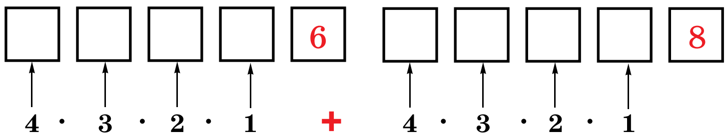
Мал. 17.3

Відповідь. 1) 24 числа; 2) 64 числа.

Зауважимо, що, не користуючись комбінаторними правилами, такі задачі ми змогли б розв'язати лише шляхом перебору всіх чисел, що задовольняють умову, а таке розв'язання, безумовно, є дуже громіздким.

Приклад 4. Скільки парних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 5; 6; 7; 8; 9, якщо в числі цифри не повторюються?

Розв'язання. Парне п'ятицифрове число можна отримати, якщо останньою цифрою буде 6 або 8. Чисел, у яких останньою є цифра 6, буде $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, у яких останньою є цифра 8 – також 24 (мал. 17.4). За комбінаторним правилом суми парних чисел буде $24 + 24 = 48$.



Мал. 17.4

Відповідь. 48 чисел.

2. Поняття факторіала

Важливим у комбінаториці є поняття факторіала.

Факторіалом числа *n*, де *n* – ціле невід'ємне число, називають добуток усіх натуральних чисел від 1 до *n*.

Позначають факторіал числа n так: $n!$ (читають: «ен факторіал»). Отже, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Наприклад, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. За означенням вважають, що $0! = 1$.

Приклад 5. Спростіть вираз $\frac{5!}{4!}$.

Розв'язання. *1-й спосіб.* $\frac{5!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$

2-й спосіб. $\frac{5!}{4!} = \frac{4! \cdot 5}{4!} = 5.$

Відповідь. 5.

Тепер перейдемо до розгляду сполук, що є одними з основних понять комбінаторики.

Щоб зрозуміти, які бувають сполуки та чим вони відрізняються одна від одної, припустимо, що ми маємо певну кількість предметів (елементів деякої множини) і певну кількість місць, на яких їх треба розмістити (впорядковано або невпорядковано), причому кількість місць не перевищує кількість предметів.

3. Розміщення

Нехай дано множину X, що складається з n елементів, та m місць, на яких їх треба розмістити.

***Розміщенням* з n елементів по m ($m \leqslant n$) називають будь-яку впорядковану підмножину Y з m елементів множини X, причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом або порядком елементів.**

Приклад 6. Нехай дано множину $X = \{a; b; c\}$. З трьох елементів a, b, c множини X можна скласти такі розміщення, тобто впорядковані підмножини множини X:
1) по одному елементу: (a), (b), (c) – їх буде 3;
2) по два елементи: $(a; b)$, $(a; c)$, $(b; c)$, $(b; a)$, $(c; a)$, $(c; b)$ – їх буде 6;
3) по три елементи: $(a; b; c)$, $(a; c; b)$, $(b; a; c)$, $(b; c; a)$, $(c; a; b)$, $(c; b; a)$ – їх буде 6.

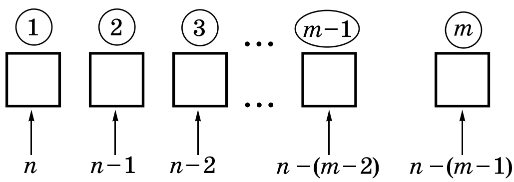
Кількість розміщень з n елементів по m позначають через A_n^m (читають: «а з ен по ем»)[1].

У прикладі 6 маємо: $A_3^1 = 3$; $A_3^2 = 6$; $A_3^3 = 6$.

Знайдемо загальну формулу для знаходження A_n^m, де $m \leqslant n$.

Приклад 7. Нехай дано множину з n елементів, $m \in N$, $m \leqslant n$. Обчислити A_n^m.

Р о з в ' я з а н н я. Будемо з даних n елементів складати впорядковані підмножини з m елементів, інакше кажучи, розміщувати n елементів по m місцях. На перше місце можна помістити будь-який з n елементів (мал. 17.5), тобто маємо n способів.



Мал. 17.5

[1] Позначення A_n^m походить від першої літери слова *arrangement*, що французькою означає «розміщення».

На друге місце – вже $(n-1)$ елементів, що залишилися після вибору першого, на третє – $(n-2)$ елементів, що залишилися після вибору перших двох, і так само далі. На останнє місце під номером m можна вибрати лише один з $n-(m-1)$ елементів, що залишилися після вибору $(m-1)$ попередніх.

Використовуючи комбінаторне правило добутку, отримаємо:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-(m-2))(n-(m-1)).$$

Цю формулу можна запам'ятати за допомогою такого правила:

A_n^m – це добуток m натуральних чисел, починаючи з числа n, записаних у порядку спадання.

За отриманою формулою $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ (що збігається з раніше обчисленим у прикладі 6), а $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Якщо отриманий у формулі для A_n^m вираз помножити і поділити на $(n-m)!$, то матимемо ще одну формулу для обчислення кількості розміщень з n по m:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Приклад 8. Шкільний розклад містить 6 уроків на день. Знайти, скільки є варіантів такого розкладу при виборі з 10 предметів за умови, що жоден предмет не повторюється в розкладі двічі.

Р о з в ' я з а н н я. Зрозуміло, що варіантів таких розкладів буде $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\ 200$.

В і д п о в і д ь. 151 200.

Приклад 9. Скільки різних правильних дробів можна скласти з чисел 1; 3; 5; 7; 11; 13; 17, використовуючи їх для запису і чисельника, і знаменника дробу?

Р о з в ' я з а н н я. Дробів, у яких чисельник не дорівнює знаменнику, можна скласти A_7^2 штук, але лише половина з них будуть правильними. Отже, маємо таку кількість дробів: $\frac{1}{2} \cdot A_7^2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 21$.

В і д п о в і д ь. 21.

Комбінаторні формули можуть міститися у рівняннях або нерівностях та у системах рівнянь.

Приклад 10. Розв'язати нерівність $A_x^2 \leqslant 42$.

Р о з в ' я з а н н я. ОДЗ змінної в нерівності: $x \in N$, $x \geqslant 2$. За формулою розміщень маємо: $A_x^2 = x(x-1)$. Тоді нерівність набуде вигляду: $x(x-1) \leqslant 42$, тобто є квадратною: $x^2 - x - 42 \leqslant 0$, звідки $-6 \leqslant x \leqslant 7$.

Ураховуючи ОДЗ, отримаємо, що $x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Відповідь. 2; 3; 4; 5; 6; 7.

4. Перестановки

Припустимо, що ми маємо певну кількість предметів і таку саму кількість місць, на яких їх треба розмістити.

***Перестановкою* з *n* елементів називають будь-яку впорядковану множину з усіх цих елементів, причому дві такі множини вважають різними, якщо вони відрізняються між собою порядком елементів.**

Кількість перестановок з n елементів позначають P_n (читають: «пе з ен»)[1].

Знайдемо формулу для P_n. Із означення перестановки зрозуміло, що $P_n = A_n^n$. Тоді, враховуючи формулу розміщень A_n^n та те, що $0! = 1$, матимемо: $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

Отже,

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Приклад 11. Скількома способами можна розташувати на полиці 5 книжок?

Розв'язання. Очевидно, що шукана кількість способів дорівнює кількості перестановок з 5 елементів:

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Відповідь. 120.

Приклад 12. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 2, 4, 6, 8, якщо в кожному числі жодна з цифр не повторюється?

Розв'язання. З п'яти цифр 0, 2, 4, 6, 8 можна утворити P_5 перестановок. Але п'ятицифрове число не може починатися з цифри нуль. Перестановок, що починаються з цифри 0, а отже, не задовольняють умову задачі, буде P_4. Отже, шукана кількість п'ятицифрових чисел дорівнює:

$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 4!(5 - 1) = 24 \cdot 4 = 96.$

Відповідь. 96.

Приклад 13. Дитина викладає в ряд шість кубиків із числами від 1 до 6. Скільки існує способів такого викладання, щоб числа 1 і 2 опинилися поряд?

[1] Позначення P_n походить від першої літери слова *permutation*, що французькою означає «перестановка».

Р о з в ’ я з а н н я. Умовно об’єднаємо кубики 1 і 2 в один «кубик». Тоді матимемо не шість, а п’ять кубиків, які можна розташувати в ряд 5! способами. При кожному такому розташуванні кубики з числами 1 і 2 можна поміняти між собою місцями 2! способами. Отже, за комбінаторним правилом добутку, остаточно отримаємо: 5! · 2! = 240.

В і д п о в і д ь. 240 способів.

5. Комбінації (сполучення)

Нехай дано множину X, що складається з n елементів.

Комбінацією (сполученням) з n елементів по m ($m \leqslant n$) називають будь-яку підмножину Y з m елементів множини X, причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються лише складом елементів.

Кількість комбінацій з n елементів по m позначають C_n^m (читають: «це з ен по ем»)[1].

Зверніть увагу, що для комбінацій порядок елементів значення не має.

Знайдемо формулу для C_n^m.

Приклад 14. Нехай дано множину з n елементів, $m \in N$, $m \leqslant n$. Обчислити C_n^m.

Р о з в ’ я з а н н я. Спочатку складемо впорядковані підмножини з n елементів по m, їх, як відомо, A_n^m. Але для комбінацій нас не цікавить порядок елементів у кожній такій підмножині. Елементи кожної підмножини можна переставити між собою P_m способами. Отже, число C_n^m у P_m разів менше за число A_n^m, тобто:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!} : m! = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Отже,

$$\boldsymbol{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}.$$

Наприклад, $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$

Приклад 15. У вазі 7 червоних і 5 білих троянд. Скількома способами з вази можна вибрати:

1) три троянди; 2) дві червоні й одну білу троянду?

Р о з в ’ я з а н н я. 1) Маємо множину з 12 елементів. Треба знайти кількість підмножин з трьох елементів цієї множини.

---

[1] Позначення C_n^m походить від першої літери слова *combinare*, що латинською означає «сполучати», а також *combinaison*, що французькою означає «комбінація».

Оскільки порядок елементів у підмножині не має значення, то вибрати 3 троянди з 12 можна C_{12}^3 способами. Отже,

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{9!\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{3!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3} = 220.$$

2) Оскільки порядок елементів у підмножинах, які ми вибираємо, неважливий, то дві червоні троянди можна вибрати C_7^2 способами, а одну білу – C_5^1 способами. Тому, за комбінаторним правилом добутку, дві червоні й одну білу троянду можна вибрати $C_7^2 \cdot C_5^1$ способами. Маємо:

$$C_7^2 \cdot C_5^1 = \frac{7!}{2!(7-2)!}\cdot\frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{4!\cdot 5}{1\cdot 4!} = 21\cdot 5 = 105.$$

В і д п о в і д ь. 1) 220; 2) 105.

Підсумуємо суттєві ознаки тих сполук, які ми розглянули в цьому параграфі.

Якщо під час вибору *m* елементів з *n* елементів, $m \leqslant n$, порядок елементів має значення, то маємо розміщення (або перестановку), а якщо ні – комбінацію.

Зверніть увагу, що для розв'язування комбінаторних задач, у яких ми шукаємо кількість підмножин даної множини, які задовольняють певну умову, важливо правильно з'ясувати, про яку саме сполуку (розміщення, перестановку чи комбінацію) ідеться у задачі, і далі використати відповідну формулу цієї сполуки.

Установити вид сполуки допоможе така схема.

Як визначити кількість підмножин деякої множини

Нехай n – кількість елементів множини,
m – кількість елементів підмножини, $m \leqslant n$

Порядок елементів має значення?

так → *Вибираємо всі n елементів?*

- так → Маємо перестановку $P_n = n!$
- ні → Маємо розміщення $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

ні → Маємо комбінацію $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Прикладом до використання схеми може бути така задача.

	У класі 30 учнів. Скількома способами можна ...		
Умова задачі	... вишикувати всіх учнів класу в одну шеренгу	... вибрати старосту класу і його заступника	... вибрати трьох чергових по класу
Характерні ознаки сполуки	1) Всі 30 учнів; 2) порядок має значення.	1) Тільки 2 учні з 30; 2) порядок має значення.	1) Тільки 3 учні з 30; 2) порядок значення не має.
Висновок щодо виду сполуки	ПЕРЕСТАНОВКА P_n	РОЗМІЩЕННЯ A_n^m	КОМБІНАЦІЯ C_n^m
Розв'язання задачі	$P_{30} = 30!$	$A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$	$C_{30}^3 = \dfrac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$

А ще раніше...

Щось близьке до комбінаторики вперше згадується в китайських рукописах XIII–XII ст. до н. е. Деякі комбінаторні задачі розв'язували і в Давній Греції. Зокрема, Арістоксен із Тарента (IV ст. до н. е.), учень Арістотеля, перелічив різні комбінації довгих і коротких складів у віршових розмірах. А Папп Олександрійський у IV ст. н. е. з'ясовував кількість пар і трійок, які можна скласти з трьох елементів, що можуть повторюватися. Деякі елементи комбінаторики були відомі і в Індії у II ст. до н. е. Індійці вміли обчислювати числа, які зараз відомі нам як коефіцієнти формули бінома Ньютона. Пізніше, у VIII ст. н. е., арабські вчені знайшли й саму цю формулу, отже, і її коефіцієнти, які нині обчислюють за допомогою комбінаторних формул або «трикутника Паскаля».

Сучасного вигляду згадані комбінаторні формули набули завдяки середньовічному вченому Леві бен Гершону (XIV ст.) та французькому математику П. Ерігону (XVII ст.).

У III ст. н. е. сирійський філософ Порфирій для класифікації понять склав особливу схему, яка отримала назву «древо Порфирія». Зараз подібні дерева використовуються для розв'язування певних задач комбінаторики в різноманітних галузях знань. Деякі раніше невідомі комбінаторні задачі розглянув Леонардо Пізанський (Фібоначчі) у своїй праці «Liber Abaci» (1202 р.), зокрема, про знаходження кількості гирь, за допомогою яких можна відміряти вагу, що є цілим числом від 1 до 40 фунтів.

Як не дивно, розвитку комбінаторики значною мірою посприяли азартні ігри, які набули неабиякої популярності в XVI ст. Зокрема, у той час питаннями визначення різноманітних комбінацій у грі в кості займалися такі відомі італійські математики, як Дж. Кардано, Н. Тарталья та ін. А найбільш повно це питання дослідив Галілео Галілей у XVII ст.

Сучасні комбінаторні задачі високого рівня пов'язані з об'єктами в інших галузях математики: визначниками, скінченними геометріями, групами, математичною логікою тощо.

• Що вивчає комбінаторика? • Сформулюйте комбінаторні правило суми і правило добутку. • Що таке факторіал числа? • Що називають розміщенням? • Запам'ятайте формулу для знаходження кількості розміщень A_n^m. • Сформулюйте правило, за яким знаходять розміщення. • Що називають перестановками? • Запам'ятайте формулу для знаходження перестановок P_n. • Що називають комбінаціями? • Запам'ятайте формулу для знаходження комбінацій C_n^m.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Обчисліть (**17.1–17.2**):

17.1. 1) A_4^2; 2) A_5^3; 3) P_4; 4) P_6; 5) C_5^2; 6) C_7^4.

17.2. 1) A_5^2; 2) A_4^3; 3) P_3; 4) P_5; 5) C_5^3; 6) C_7^5.

Утворіть усі перестановки множини (**17.3–17.4**):

17.3. 1) $A = \{a;\ b\}$; 2) $B = \{*;\ \triangle;\ \square\}$.

17.4. 1) $A = \{1;\ 2\}$; 2) $B = \{?;\ !;\ \bigcirc\}$.

17.5. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 5, 6, 7, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

17.6. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, якщо цифри в числі не повторюються?

17.7. На тарілці лежить 5 яблук і 8 слив. Скількома способами з тарілки можна взяти:
1) один фрукт; 2) одне яблуко й одну сливу?

17.8. У класі 10 юнаків і 15 дівчат. Скількома способами можна вибрати:
1) одного представника від класу;
2) пару представників – юнака і дівчину?

2 Скоротіть дріб (**17.9–17.10**):

17.9. 1) $\frac{8!}{5!}$; 2) $\frac{P_3}{P_7}$; 3) $\frac{A_7^2}{A_6^3}$; 4) $\frac{C_5^3}{C_6^4}$.

17.10. 1) $\frac{3!}{5!}$; 2) $\frac{P_8}{P_6}$; 3) $\frac{A_8^3}{A_6^2}$; 4) $\frac{C_7^3}{C_5^2}$.

Обчисліть значення виразу (**17.11–17.12**):

17.11. 1) $\frac{P_5+P_4}{P_4}$; 2) $\frac{A_7^3+A_7^4}{A_7^2}$; 3) $\frac{A_8^3}{P_3}$; 4) $C_{2020}^{2020}+C_{18}^1$.

17.12. 1) $\frac{P_4-P_3}{P_3}$; 2) $\frac{A_5^2+A_5^4}{A_5^3}$; 3) $\frac{A_7^4}{P_2}$; 4) $C_{27}^1+C_{2010}^{2010}$.

17.13. Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного й одного приголосного звуків у слові «студент»?

17.14. Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного й одного приголосного звуків у слові «купол»?

17.15. Скількома способами можна вишикувати в шеренгу 6 учнів?

17.16. 10 учасників шахового турніру грають у залі, де є 5 столів. Скількома способами можна розмістити шахістів за столами, якщо учасники всіх партій і колір фігур кожного з них відомі?

17.17. Скількома способами з 5 членів президії можна вибрати голову зборів і секретаря?

17.18. У секції легкої атлетики тренується 8 спортсменів. Скількома способами між ними можна розподілити етапи естафети 4×100 м (тобто кожен із чотирьох атлетів, що бере участь в естафеті, біжить свій етап: перший, або другий, або третій, або четвертий)?

17.19. Туристична група складається з 16 осіб. Скількома способами з них можна сформувати групу з 3 туристів для екскурсії?

17.20. Скількома способами з 20 учнів класу можна обрати чотирьох для участі у святковому концерті?

17.21. На колі розміщено 10 точок. Скільки є трикутників з вершинами в цих точках?

17.22. На колі розміщено 15 точок. Скільки різних відрізків можна отримати, з’єднуючи ці точки попарно?

17.23. Гральний кубик підкидають двічі. Скільки різних послідовностей чисел можна при цьому отримати?

17.24. Монету підкидають тричі. Скільки різних послідовностей випадання цифри та герба можна при цьому отримати?

17.25. Скільки різних трицифрових чисел, у запису яких є тільки непарні цифри, можна скласти, якщо:

1) цифри в числі не повторюються;
2) цифри в числі можуть повторюватися?

17.26. Скільки різних двоцифрових чисел, у запису яких є цифри 1, 2, 3, 4, 5, можна скласти, якщо цифри в числі:

1) не повторюються; 2) можуть повторюватися?

17.27. Скільки шестицифрових чисел, що не містять однакових цифр, можна скласти за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, так, щоб:

1) число закінчувалося цифрою 6;
2) число починалося з цифри 3, а за нею йшла цифра 4;
3) першими були цифри 3 і 4 в будь-якому порядку?

17.28. Скільки п'ятицифрових чисел, що не містять однакових цифр, можна скласти за допомогою цифр 5, 6, 7, 8, 9, так, щоб:

1) цифра 9 була першою;
2) цифра 7 була останньою, а 8 – передостанньою;
3) першими були цифри 5 і 6, розташовані у будь-якому порядку?

17.29. У прем'єр-лізі чемпіонату України з футболу грає 12 команд.

1) Скільки є варіантів розподілу золотої і срібної медалей серед цих команд?
2) Скільки є варіантів розподілу золотої і срібної медалей серед цих команд, якщо бронзову медаль отримала команда «Зоря» з Луганська?

17.30. У класній олімпіаді з математики беруть участь 8 учнів.

1) Скількома способами між ними можна розподілити перші три місця, якщо всі учні набрали різну кількість балів?
2) Скількома способами можна розподілити між учасниками друге та третє місця, якщо перше місце посіла Софійка Допитлива?

Обчисліть (**17.31–17.32**):

17.31. 1) $\frac{1}{P_6} - \frac{1}{P_5}$; 2) $\frac{1}{P_7} - \frac{18}{P_9}$. **17.32.** 1) $\frac{1}{P_5} - \frac{1}{P_4}$; 2) $\frac{1}{P_6} - \frac{24}{P_8}$.

Розв'яжіть рівняння (**17.33–17.34**):

17.33. 1) $\frac{P_{x+2}}{P_x} = 42$; 2) $C_x^2 = 45$.

17.34. 1) $P_{x+2} = 30P_x$; 2) $A_x^2 = 132$.

17.35. Скількома способами можна розкласти в ряд шість кульок різних кольорів так, щоб біла кулька була крайньою ліворуч, а чорна – крайньою праворуч?

17.36. Скількома способами на книжковій полиці можна розташувати підручники із шести різних предметів так, щоб підручник з алгебри стояв крайнім ліворуч?

3 **17.37.** Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо в кожному числі цифри не повторюються?

17.38. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 2, 4, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

17.39. Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти із чисел 2, 3, 5, 7, 12?

17.40. Скількома способами групу з 10 учнів можна розподілити для участі в двох олімпіадах, якщо в олімпіаді з математики мають брати участь 6 учнів, а з фізики – 4 учні?

17.41. Скількома способами 8 пасажирів купейного вагона можна розподілити між двома купе по 4 пасажири?

17.42. Скількома способами можна вибрати 2 блокноти і 3 ручки з 5 різних блокнотів і 8 різних ручок?

17.43. Скількома способами можна вибрати 2 диски DVD з іграми і 4 з фільмами із 6 різних дисків з іграми і 8 із фільмами?

17.44. У турнірі «Кубок Васюків» взяли участь 10 шахістів, кожний з яких зіграв по одній партії з кожним із суперників. Скільки було зіграно партій у цьому турнірі?

17.45. У прем'єр-лізі з футболу грає 16 команд, кожна з яких проводить по дві зустрічі з кожним із суперників. Скільки матчів буде зіграно в цій прем'єр-лізі?

Розв'яжіть нерівність (**17.46–17.47**):

17.46. 1) $P_{x+1} \leqslant 30\,P_{x-1}$; 2) $A_x^2 > 90$.

17.47. 1) $P_{x+2} > 20P_x$; 2) $C_x^2 \leqslant 28$.

Розв'яжіть рівняння (**17.48–17.49**):

17.48. 1) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$; 2) $C_{x+2}^4 = x^2 - 1$;

3) $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$; 4) $C_{x+8}^{x+3}x^2 = 5A_{x+6}^3$.

17.49. 1) $C_{x+1}^{x-1} + C_x^{x-2} = 9x + 10$; 2) $C_x^{x-3} + C_x^{x-2} = 15(x-1)$;

3) $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$; 4) $A_x^5 = 336C_{x-2}^{x-5}$.

17.50. У класі 8 юнаків і 8 дівчат. Скількома способами можна скласти графік чергування по класу на 8 днів так, щоб кожного дня чергували один юнак і одна дівчина, і при цьому жодний з класу не чергував двічі?

17.51. Скількома способами можна розташувати за п'ятьма партами 5 юнаків і 5 дівчат так, щоб за кожною партою ліворуч сидів юнак, а праворуч – дівчина?

17.52. Не враховуючи початкової станції, потяг метро робить 10 зупинок, на яких виходять усі пасажири та не заходять нові. Скількома способами можуть розподілитися між цими зупинками 80 пасажирів, що зайшли у вагони потяга на початковій станції?

17.53. Маємо 7 ящиків та 3 предмети: м'яч, ляльку і книжку. Скільки є способів розкласти у ці ящики ці предмети, якщо у кожен з ящиків можна вмістити усі три предмети?

Розв'яжіть нерівність (**17.54–17.55**):

17.54. 1) $A_x^2 - A_{x-1}^2 \leqslant 10$; 2) $5C_{x-1}^3 \geqslant C_{x+1}^4$.

17.55. 1) $A_x^2 \geqslant A_{x+1}^2 - 8$; 2) $C_x^2 + C_{x+1}^2 \leqslant 49$.

17.56. Три ноти з семи нот однієї октави (до, ре, мі, фа, соль, ля, сі) можна взяти на інструменті або одночасно (акорд), або послідовно (тризвук). Знайдіть кількість усіх можливих
1) акордів;
2) тризвуків;
3) акордів, що містять ноту «до»;
4) тризвуків, що містять ноту «мі»;
5) акордів, що не містять ноти «до»;
6) тризвуків, що не містять ноти «мі».

4 **17.57.** Доведіть рівності, якими можна записати *основні властивості кількості комбінацій*:

$$1)\ C_n^m = C_n^{n-m};\qquad 2)\ C_{n+1}^{m+1} = \frac{n+1}{m+1}C_n^m;\qquad 3)\ C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m.$$

Скільки різних послідовностей букв можна одержати, переставляючи всі букви слова (**17.58–17.59**):

17.58. 1) колос; 2) перерва?

17.59. 1) середа; 2) золото?

17.60. Скільки різних неправильних дробів можна скласти, використовуючи в чисельнику і знаменнику числа 1, 3, 5, 7, 11, 13, за умови, що кожне з них можна використовувати одночасно і в чисельнику, і в знаменнику?

17.61. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6, якщо цифри в числі не повторюються?

17.62. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти із цифр 0; 2; 4; 6; 8, якщо цифри в числі не повторюються?

17.63. Скількома способами 8 розділів книжки можна розподілити між 4 авторами, якщо кожен автор пише по 2 розділи?

17.64. Скількома способами 6 тістечок можна розподілити між трьома дітьми так, щоб кожен отримав по два тістечка?

17.65. Скільки чотирицифрових чисел, кратних числу 5, можна скласти із цифр 0; 1; 5; 6, якщо в числі цифри не повторюються?

17.66. Скільки непарних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1; 2; 3; 4; 5, якщо цифри в числі не повторюються?

17.67. У вазі 10 білих і 6 рожевих троянд. Скількома способами можна вибрати з вази:
1) три квітки;
2) три квітки одного кольору;
3) три квітки так, щоб серед них були як білі, так і рожеві?

17.68. У науковій лабораторії працюють 5 вчених-чоловіків і 6 вчених-жінок. Скількома способами серед учених цієї лабораторії для участі в конференції можна обрати:
1) трьох вчених; 2) трьох учених однієї статі;
3) трьох вчених так, щоб серед них були як чоловіки, так і жінки?

Розв'яжіть рівняння **(17.69–17.70)**:

17.69. 1) $P_{x+2} = 210A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3$; 2) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$.

17.70. $P_{x+3} = 720A_x^5 \cdot P_{x-5}$.

Розв'яжіть нерівність **(17.71–17.72)**:

17.71. 1) $A_x^3 - A_{x-1}^3 \leqslant 36$; 2) $C_x^3 \leqslant 364$.

17.72. 1) $A_{x+1}^3 - A_x^3 \leqslant 60$; 2) $C_x^3 \leqslant 56$.

Знайдіть x і y, якщо **(17.73–17.74)**:

17.73. 1) $\begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 90, \\ A_x^y - 2C_x^y = 40; \end{cases}$ 2) $C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2$.

17.74. 1) $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$ 2) $C_{y+1}^{x+1} : C_{y+1}^x : C_{y+1}^{x-1} = 5 : 5 : 3$.

17.75. Марічка хоче приготувати на свій день народження 5 страв: два салати, м'ясну нарізку, заливну рибу та десерт. Скількома способами вона може вибрати послідовність приготування страв, якщо салати буде точно готувати один за одним?

17.76. У домашній бібліотеці Сергія є шість фантастичних романів шести різних авторів та два романи сьомого автора. Скількома способами Сергій може розставити на полиці ці 8 книжок так, щоб два романи останнього автора стояли поряд?

17.77. Редактор видавництва Орест Михайлович готує збірник детективних оповідань, що міститиме п'ять оповідань різних авторів і ще два оповідання шостого автора. Скільки є способів упорядкування збірника цими оповіданнями, якщо два оповідання останнього автора не мають іти одне за одним?

17.78. У конкурсі «Найкращий напій року» беруть участь шість напоїв, два з яких виготовляють на основі кави. Член журі Поліна Петрівна має скуштувати ці напої так, щоб ті, що на основі кави, не куштувати один за одним. Скільки різних способів вибору послідовності дегустування напоїв у неї є?

17.79. З групи бігунів треба вибрати трьох для участі у міжнародних змаганнях. Відомо, що це можна зробити 84 способами. Скільки бігунів у цій групі?

17.80. Відомо, що обрати старосту класу та його заступника можна 462 способами. Скільки учнів у цьому класі?

17.81. Доведіть, що при кожному можливому k сума $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$ є точним квадратом.

17.82. Доведіть тотожність $A_n^m - mA_{n-1}^{m-1} = A_{n-1}^m$.

17.83. 1) Скільки є чотирицифрових чисел, у десятковому запису яких є цифра 9?

2) Скільки є шестицифрових чисел, у десятковому запису яких є хоча б одна з цифр 7, 8 або 9?

17.84. Скільки є п'ятицифрових чисел, у десятковому запису яких:

1) є цифра 7; 2) є хоча б одна з цифр 7 або 8?

17.85. Скільки є семицифрових натуральних чисел, у яких всі цифри, що стоять на непарних місцях, різні?

17.86. На конференції мають виступити 8 вчених. Скількома способами їх можна розмістити у списку виступаючих, якщо Захарчук має виступати не раніше Сергієнка?

17.87. На шаховому турнірі під час жеребкування кожний з гросмейстерів потиснув руку кожному зі своїх суперників. Всього рукостискань було більше 60, але менше 70. Скільки всього гросмейстерів взяли участь у турнірі?

17.88. У чемпіонаті області з гандболу кожна з команд провела з іншою по 2 матчі. Всього було зіграно більше 45, але менше 70 матчів. Скільки команд взяли участь у чемпіонаті?

17.89. Доведіть, що для будь-якого $n \in N$ справджується нерівність:

1) $P_n \geqslant 2^{n-1}$; 2) $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \ldots + \frac{1}{P_2} < 2$.

17.90. У ящику лежить кілька пронумерованих білих і чорних кульок. Відомо, що вийняти одну білу й одну чорну кульки можна 120 способами, а дві білі і дві чорні – 2970 способами. А ще відомо, що білих кульок більше, ніж чорних. Скільки у ящику білих кульок і скільки чорних?

17.91. У ящику лежить кілька синіх і червоних кульок. Відомо, що взяти дві сині кульки й одну червону можна 75 способами, а одну синю і дві червоні – 60 способами. Скільки у ящику синіх кульок і скільки червоних?

17.92. Ганна щоранку пробігає одну й ту саму дистанцію. У будні дні вона долає її зі швидкістю 10 км/год за 28 хв, а у вихідні проводить посилене тренування, тому долає цю дистанцію за 20 хв. З якою швидкістю здійснює пробіжки Ганна у вихідні дні?

17.93. (*Міжнародна математична олімпіада школярів, 1966 р.*) Доведіть тотожність:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x,$$

де $n \in N$, $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$, $k \in N \cup \{0\}$, $\lambda \in Z$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

17.94. Яка ймовірність того, що при підкиданні грального кубика випаде число 5?

17.95. З одноцифрових натуральних чисел навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що воно виявиться:
1) парним; 2) непарним?

17.96. У шухляді лежить 10 білих і 5 картатих хустинок. Навмання вибирають одну з них. Яка ймовірність того, що вона виявиться:
1) білою; 2) картатою?

Перевірте свою компетентність

Завдання № 17

1. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(0; 5)$

2. Графік якої з функцій проходить через точку $A(-1; 3)$?

А	Б	В	Г	Д
$y = 2x - 1$	$y = 3x$	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$y = 3x$	$y = -1$

3. Укажіть кількість коренів рівняння $\frac{1}{5}\operatorname{tg} x + 0,2 = 0$, що належать проміжку $(-\pi; \pi)$.

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	безліч

4. Обчисліть $\log_{1,5} 10 \cdot \lg \sqrt[3]{1,5}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	1	1,5	3	10

5. $\sin^2(\log_5 2) + \cos^2(\log_5 2) = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

6. Укажіть кількість коренів рівняння $3^{|x|-1} = \frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	безліч

7. Установіть відповідність між функцією $y = f(x)$ (1–4) та значенням інтеграла $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ (А–Д).

Функція

1 $f(x) = x - 1$

2 $f(x) = 2x$

3 $f(x) = x^2$

4 $f(x) = x^3 + 1$

Значення інтеграла

А -2

Б $-\frac{2}{3}$

В 0

Г $\frac{2}{3}$

Д 2

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Обчисліть суму перших шістнадцяти членів арифметичної прогресії a_n, якщо $a_n = 2n - 3$.

9. У ящику 5 білих і кілька чорних кульок. Якою найменшою має бути кількість чорних кульок, щоб ймовірність витягнути навмання з ящика чорну кульку була більшою за 0,6?

§ 18. ВИПАДКОВИЙ ДОСЛІД І ВИПАДКОВА ПОДІЯ. ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ

Будь-яка точна наука вивчає не самі явища, що відбуваються в природі, а їхні математичні моделі. При цьому часто доводиться враховувати і випадкові фактори, у результаті яких явище може як відбутися, так і не відбутися. Такі *явища* називають *випадковими*.

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ.

У цьому параграфі пригадаємо те, що нам відомо з попередніх класів, навчимося розв’язувати задачі на обчислення ймовірності за допомогою формул комбінаторики та дізнаємося дещо нове.

1. Випадковий дослід і випадкова подія. Вірогідна подія. Неможлива подія

Припустимо, що проводять певний дослід (експеримент, спостереження, випробування тощо), результат якого передбачити неможливо. Такі *досліди* в теорії ймовірностей називають *випадковими*. При цьому доцільно проводити лише ті досліди, які можливо повторити, хоча б теоретично, довільну кількість разів за одних і тих самих умов.

До випадкових дослідів можна віднести підкидання монети чи грального кубика, купівлю лотерейного квитка, стрільбу по мішені тощо. Отже,

випадковий дослід – це дослід (експеримент, спостереження, випробування), результат якого залежить від випадку і який можна повторити багато разів в одних і тих самих умовах.

Результатом випадкового досліду є *випадкова подія*.

Випадкова подія **– це подія, яка в одних і тих самих умовах може відбутися, а може і не відбутися.**

Прикладами випадкових подій є випадання одиниці при підкиданні грального кубика, випадання герба при підкиданні монети, виграш певного призу при купівлі лотерейного квитка тощо. Такі події, як закипання води, коли її температура досягла 100°C, або збільшення довжини дроту під час його нагрівання, є закономірними, тому їх не можна назвати випадковими.

Випадкові події, як правило, позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D, ...

Приклад 1. У ящику є тільки білі і чорні кульки. З нього навмання виймають одну кульку. Які з подій при цьому можуть відбутися:

A – вийнято білу кульку; B – вийнято чорну кульку;
C – вийнято зелену кульку; D – вийнято кульку?

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки з ящика можна вибрати лише те, що в ньому є, то вийняти білу або чорну кульку можна, а зелену – ні. Можна також стверджувати, що будь-який предмет, який навмання виймають з ящика, буде кулькою, оскільки там, окрім кульок, нічого немає. Отже, події A і B можуть відбутися (а можуть і не відбутися); подія C не може відбутися, а подія D обов'язково відбудеться.

В і д п о в і д ь. A, B, D.

Подію, яка за даних умов обов'язково відбудеться, називають *вірогідною*.
Подію, яка за даних умов не може відбутися, називають *неможливою*.

У прикладі 1 подія A і подія B – випадкові, D – вірогідна, C – неможлива.

Вірогідну подію часто позначають літерою U, а неможливу подію – літерою V.

2. Несумісні події. Повна група подій. Рівноймовірні події

Події A і B називають *несумісними* в даному досліді, якщо вони не можуть відбутися одночасно, у іншому разі події називають *сумісними*.

Приклад 2. Нехай при однократному підкиданні грального кубика подія A – випадання одиниці; B – випадання шістки; C – випадання числа, кратного числу 3. Тоді події A і B – несумісні в даному досліді, оскільки одночасне випадання одиниці і шістки неможливе. Події B і C – сумісні в даному досліді, оскільки при випаданні на гральному кубику шістки події B і C відбулися одночасно.

Події A_1, A_2, ..., A_n називають *попарно несумісними*, якщо будь-які дві з них є несумісними.

Якщо події A_1, A_2, ..., A_n попарно несумісні і в результаті досліду може відбутися одна і тільки одна з них, то кажуть, що події A_1, A_2, ..., A_n утворюють *повну групу подій*. Множину всіх таких подій називають *простором елементарних подій*, при цьому самі події A_1, A_2, ..., A_n називають *елементарними подіями*.

Приклад 3. Нехай подія A_i означає, що в результаті підкидання грального кубика випало i очок; i = 1; 2; 3; 4; 5; 6. Тоді події A_1, A_2, A_3 є попарно несумісними, але такими, що не утворюють повну групу подій. А події A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 є попарно несумісними і утворюють повну групу подій.

З цього прикладу зрозуміло, що випадання, наприклад, одиниці і двійки є рівноможливими подіями. Тому події A_1 і A_2 називають *рівноймовірними*.

***Рівноймовірними подіями* називають події, ймовірності яких однакові у даному випробуванні.**

Так, наприклад, рівноймовірними є випадання герба і цифри при підкиданні монети. Але якщо стрілець влучає в мішень зі ймовірністю 0,9, то для цього стрільця влучення і промах не є рівноймовірними подіями.

3. Класичне означення ймовірності

Розглянемо дослід, результатом якого може бути одна з n випадкових подій, причому ці події утворюють повну групу рівноймовірних подій. Як ми вже знаємо, такі події називають *елементарними подіями*, при цьому дослід називають *класичним*.

Прикладом класичного досліду є приклад 3 цього параграфа, елементарні події якого – це події A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.

Випадок, у результаті якого відбувається подія A, називають випадком, що сприяє появі події A.

Згадаємо відоме нам з попередніх класів *класичне означення ймовірності:*

ймовірність події A дорівнює відношенню кількості випадків m, що сприяють появі події A, до кількості всіх можливих випадків n:

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Зауважимо, що це означення не суперечить статистичному означенню ймовірності та дає змогу дійти тих самих висновків:

ймовірність вірогідної події дорівнює 1; ймовірність неможливої події дорівнює 0; ймовірність випадкової події може бути будь-яким числом від 0 до 1.

Справді, якщо подія U – вірогідна, то кількість випадків, що сприяють появі події U, дорівнює кількості всіх можливих випадків, тобто $m = n$, а тому $p(U) = \frac{n}{n} = 1$. Якщо подія V – неможлива, то кількість випадків, що сприяють появі події V, дорівнює нулю, тобто $m = 0$, а тому $p(V) = \frac{0}{n} = 0$. Якщо A – довільна випадкова подія, то $0 \leqslant m \leqslant n$, а тому $0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1$, тобто $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Розглянемо кілька вправ на знаходження ймовірності події.

Приклад 4. У коробці 5 білих і 15 чорних кульок. Навмання виймають одну з них. Подія A полягає в тому, що вийнято білу кульку. Яка ймовірність події A?

Розв'язання. З коробки можна витягнути з рівною ймовірністю будь-яку з $5 + 15 = 20$ кульок, тому $n = 20$. Оскільки білих кульок 5, то кількість випадків, що сприяють події A, дорівнює 5, тобто $m = 5$. Отже, $p(A) = \frac{5}{20} = 0,25$.

Відповідь. 0,25.

Приклад 5. На картках записано натуральні числа від 1 до 20. Навмання витягують одну з карток. Яка ймовірність того, що число, записане на картці, є дільником числа 20?

Розв'язання. Зрозуміло, що $n = 20$. Нехай подія A полягає в тому, що витягнуто картку, число на якій є дільником числа 20. Натуральними дільниками числа 20 є шість чисел: 1, 2, 4, 5, 10, 20. Отже, $m = 6$, і тоді $p(A) = \frac{6}{20} = 0,3$.

Відповідь. 0,3.

Приклад 6. Одночасно підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що сума очок, які випали на кубиках:
1) дорівнює 8; 2) більша за 9?

II \ I	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Р о з в ' я з а н н я. Складемо таблицю суми очок, яку можна отримати при одночасному підкиданні двох гральних кубиків. Тоді $n = 36$ – кількість усіх можливих випадків.

1) Є п'ять випадків, коли сума очок на обох кубиках дорівнює 8, отже, $m = 5$. Тоді $p = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

2) Є шість випадків, коли сума очок на обох кубиках більша за 9, тому $m = 6$. Отже, $p = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

В і д п о в і д ь. 1) $\frac{5}{36}$; 2) $\frac{1}{6}$.

4. Знаходження ймовірності за допомогою формул комбінаторики

Часто в задачах на обчислення ймовірності використовують формули комбінаторики. Розглянемо приклади таких задач.

Приклад 7. Нехай є п'ять відрізків, довжини яких 1 см, 3 см, 5 см, 7 см і 9 см. Навмання вибираємо три з них. Яка ймовірність того, що з них можна скласти трикутник?

Р о з в ' я з а н н я. Кількість n усіх можливих випадків – це кількість способів, якими можна вибрати три відрізки з п'яти, і не має значення, у якому порядку. Отже, $n = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$

Трикутник можна скласти лише з таких груп відрізків: 3 см, 5 см і 7 см або 3 см, 7 см і 9 см або 5 см, 7 см і 9 см. Тому $m = 3$, отже, $p = \frac{3}{10} = 0{,}3.$

В і д п о в і д ь. 0,3.

Приклад 8. У кошику 10 яблук і 8 груш. Навмання з кошика беруть два фрукти. Яка ймовірність того, що:
1) обидва з них – яблуки;
2) один з них – яблуко, другий – груша.

Р о з в ' я з а н н я. Для обох завдань $n = C_{18}^2 = 153$ – кількість усіх можливих випадків вибору двох фруктів.

1) Вибрати два яблука можна C_{10}^2 способами. Отже, $m = C_{10}^2 = 45$ і тоді $p = \frac{45}{153} = \frac{5}{17}$.

2) Вибрати одне яблуко можна C_{10}^1 способами, і після кожного такого вибору грушу можна вибрати C_8^1 способами. За комбінаторним правилом добутку $m = C_{10}^2 \cdot C_8^1 = 10 \cdot 8 = 80$, отже, $p = \frac{80}{153}$.

Відповідь. 1) $\frac{5}{17}$; 2) $\frac{80}{153}$.

● Що вивчає теорія ймовірностей? ● Що таке випадковий дослід? ● Що таке випадкова подія? ● Яку подію називають вірогідною, а яку – неможливою? ● Які події називають несумісними в даному досліді, а які – сумісними? ● Які події називають попарно несумісними? ● Коли події A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу подій? ● Що називають простором елементарних подій? ● Які події називають рівноймовірними? ● Сформулюйте класичне означення ймовірності. ● Якого висновку на основі класичного означення ймовірності про ймовірність вірогідної, неможливої і випадкової події можна дійти?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

18.1. (*Усно*) Які з подій є випадковими:
1) при підкиданні кубика випаде 5 очок;
2) при температурі 0° *C* вода замерзне;
3) виграш по лотерейному квитку складе 10 грн;
4) наступним днем після 1 квітня буде 2 квітня;
5) прізвище навмання вибраного одинадцятикласника починатиметься з букви «Я»;
6) довжина кола, радіус якого 6 см, дорівнюватиме 12π см?

18.2. (*Усно*) Які з подій – вірогідні, а які – неможливі:
1) сонце зійде на сході;
2) при підкиданні грального кубика випаде кількість очок, що кратна числу 11;
3) навмання вибране трицифрове число, що складається із цифр 7, 8 і 9, виявиться більшим за 600;
4) двоцифрове число, що складається із цифр 1 і 2, буде кратним числу 10;
5) випаде білий сніг;
6) кількість днів навмання вибраного місяця буде більшою за 31?

18.3. Які з подій випадкові, вірогідні, неможливі:
1) виграти партію в теніс у рівного по силі суперника;
2) навмання вибраний крокодил умітиме літати;
3) поява очок, сума яких більша за 12, при підкиданні двох гральних кубиків;

4) запізнення потяга Київ–Львів;
5) 1 травня наступного року буде сонячно;
6) наступним днем після понеділка буде вівторок;
7) наступним днем після вівторка буде понеділок;
8) днем народження людини, яку ви зустрінете, буде 30 червня;
9) днем народження людини, яку ви зустрінете, буде 31 червня;
10) зустріти в автобусі свого сусіда?

18.4. Наведіть по два приклади вірогідної, неможливої, випадкової подій.

18.5. (*Усно*). Які події можуть відбутися внаслідок таких випробувань:
1) підкидання монети;
2) вибір деталі з партії, у якій 1000 якісних деталей і 5 бракованих?

18.6. Для кожного з випробувань складіть повну групу подій:
1) результат футбольного матчу між командами «Зоря» і «Таврія»;
2) результат баскетбольного матчу між командами України і Латвії;
3) вибір однієї айстри з букета, у якому 10 білих і 8 рожевих айстр;
4) загадування одноцифрового натурального числа.

18.7. Для кожного з випробувань складіть повну групу подій:
1) результат тенісної партії між двома гравцями;
2) результат шахової партії між двома гравцями;
3) витягування лотерейного квитка з ящика, у якому 20 квитків без виграшу і 5 з виграшем;
4) підкидання кубика, дві грані якого пофарбовано в білий колір, дві – у чорний, дві – у зелений.

18.8. (*Усно*). Наведіть приклад:
1) рівноймовірних подій;
2) подій, які не є рівноймовірними в даному випробуванні.

18.9. Підкидають гральний кубик. Сумісні чи несумісні такі події:
1) A – випадання «1»; B – випадання «2»;
2) C – випадання «6»; D – випадання парного числа?

18.10. Підкидають гральний кубик. Сумісні чи несумісні такі події:
1) A – випадання «5»; B – випадання «5» або «6»;
2) C – випадання «4»; D – випадання числа, кратного числу 5?

2

18.11. Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного випробування назвіть приклад вірогідної, неможливої, випадкової подій.

№ п/п	Випробування	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Виймання навмання кульки з коробки з білими і чорними кульками			
2	Відривання листка у відривному календарі			
3	Витягування навмання карти з колоди карт			
4	Складання двоцифрового числа із цифр 3 і 4			

18.12. Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного досліду назвіть приклад вірогідної, неможливої і випадкової події.

№ п/п	Випробування	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Витягування навмання цукерки з коробки, у якій лежать цукерки з білого і чорного шоколаду			
2	Складання двоцифрового числа із цифр 8 і 9			
3	Визначення дати народження деякої людини			
4	Визначення кількості днів навмання вибраного року			

18.13. Відомо, що в партії з 1000 батарейок трапляються 3 браковані. Яка ймовірність купити браковану батарейку з такої партії?

18.14. У партії з 10 000 деталей є 15 бракованих. Яка ймовірність того, що навмання взята з цієї партії деталь буде бракованою?

Знайдіть ймовірність події (**18.15–18.16**):

18.15. 1) після 30 липня настане 1 серпня;
2) після суботи настане неділя?

18.16. 1) після 30 квітня настане 1 травня;
2) після четверга настане середа?

18.17. У ящику лежить 18 апельсинів і 12 мандаринів. Яка ймовірність витягнути з ящика:
1) апельсин; 2) мандарин?

18.18. У класі 10 хлопців і 15 дівчат. Яка ймовірність того, що навмання вибраний черговий по класу буде:

1) хлопцем; 2) дівчиною?

18.19. У магазині виявилося, що з 500 телевізорів – 4 браковані. Яка ймовірність того, що навмання обраний телевізор:

1) бракований; 2) якісний?

18.20. З 50 легкоатлетів, які виступали на олімпіаді, 12 були нагороджені медалями. Знайдіть ймовірність того, що навмання обраний атлет:

1) був нагороджений медаллю;
2) не був нагороджений медаллю.

18.21. Рівноймовірні чи ні події A і B, якщо:

1) A – з 10 карток із числами від 1 до 10 витягнути картку із числом 1; B – з 10 карток із числами від 1 до 10 витягнути картку із числом 2;
2) A – витягнути білу хустку зі скрині, у якій 4 білі хустки і 6 чорних; B – витягнути чорну хустку зі скрині, у якій 4 білі хустки і 6 чорних;
3) A – при підкиданні грального кубика випало просте число; B – при підкиданні грального кубика випало складене число;
4) A – витягнути червоне яблуко з кошика, у якому половина яблук червоні, а інша половина – зелені; B – витягнути зелене яблуко з кошика, у якому половина яблук червоні, а половина – зелені?

18.22. У кошику 12 червоних, 3 зелених і 5 жовтих яблук. Яка ймовірність вибрати навмання:

1) зелене яблуко; 2) червоне яблуко;
3) зелене або жовте яблуко; 4) не зелене яблуко?

18.23. У пеналі 6 синіх ручок, 3 червоні і 1 зелена. Яка ймовірність вибрати з пеналу навмання:

1) червону ручку; 2) синю ручку;
3) червону або зелену ручку; 4) не червону ручку?

18.24. (*Задача Даламбера*.) Яка ймовірність того, що при двох поспіль підкиданнях монети хоча б один раз випаде герб?

18.25. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність такої події:

1) A – випаде парне число;
2) B – випаде не більше 3 очок;
3) C – випаде число, що є дільником числа 12;
4) D – випаде число, що є квадратом натурального числа?

18.26. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність такої події:

1) A – випаде непарне число;
2) B – випаде не менше 5 очок;
3) C – випаде число, що є дільником числа 18;
4) D – випаде число, що є кубом натурального числа?

18.27. У ящику лежать 12 кульок, дві з яких – білі. Яка ймовірність того, що вибрані навмання дві кульки – білі?

18.28. У коробці лежать 10 олівців, три з яких – червоні. Яка ймовірність того, що вибрані навмання три олівці – червоні?

3 **18.29.** З натуральних чисел від 1 до 24 навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що це число не є дільником числа 24?

18.30. З натуральних чисел від 1 до 30 навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що це число або просте, або є дільником числа 30?

18.31. Одночасно підкидають два гральних кубики. Знайдіть ймовірність такої події:

1) на кубиках випаде однакова кількість очок;
2) сума очок на кубиках дорівнюватиме 4;
3) сума очок на кубиках не буде більшою за 4;
4) сума очок на кубиках – просте число.

18.32. Одночасно підкидають два гральних кубики. Знайдіть ймовірність такої події:

1) на кубиках випаде різна кількість очок;
2) сума очок на кубиках дорівнюватиме 9;
3) сума очок на кубиках буде більшою за 10;
4) сума очок на кубиках – складене число.

18.33. Загадано двоцифрове натуральне число. Яка ймовірність того, що воно:

1) містить у своєму запису цифру 8;
2) містить у своєму запису цифру 1;
3) кратне числу 5;
4) кратне числу 13;
5) кратне числу 15 або 25;
6) не кратне числу 29?

18.34. Навмання вибрано двоцифрове натуральне число. Яка ймовірність того, що воно:

1) містить у своєму запису цифру 0;
2) не містить у своєму запису цифру 0;
3) кратне числу 6;
4) кратне числу 11;
5) кратне числу 12 або 18;
6) не кратне числу 24?

18.35. Навмання вибирають непарне двоцифрове натуральне число. Знайдіть ймовірність того, що:

1) його квадрат менший за 1000;
2) його квадрат більший за 9000;
3) сума квадратів його цифр більша за 140;
4) сума квадратів його цифр не більша за 10.

18.36. Загадали парне двоцифрове натуральне число. Знайдіть ймовірність того, що:

1) його куб менший за 8000;
2) сума квадратів його цифр менша за 20.

18.37. Одночасно підкидають три гральних кубики. Знайдіть ймовірність такої події:
1) на всіх трьох кубиках випала однакова кількість очок;
2) сума очок на всіх кубиках дорівнює 4;
3) сума очок на всіх кубиках дорівнює 16;
4) на всіх кубиках випала парна кількість очок.

18.38. Одночасно підкидають три гральних кубики. Знайдіть ймовірність такої події:
1) хоча б на двох кубиках випала різна кількість очок;
2) сума очок на всіх кубиках дорівнює 5;
3) сума очок на всіх кубиках дорівнює 17;
4) на всіх кубиках випала непарна кількість очок.

18.39. У ящику лежать 18 білих кульок і кілька чорних. Скільки чорних кульок у ящику, якщо ймовірність витягнути навмання:
1) білу кульку дорівнює 0,6;
2) чорну кульку дорівнює 0,25;
3) білу кульку більша за 0,75;
4) чорну кульку більша за 0,3?

18.40. У коробці лежать 10 шоколадних цукерок і кілька карамельок. Скільки карамельок у коробці, якщо ймовірність витягнути навмання:
1) шоколадну цукерку дорівнює $\frac{2}{3}$;
2) карамельку дорівнює 0,6;
3) шоколадну цукерку менша за 0,4;
4) карамельку менша за 0,3?

18.41. Маємо п’ять відрізків, довжини яких 1 см, 2 см, 4 см, 7 см, 9 см. Навмання вибираємо три з них. Знайдіть ймовірність того, що з них можна буде скласти трикутник.

18.42. Є п’ять карток із числами 1, 3, 5, 7, 9. Навмання вибирають три з них. Яка ймовірність того, що із чисел, записаних на них, можна скласти арифметичну прогресію?

18.43. З ящика, що містить 6 пронумерованих кульок, навмання виймають одну за одною всі кульки. Знайдіть ймовірність того, що вони вийматимуться в порядку нумерації.

18.44. З літер розрізної абетки складено слово «буква». Потім літери слова перемішують і навмання беруть одну за одною. Знайдіть ймовірність того, що буде складене початкове слово.

18.45. На картках записано числа від 1 до 20. Навмання беруть дві з них. Яка ймовірність того, що сума чисел на картках дорівнюватиме 15?

18.46. На картках записано числа від 1 до 15. Навмання беруть дві з них. Яка ймовірність того, що модуль різниці чисел на картках дорівнюватиме 2?

18.47. Яка ймовірність того, що вибране навмання двоцифрове число буде кратним числу 5?

18.48. Яка ймовірність того, що вибране навмання двоцифрове непарне число буде кратним числу 7?

18.49. На семи картках записано числа 4, 5, 6, 7, 11 і 16. Навмання беруть дві картки та складають із них дріб. Яка ймовірність того, що цей дріб буде скоротним?

18.50. На семи картках записано числа 2, 3, 4, 5, 6 і 7. Навмання беруть дві картки та складають із них дріб. Яка ймовірність того, що цей дріб буде нескоротним?

18.51. Пароль для входу на сайт містить шість цифр. Яка ймовірність того, що цей пароль:
1) складається з різних цифр;
2) не містить жодної цифри 9?

18.52. Кодовий замок містить чотири цифри. Яка ймовірність того, що код на замку:
1) складається з різних цифр;
2) не містить жодної цифри 0?

18.53. Андрій та Наталя незалежно одне від одного записують по одному двоцифровому натуральному числу. Яка ймовірність того, що:
1) ці числа виявляться однаковими;
2) їх сума дорівнюватиме 100;
3) їх сума не перевищуватиме 24;
4) модуль їх різниці дорівнюватиме 2?

18.54. Ольга та Сергій незалежно одне від одного записують по одному двоцифровому натуральному числу. Яка ймовірність того, що:
1) ці числа виявляться різними;
2) їх сума дорівнюватиме 90;
3) їх сума буде більшою за 190;
4) модуль їх різниці дорівнюватиме 1?

18.55. Двоцифрове натуральне число отримують у такий спосіб: цифра десятків – це результат підкидання грального кубика, грані якого пронумеровані числами від 1 до 6, а цифра одиниць – результат другого підкидання цього кубика. Знайдіть ймовірність того, що це число:
1) складатиметься з однакових цифр;
2) буде більшим за 20;
3) буде кратним числу 7;
4) буде простим.

18.56. За умовою задачі 18.55 знайдіть ймовірність того, що двоцифрове число, яке утворилося:
1) складатиметься з різних цифр;
2) буде меншим за 30;
3) буде кратним числу 8;
4) буде складеним.

4 **18.57.** У магазині 50 кавунів, з яких 40 стиглих. Придбали два кавуни. Яка ймовірність того, що вони обидва стиглі?

18.58. Серед 40 деталей 36 якісних. Яка ймовірність того, що серед трьох навмання взятих деталей немає бракованих?

18.59. Набір для рукодільниць містить 8 пакетиків з бісером і 6 пакетиків зі стеклярусом. Навмання з набору вибирають 3 пакетики. Яка ймовірність того, що:

1) усі три пакетики будуть з бісером;
2) два пакетики будуть з бісером, а один зі стеклярусом;
3) серед цих пакетиків будуть пакетики як з бісером, так і зі стеклярусом?

18.60. У наборі 7 наклейок із зображенням автомобілів і 3 наклейки із зображенням спецтехніки. Із набору навмання беруть 2 наклейки. Знайдіть ймовірність того, що:

1) на обох зображено автомобілі;
2) на одній – автомобіль, на другій – спецтехніка.

18.61. Вибирають навмання три букви слова «павутиння». Яка ймовірність того, що з вибраних трьох букв можна скласти слово «пан»?

18.62. Вибирають навмання чотири букви слова «козак». Яка ймовірність того, що з них можна скласти слово «коза»?

18.63. По черзі вибирають три букви слова «тринадцять». Яка ймовірність того, що ці три букви у вибраній послідовності складуть слово «три»?

18.64. По черзі вибирають три букви слова «двадцять». Яка ймовірність того, що ці три букви у вибраній послідовності складуть слово «два»?

18.65. Для присадибної ділянки придбали 7 саджанців вишні і 3 саджанці черешні. Щоб розпочати посадку цих дерев, навмання вибрали два саджанці. Яка ймовірність того, що:

1) обидва саджанці – черешні;
2) обидва саджанці – вишні;
3) один саджанець – вишня, другий – черешня?

18.66. У лотереї 20 квитків, серед яких усього 3 виграшних. Навмання вибирають два квитки. Яка ймовірність того, що:

1) вони обидва виграшні;
2) вони обидва без виграшу;
3) один з них виграшний, а другий – ні?

18.67. У лотереї 5 квитків виграшних і 4 без виграшу. Навмання вибирають три з них. Яка ймовірність того, що:

1) усі вони виграшні;
2) два з них виграшні, третій – ні;
3) один з них виграшний, два інших – ні;
4) усі невиграшні?

18.68. В овочевому відділі супермаркету в ящику з гарбузами лежить 6 гарбузів сорту «Родзинка» та 4 – сорту «Титан». Покупець кладе у свій візок 3 з них, не звертаючи уваги на сорт. Яка ймовірність того, що серед вибраних покупцем гарбузів:

1) усі – сорту «Родзинка»;
2) два – сорту «Родзинка», а один – сорту «Титан»;
3) два – сорту «Титан», а один – сорту «Родзинка»;
4) усі – сорту «Титан».

18.69. П'ять підручників з української мови для 5, 6, 7, 8 та 9 класів випадковим чином розставили на полиці.

1) Яка ймовірність того, що підручники будуть стояти зліва направо у порядку зростання класів?
2) Яка ймовірність того, що підручники для 5 і 6 класів опиняться поряд?

18.70. Чотиритомне зібрання творів поставили на полицю випадковим чином.

1) Яка ймовірність того, що ці томи будуть стояти зліва направо у порядку зростання їх номерів?
2) Яка ймовірність того, що перший і другий томи опиняться поряд?

18.71. У конверті лежить 2 виграшних лотерейних квитки і 8 – без виграшу. Навмання виймають n квитків, де $n = 1; 2; 3 \dots 9; 10$. Знайдіть ймовірність $p(n)$ того, що серед цих n квитків рівно один буде виграшним. Перенесіть таблицю в зошит і занесіть у неї отримані дані.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$										

18.72. У конверті лежить 6 лотерейних квитків, з яких n квитків виграшні і $6 - n$ – без виграшу ($n = 0; 1; 2; 3; 4; 5$). Навмання з конверту виймають два квитки. Знайдіть ймовірність $p(n)$ того, що серед них рівно один квиток виявиться виграшним. Перенесіть таблицю в зошит і занесіть у неї отримані дані.

n	1	2	3	4	5	6
$p(n)$						

18.73. У ящику лежать n білих і $n - 1$ чорних куль. Навмання виймають 4 кулі одночасно.

1) Знайдіть ймовірність $p(n)$ того, що серед цих куль не більше однієї чорної кулі.
2) Доведіть, що послідовність $p(n)$ є спадною.
3) Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} p(n)$.
4) Знайдіть n, починаючи з якого $p(n) < 0,35$.

18.74. У ящику лежать n білих і n чорних куль. Навмання виймають 3 кулі одночасно.

1) Знайдіть ймовірність $p(n)$ того, що серед цих трьох куль рівно одна куля чорна.

2) Доведіть, що послідовність $p(n)$ є спадною.

3) Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} p(n)$.

4) Знайдіть n, починаючи з якого $p(n) < 0,4$.

18.75. Одна цигарка руйнує 25 мг вітаміну С. Відомо, що якщо людина не курить, проте пробула в прокуреному приміщенні 1 годину, то на її здоров'я це впливає майже так само, якби людина сама викурила 4 цигарки. Скільки вітаміну С втратила Марина, якщо пробула в прокуреному офісі 2,5 год?

18.76. (*Національна олімпіада Бразилії, 1983 р.*) Доведіть, що рівняння $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{1983}$ у натуральних числах має скінченну множину розв'язків.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 18

1. Якщо $\frac{3}{x} = y - \frac{1}{z}$, то $x = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3z}{yz+1}$	$\frac{3z}{yz-1}$	$\frac{z}{yz-1}$	$\frac{yz-1}{3z}$	$\frac{yz+1}{3z}$

2. Обчисліть $\lg(2x) + \lg(5y)$, якщо $\lg(xy) = -8$.

А	Б	В	Г	Д
–8	8	–7	7	обчислити неможливо

3. Розв'яжіть нерівність $0,5^{-x} > 8$.

А	Б	В	Г	Д
$x > -3$	$x < -3$	$x > \frac{1}{3}$	$x < 3$	$x > 3$

4. Знайдіть множину коренів рівняння $\sqrt{3}\sin x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,$ $k \in Z$	$(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,$ $k \in Z$	$\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,$ $k \in Z$	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,$ $k \in Z$	$\varnothing$

5. Знайдіть $f'(16)$, якщо $f(x)=\sqrt[4]{x}$.

А	Б	В	Г	Д
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

6. $\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\sin4a$	$\cos4a$	$\frac{1}{2}\sin4\alpha$	$\frac{1}{4}\sin4\alpha$	$\sin a\cos3a$

7. Для кожного виразу (1–4) при $a>0$ доберіть йому тотожно рівний (А–Д).

Вираз

1 $\frac{3a^3}{a^4}$

2 $(3a)^4a^3$

3 $(3a^3)^4$

4 $\sqrt[4]{81a^3}$

Тотожно рівний вираз

А $3a^{-1}$

Б $3a^{\frac{4}{3}}$

В $3a^{\frac{3}{4}}$

Г $81a^7$

Д $81a^{12}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть x_0+y_0, де $(x_0;\, y_0)$ – розв'язок системи

$$\begin{cases} x^2-y^2=12, \\ x-y=2. \end{cases}$$

9. Знайдіть менший корінь рівняння $\log_2(2x)\cdot\log_2(0{,}5x)=3$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Обчисліть C_6^2.

А. 30 **Б.** 12 **В.** 15 **Г.** 18

2. Танцювальний гурток відвідують 6 юнаків і 8 дівчат. Скількома способами можна сформувати танцювальну пару з учасників цього гуртка для участі у конкурсі?

А. 64 **Б.** 14 **В.** 36 **Г.** 48

3. Укажіть подію, що є випадковою.

А. Навмання вибрана доба матиме 24 години.

Б. Навмання вибране трицифрове число буде кратним числу 11.

В. Наступним днем після середи буде четвер.

Г. Гральний кубик матиме шість граней.

2

4. Баскетбольна команда налічує 12 спортсменів. Скількома способами можна вибрати капітана цієї команди та його заступника?

А. 132 **Б.** 144 **В.** 66 **Г.** 12

5. У скрині лежать 6 білих хустинок, 3 червоні й 1 строката. Яка ймовірність навмання витягнути зі скрині білу хустинку?

А. $\frac{1}{10}$ **Б.** $\frac{3}{10}$ **В.** $\frac{3}{5}$ **Г.** 1

6. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність того, що випаде число, що є дільником числа 20?

А. $\frac{5}{6}$ **Б.** $\frac{2}{3}$ **В.** $\frac{1}{3}$ **Г.** $\frac{1}{2}$

3

7. Розв'яжіть нерівність $C_x^2 < 15$.

А. 2; 3; 4; 5; **Б.** 1; 2; 3; 4; 5;

В. 2; 3; 4; 5; 6; **Г.** 1; 2; 3; 4; 5; 6

8. Скільки різних непарних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 5, 7 і 8, якщо в кожному числі всі цифри різні?

А. 16 **Б.** 4 **В.** 8 **Г.** 12

9. З натуральних чисел від 1 до 12 навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що це число виявиться простим або дільником числа 12?

А. $\frac{3}{4}$ **Б.** $\frac{1}{4}$ **В.** $\frac{5}{6}$ **Г.** $\frac{2}{3}$

4

10. Скількома способами можна пригостити трьох дітей 6 різними шоколадками, щоб кожна дитина отримала по дві шоколадки?

А. 6^6 **Б.** 45 **В.** 360 **Г.** 90

11. На сувенірному базарчику пропонують до продажу 6 вишиванок з лляної тканини і 4 – з бавовняної. Покупець запропонував продавчині запакувати йому будь-які три з них. Яка ймовірність того, що у пакунку виявиться 2 лляних вишиванки й 1 бавовняна?

А. $\frac{2}{3}$ **Б.** $\frac{1}{3}$ **В.** $\frac{1}{2}$ **Г.** $\frac{4}{5}$

12. Скількома способами Сергія, Наталю та їх п'ятьох однокласників можна розташувати в шеренгу так, щоб Сергій і Наталя опинилися поруч?

А. 5040 **Б.** 7^7 **В.** 720 **Г.** 1440

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 16–18

1

1. Обчисліть: 1) A_6^3; 2) $P_3 + P_2$.

2. На тарілці лежать 5 овочів і 3 фрукти. Скількома способами з тарілки можна взяти:

1) один плід;
2) один фрукт і один овоч?

3. Які з подій є випадковими:

1) при підкиданні грального кубика випаде 6 очок;
2) площа круга, радіус якого дорівнює 3 см, дорівнюватиме 9π см^2;
3) наступним днем після 1 квітня буде 2 квітня;
4) придбаний лотерейний квиток виявиться невиграшним?

2

4. На колі розміщено 10 точок. Скільки прямих можна провести через ці точки так, щоб кожній з прямих належало дві з цих точок?

5. У коробці 8 синіх і 2 червоних олівці. Яка ймовірність навмання витягнути з коробки:

1) синій олівець;
2) червоний олівець?

6. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність таких подій:

1) A – випаде не більше 5 очок;
2) B – випаде число, що є дільником числа 24?

3

7. Розв’яжіть нерівність $P_{x+2} \leqslant 42P_x$.

8. З натуральних чисел від 1 до 20 навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що це число не є дільником числа 20?

4

9. У букеті 9 червоних і 6 білих троянд. Навмання вибирають три з них. Яка ймовірність того, що:

1) дві троянди будуть червоними й одна білою;
2) серед троянд будуть і червоні, і білі?

Додаткові завдання

3

10. Скільки різних непарних п’ятицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 4, 6, якщо цифри в числі не повторюються?

4

11. Шеститомне зібрання творів розставляють на полиці навмання. Скількома способами можна розташувати ці томи за умови, що 5-й і 6-й томи мають стояти поряд?

§ 19. ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ. АКСІОМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ОСНОВНІ НАСЛІДКИ З НИХ

У цьому параграфі розглянемо основні операції над подіями та аксіоматичне означення ймовірності.

1. Операції над подіями

! ***Сумою*** **двох подій A і B називають подію C, яку вважають такою, що відбулася, якщо відбулася принаймні одна з двох подій A чи B.**

Записують це так: $C = A + B$ (або $C = A \cup B$).

Приклад 1. Якщо стрілець зробив два постріли по мішені і подія A – влучення під час першого пострілу, а подія B – влучення під час другого пострілу, то подія $A + B$ – влучення стрільця у мішень хоча б під час одного пострілу.

Якщо події A і B – несумісні, то подія $A + B$ полягає в тому, що відбудеться одна з них. Наприклад, якщо A – випадання числа 1 при однократному підкиданні грального кубика, а B – випадання числа 2, то подія $A + B$ – це випадання або числа 1, або числа 2 при однократному підкиданні кубика.

! ***Добутком*** **двох подій називають подію C, яку вважають такою, що відбулася, якщо відбулися обидві події A та B.**

Записують це так: $C = AB$ (або $C = A \cdot B$ або $C = A \cap B$).

Повертаючись до прикладу 1, зазначимо, що подія AB – це влучення стрільця у мішень при обох пострілах.

Неважко помітити аналогію між сумою двох подій і об'єднанням множин (числових проміжків) та добутком двох подій і перерізом множин (числових проміжків).

! **Подією, *протилежною* до події A, називають подію $\overline{A}$, яку вважають такою, що відбулася, якщо не відбулася подія A, і навпаки.**

Так, наприклад, якщо A – випадання герба при однократному підкиданні монети, то $\overline{A}$ – випадання цифри; якщо B – випадання числа 1 при однократному підкиданні кубика, то $\overline{B}$ – випадання будь-якого з чисел 2, 3, 4, 5 або 6 при однократному підкиданні кубика.

Розглянемо *властивості операцій над подіями*.

!

1. $\overline{\overline{A}} = A$. 2. $\overline{A} = U \setminus A$.

Комутативні закони

3. $A + B = B + A$; 4. $AB = BA$.

Асоціативні закони

5. $(A + B) + C = A + (B + C)$; 6. $(AB)C = A(BC)$.

Дистрибутивні закони

7. $(A + B) \cdot C = AC + BC$; 8. $AB + C = (A + C) \cdot (B + C)$.

9. $A + A = A$. 10. $A \cdot A = A$.

11. $A + \overline{A} = U$. 12. $A \cdot \overline{A} = V$.

13. $A + U = U$. 14. $A \cdot U = A$.

15. $A + V = A$. 16. $A \cdot V = V$.

Закони двоїстості (або закони де Моргана)

17. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$. 18. $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

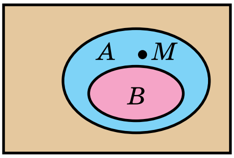
Приймемо ці властивості без доведень.
Розглянемо кілька задач.

Приклад 2. Чи може сума двох подій дорівнювати їх добутку?

Р о з в ’ я з а н н я. Так, якщо події **еквівалентні**, тобто якщо відбулася подія A, то обов’язково відбулася і подія B, і навпаки. Наприклад, біатлоніст стріляє по мішені, влучення у яку призводить до її руйнування. При цьому ніяким іншим способом її зруйнувати не можна. Тоді, якщо A – це влучення в мішень, а B – руйнування мішені, то $A + B = A = B$ і $AB = A = B$, отже, $A + B = AB$.

Приклад 3. Нехай подія B є частковим випадком події A, тобто з того, що подія B відбулася, обов’язково випливає, що відбулася подія A.

1) Що означають події: $A + B$; AB?
2) Чи випливає $\overline{A}$ з $\overline{B}$?



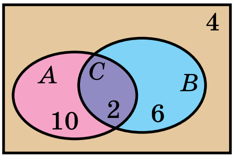
Мал. 19.1

Р о з в ’ я з а н н я. На малюнку 19.1 за допомогою кругів Ейлера схематично зображено умову задачі.

1) Зрозуміло, що $A + B = A$ і $AB = B$.
2) Відповідь: ні. Адже подія $\overline{B}$ може відбутися, а подія $\overline{A}$ – ні. Прикладом такої ситуації може бути елементарна подія M. Зауважимо, що навпаки, із $\overline{A}$ слідує $\overline{B}$.

Приклад 4. У класі 22 учні, 12 з яких відвідують секцію баскетболу (подія A), 8 – секцію волейболу (подія B), а 2 – і баскетболу, і волейболу (подія C). Виразити C через A і B. Що означають події:

1) $A + B$; 2) $A \cdot \overline{B}$; 3) $\overline{A} \cdot B$; 4) $\overline{A + B}$?



Мал. 19.2

Р о з в ’ я з а н н я. Зобразимо умову задачі за допомогою кругів Ейлера (мал. 19.2). За малюнком бачимо, що $C = AB$. Далі:

1) $A + B$ означає, що 18 учнів відвідують секції гри з м’ячем;
2) $A \cdot \overline{B}$ означає, що 10 учнів відвідують лише секцію баскетболу;
3) $\overline{A} \cdot B$ означає, що 6 учнів відвідують лише секцію волейболу;
4) $\overline{A + B}$ означає, що 4 учні не відвідують секцій гри з м’ячем.

Приклад 5. Підкидають дві монети. Розглянемо події: A – поява герба на першій монеті; B – поява цифри на першій монеті; C – поява герба на другій монеті; D – поява цифри на другій монеті; E – поява хоча б одного герба; F – поява хоча б однієї цифри; G – поява одного герба й однієї цифри; H – поява двох цифр; K – поява двох гербів. Яким з них рівносильні події:

1) $A + C$; 2) AC; 3) EF; 4) $G + E$; 5) GE; 6) BD; 7) $E + K$?

Розв'язання. 1) $A + C = E$; 2) $AC = K$; 3) $EF = G$; 4) $G + E = E$; 5) $GE = G$; 6) $BD = H$; 7) $E + K = E$.

Приклад 6. У ящику лежить 4 кульки. Відомо, що кулька може бути або білою, або чорною. Нехай подія A – рівно одна кулька біла; B – хоча б одна кулька біла; C – рівно дві кульки білі; D – не менше двох кульок білі; E – рівно три кульки білі; F – всі чотири кульки білі. Що означають події: 1) $A + B$; 2) AB; 3) $B + D$; 4) BD; 5) $C + E + F$; 6) BF. Чи збігаються події BF і DF? Чи збігаються події BD і C?

Розв'язання. 1) $A + B = B$; 2) $AB = A$; 3) $B + D = B$; 4) $BD = D$; 5) $C + E + F = D$; 6) $BF = F$.
Оскільки $DF = F$, то $BF = DF = F$, то BF і DF – збігаються. BD і C не збігаються.

2. Аксіоми теорії ймовірності та їх основні наслідки

Аксіоматична побудова теорії ймовірності з'явилася на початку 30-х років XX століття завдяки академіку Колмогорову. Аксіоми теорії ймовірності вводять так, щоб ймовірність події мала основні властивості статистичної ймовірності (відомої вам з попередніх класів), яка відображає практичний зміст теорії ймовірностей. Тоді аксіоми теорії ймовірностей добре узгоджуються з практикою. Також аксіоми теорії ймовірностей узгоджуються і з класичним означенням ймовірності. Дамо означення ймовірності, що ґрунтується на аксіоматичній побудові теорії ймовірності.

Ймовірністю **називають функцію $p(A)$, що набуває дійсних значень і для якої справджуються такі аксіоми:**

$A1$. Кожній випадковій події відповідає число $p(A)$, причому $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

$A2$. Ймовірність вірогідної події дорівнює 1.

$A3$. Ймовірність суми несумісних у даному випробуванні подій A і B дорівнює сумі їх ймовірностей, тобто

$$p(A + B) = p(A) + p(B)$$

З аксіом теорії ймовірностей отримаємо такі наслідки.

Наслідок 1. **Якщо події A_1, A_2, ... A_n попарно несумісні у даному випробуванні, то**

$$p(A_1 + A_2 + ... + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + ... + p(A_n).$$

Н а с л і д о к 2. **Якщо $A_1, A_2, \ldots A_n$ утворюють певну групу подій, то $p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n) = 1$.**

Н а с л і д о к 3. **Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1, тобто $p(A) + p(\bar{A}) = 1$.**

Н а с л і д о к 4. **Ймовірність неможливої події дорівнює нулю.**

Зауважимо, що обернене до наслідку 4 твердження не є правильним, а саме, рівність $p(A) = 0$ не означає, що A – неможлива подія.

3. Обчислення ймовірності подій з використанням аксіом теорії ймовірностей та наслідків з них

Розглянемо задачі, розв'язати які доцільно за аксіомами теорії ймовірностей та наслідками з них.

Приклад 7. У букеті 5 білих, 2 жовті і 3 червоні троянди. Навмання вибирають одну з них. Яка ймовірність того, що вона не є білою?

Р о з в' я з а н н я. *1-й спосіб* (*за класичним означенням ймовірності*). Очевидно, що $n = 5 + 2 + 3$; $m = 2 + 3 = 5$. Тоді

$$p = \frac{m}{n} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

2-й спосіб (*за аксіомою А3*). Нехай подія A – вибрано жовту троянду, B – вибрано червону троянду. Очевидно, що події A і B несумісні. Подія $A + B$ – вибрано жовту або червону троянду, тобто не білу. За аксіомою *А3* маємо:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = 0,5.$$

В і д п о в і д ь. 0,5.

Приклад 8. Групі школярів з 20 учнів видали путівки: 8 – в Одесу і 12 – у Миргород. Путівки між учнями розподілятимуть жеребкуванням. Яка ймовірність того, що брат і сестра з цієї групи школярів відпочиватимуть разом?

Р о з в' я з а н н я. Позначимо:
подія A – брат і сестра відпочиватимуть разом;
подія B_1 – брат і сестра відпочиватимуть разом в Одесі;
подія B_2 – брат і сестра відпочиватимуть разом у Миргороді.
Очевидно, що B_1 і B_2 – несумісні події, причому $A = B_1 + B_2$.
Тоді $p(A) = p(B_1) + p(B_2)$.

Маємо: $p(B_1) = \dfrac{C_8^2}{C_{20}^2}$; $p(B_2) = \dfrac{C_{12}^2}{C_{20}^2}$; тоді $p(A) = \dfrac{C_8^2 + C_{12}^2}{C_{20}^2} = \dfrac{47}{95}$.

В і д п о в і д ь. $\dfrac{47}{95}$.

Формула $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ дає можливість розв'язувати задачі на обчислення ймовірності деякої події через ймовірність протилежної їй події, адже з цієї формули маємо: $p(A) = 1 - p(\bar{A})$. Зрозуміло, що цей підхід використовують тоді, коли ймовірність події $\bar{A}$ знайти легше, ніж ймовірність події A.

Приклад 9. Загадали одне з трицифрових чисел (від 100 до 999). Яка ймовірність того, що в цьому числі хоча б дві цифри будуть однакові?

Р о з в ' я з а н н я. Нехай A – подія, ймовірність якої треба знайти, тоді $\bar{A}$ – подія, яка полягає в тому, що всі цифри в числі різні. Знайдемо ймовірність події $\bar{A}$ за класичним означенням ймовірності. Маємо: $n = 900$, A_{10}^3 – кількість розміщень із трьох різних цифр, причому серед них A_9^2 тих, що починаються з цифри 0, тому $m = A_{10}^3 - A_9^2$. Тоді

$m = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 648.$

Отже, $p(\bar{A}) = \frac{648}{900} = 0,72$, а значить, $p(A) = 1 - 0,72 = 0,28.$

В і д п о в і д ь. 0,28.

- Що називають сумою подій A і B? • Що називають добутком подій A і B? • Що називають подією, протилежною до події A? • Сформулюйте основні властивості операцій над подіями. • Сформулюйте аксіоматичне означення ймовірності. • Сформулюйте наслідки з аксіом теорії ймовірностей.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

19.1. (*Усно*) Сумісні чи несумісні події:

1) A – випаде число 2; B – випаде парне число при одноразовому підкиданні кубика;
2) A – випаде число 4; B – випаде непарне число при одноразовому підкиданні кубика;
3) A – витягнуть білу кульку з ящика, де лежать тільки білі і чорні кульки; B – витягнуть чорну кульку з цього ящика;
4) A – загадають двоцифрове натуральне число, кратне числу 4; B – загадають двоцифрове число, кратне числу 5?

19.2. Сумісні чи несумісні наступні події:

1) A – випаде число 5; B – випаде парне число при одноразовому підкиданні кубика;
2) A – випаде число 3; B – випаде непарне число при одноразовому підкиданні кубика;
3) A – витягнуть білу кульку або чорну кульку з ящика, де лежать тільки білі і чорні кульки; B – витягнуть білу кульку з цього ящика;
4) A – загадають трицифрове число, кратне числу 4; B – загадають непарне трицифрове число?

19.3. (*Усно*) Назвіть події, протилежні до події:

1) A – витягнуть білу кульку з ящика, де лежать тільки білі, сині та зелені кульки;
2) B – при підкиданні двох монет випаде два герби;
3) C – першим уроком у понеділок буде алгебра;
4) D – хоча б одне влучення при чотирьох пострілах;
5) E – учень здасть ЗНО на 200 балів;
6) F – партію в шахи виграє той, хто ходить білими фігурами;
7) G – на гральному кубику випаде число менше за 4;
8) H – при трьох пострілах тричі влучать у мішень.

19.4. Запишіть події, протилежні до подій:

1) A – витягнуть синій олівець з коробки, де лежать тільки сині і червоні олівці;
2) B – при підкиданні двох монет випаде один герб і одна цифра;
3) C – двічі влучать у мішень при трьох пострілах;
4) D – учень отримає за контрольну роботу менше ніж 9 балів;
5) E – у грі в баскетбол виграє перша команда;
6) F – на гральному кубику випаде число 3.

19.5. Ймовірність того, що стрілець влучить у мішень, дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що стрілець не влучить у мішень?

19.6. Ймовірність виграти головний приз у лотереї дорівнює 0,001. Яка ймовірність не виграти головний приз у лотереї?

19.7. Ймовірність виграти у лотерею м’яч дорівнює 0,1, а комплект шахів – 0,05. Інших призів немає. Сергій придбав один лотерейний квиток. Яка ймовірність того, що він виграє приз?

19.8. Майстер спорту зі стрільби Наталя влучає у «десятку» з ймовірністю 0,6, а у «дев’ятку» – з ймовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що при одному пострілі влучення в мішень принесе їй не менше 9 очок?

2

19.9. У Тетяни 5 книжок із фізики, 12 з математики і 3 з інформатики. Навмання з них вибирають одну. Яка ймовірність того, що вона не з математики? (Розв’яжіть задачу двома способами.)

19.10. Богдан відібрав собі для перегляду 8 фільмів з детективним сюжетом, 5 мелодрам та 2 комедії. Увечері він навмання вибирає один з них. Яка ймовірність того, що це не мелодрама? (Розв’яжіть задачу двома способами.)

19.11. Оресту треба виконати домашнє завдання з 5 предметів. 20 % робочого часу він витрачає на фізику, 10 % – на біологію, 15 % – на географію, 25 % – на українську мову і 30 % – на математику. Батьки Ореста прийшли з роботи і побачили, що він готується до уроків. Яка ймовірність того, що він готується до:

1) фізики або географії; 2) не до математики;
3) не до фізики і не до математики;
4) до української мови, географії або біології?

19.12. На полиці у Наталі 20 % від усіх посібників – посібники з математики, 15 % – з фізики, 5 % – з інформатики, 35 % – з англійської мови і 25 % – з німецької мови. Навмання вибирають один посібник. Яка ймовірність того, що це посібник:

1) з іноземної мови; 2) з фізики або математики;
3) не з інформатики; 4) не з іноземної мови?

19.13. У цеху працюють кілька верстатів. Ймовірність того, що протягом зміни налагодження потребуватиме рівно один верстат, дорівнює 0,05; рівно два верстати – 0,03; більше двох верстатів – 0,02. Знайдіть ймовірність того, що протягом зміни жоден верстат не потребуватиме налагодження.

19.14. Марина з ймовірністю 0,05 увечері в суботу може піти у театр, з ймовірністю 0,1 – до подруги, а з ймовірністю у 0,02 – відвідати бабусю, причому за один вечір – відвідати лише одне з цих місць. Яка ймовірність того, що найближчий вечір суботи Марина проведе вдома?

19.15. Стрілець влучає у «десятку» з ймовірністю 0,2, у «дев'ятку» – з ймовірністю 0,25, а у «вісімку» – з ймовірністю 0,3. Знайдіть ймовірність події:

1) A – постріл приніс не менше 8 очок;
2) B – постріл приніс менше 8 очок;
3) C – постріл приніс більше 8 очок.

19.16. Команда «Сатурн» у першості району з баскетболу може посісти перше місце з ймовірністю 0,1, друге – з ймовірністю 0,15, а третє – з ймовірністю 0,2. Знайдіть ймовірність події:

1) A – команда «Сатурн» посіла місце вище третього;
2) B – команда «Сатурн» посіла місце нижче третього;
3) C – команда «Сатурн» посіла місце не нижче третього.

19.17. Серед натуральних чисел від 1 до 9 навмання вибирають одне. Розглядають події:

A – число парне; B – число більше за 7;
C – число кратне числу 3;
D – число, що є квадратом натурального числа.

Поясніть, що означає подія:

1) $A + B$; 2) $C + D$; 3) $A + D$; 4) $B + C$;
5) AB; 6) CD; 7) AD; 8) BC?

19.18. Серед натуральних чисел від 1 до 9 обирають одне. Розглядають події:

A – число непарне;
B – число менше за 3;
C – число кратне числу 4;
D – число є кубом натурального числа.

Опишіть, що означає подія:

1) $A + B$; 2) $C + D$; 3) $A + C$; 4) $B + D$;
5) AB; 6) CD; 7) AC; 8) BD?

3 **19.19.** В 11–А класі 24 учні. Крім англійської мови, яка є основною іноземною, 10 учнів вивчають ще німецьку мову (подія A), 6 учнів – іспанську (подія B), а 2 учні – і німецьку, і іспанську (подія C). Виразіть C через A і B. Що означає подія: 1) $A + B$; 2) $A \cdot \overline{B}$; 3) $\overline{A} \cdot B$; 4) $\overline{A + B}$?

19.20. У жіночій команді зі спортивної гімнастики 20 спортсменок. На змаганнях 8 з них будуть виконувати вправи на брусах (подія A), 7 – на колоді (подія B), а 3 – і на брусах, і на колоді (подія C). Виразіть подію C через події A і B. Що означає подія: 1) $A + B$; 2) $A \cdot \overline{B}$; 3) $\overline{A} \cdot B$; 4) $\overline{A + B}$?

19.21. Кожну з цифр 1, 2 і 3 записали на окремій картці. Навмання виймають одну з них і цифру, записану на ній, вважають кількістю десятків двоцифрового натурального числа. Потім картку повертають назад. Знову навмання виймають картку і цифру, записану на ній, вважають кількістю одиниць двоцифрового натурального числа. Подія A – отримане натуральне число виявиться парним; подія B – кількість одиниць і десятків числа буде різною.

1) Побудуйте простір елементарних подій цього експерименту.

2) Задайте переліком елементів події A; B; $\overline{A}$; $\overline{B}$; AB; $A + B$; $\overline{AB}$.

3) Які з подій у пункті 2) попарно несумісні?

19.22. Кожну з цифр 4, 5 і 6 записали на окремій картці. Навмання виймають одну з них і цифру, записану на ній, вважають кількістю десятків двоцифрового натурального числа. Потім картку повертають назад. Знову навмання виймають картку і цифру, записану на ній, вважають кількістю одиниць двоцифрового натурального числа. Подія A – отримане натуральне число виявиться непарним; подія B – кількість одиниць і десятків числа є однаковою.

1) Побудуйте простір елементарних подій цього експерименту.

2) Задайте переліком елементів події A; B; $\overline{A}$; $\overline{B}$; AB; $A + B$; $\overline{AB}$.

3) Які з подій у пункті 2) попарно несумісні?

19.23. Експеримент полягає в однократному підкиданні грального кубика. Подія A – кількість очок, що випали, кратна числу 3, B – кількість очок непарна, C – кількість очок більша за 3, D – кількість очок менша за 7, E – кількість очок є ірраціональним числом, F – кількість очок більша за $\frac{3}{7}$, але менша за $\sqrt{2}$.

1) Побудуйте простір елементарних подій цього експерименту.

2) Задайте переліком елементів події $\overline{B}$; $\overline{C}$; AB; $A + B$; $\overline{AC}$; $C + D$; EF.

3) Серед подій з пункту 2) укажіть деякі три пари попарно несумісних.

19.24. Експеримент полягає в однократному підкиданні грального кубика. Подія A – кількість очок, що випала, не кратна числу 3, B – кількість очок парна, C – кількість очок менша за 3, D – кількість очок більша за 0, E – кількість очок менша за $\sqrt{5}$, але більша за 1,8, F – кількість очок є від'ємною.

1) Побудуйте простір елементарних подій даного експерименту.

2) Задайте переліком елементів події $\overline{B}$; $\overline{C}$; AB; $A + B$; $\overline{AC}$; $D + F$; EF.

3) Серед подій з пункту 2) укажіть три пари попарно несумісних.

19.25. Подія A_i ($i = 1; 2; 3$) означає появу герба при i-му підкиданні монети. Що означає подія:

1) $A_1\overline{A_2}\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3$;

2) $A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3$?

19.26. Нехай A і B – події даного експерименту. Виразити через події A і B за допомогою операцій над подіями подію:
1) C – з двох подій не відбулася жодна;
2) D – з двох подій відбулася рівно одна;
3) E – з двох подій відбулося рівно дві;
4) F – з двох подій відбулася хоча б одна.

19.27. Тричі підкидають монету. Подія A_i – поява герба при i-му підкиданні ($i = 1; 2; 3$). Подати у вигляді сум, добутків або сум добутків таку подію:
1) A – поява трьох гербів;
2) B – поява трьох цифр;
3) C – поява хоча б одного герба;
4) D – поява хоча б однієї цифри;
5) E – поява не менше ніж двох гербів;
6) F – поява не більше ніж одного герба;
7) G – випав герб не раніше ніж при третьому підкиданні монети.

19.28. Нехай A, B і C – три довільні події. Запишіть за допомогою операцій над цими подіями таку подію:
1) D_1 – всі три події відбулися;
2) D_2 – жодна з подій не відбулася;
3) D_3 – відбулася тільки подія A;
4) D_4 – відбулася принаймні одна з подій A; B; C;
5) D_5 – відбулася рівно одна з цих подій;
6) D_6 – відбулися принаймні дві з цих подій.

19.29. У ящику лежить 4 кульки. Відомо, що кулька може бути або білою, або чорною. Розглядаємо події: A – рівно одна кулька біла; B – хоча б одна кулька біла; C – рівно дві кульки білі; D – не менше двох кульок білі; E – рівно три кульки білі; F – всі чотири кульки білі.

1) Яким з даних подій еквівалентні події: $A + B$; AB; $D + B$; DB; $C + E + F$; BF?
2) Чи еквівалентні події BF і DF?
3) Чи еквівалентні події BD і C?

4 **19.30.** У партії зі 100 виробів 3 вироби виявилися бракованими. З цієї партії навмання взято 25 виробів для реалізації. Яка ймовірність того, що серед них буде принаймні один бракований?

19.31. Серед 100 одинадцятикласників деякої школи двоє вивчають три іноземні мови. Навмання серед цих одинадцятикласників обирають 30 для закордонної туристичної мандрівки. Яка ймовірність того, що серед них буде хоча б один з тих, хто вивчає три іноземні мови?

19.32. У шухляді лежить 4 білі і 6 червоних хустинок. Навмання із шухляди виймають три хустинки. Яка ймовірність того, що серед них принаймні одна:
1) біла; 2) червона?

19.33. У коробці лежить 6 цукерок з чорного шоколаду і 8 з білого. Навмання з коробки беруть чотири цукерки. Яка ймовірність того, що серед них принаймні одна:
1) з білого шоколаду;
2) з чорного шоколаду?

19.34. Навмання обирають п’ятицифрове число. Яка ймовірність того, що в ньому хоча б дві цифри будуть однаковими?

19.35. Навмання обирають чотирицифрове число. Яка ймовірність того, що в ньому хоча б дві цифри будуть однаковими?

19.36. Серед 20 уболівальників випадковим чином розігрують 12 квитків на футбол і 8 на баскетбол. Яка ймовірність того, що два друга відвідають одні й ті самі змагання?

19.37. Серед 15 любителів мистецтва випадковим чином розігрують 6 квитків на прем’єру фільму і 9 квитків на прем’єру спектаклю. Яка ймовірність того, що дві подруги виграють квитки на один і той самий захід?

19.38. Серед 30 старшокласників Києва, серед яких є подруги Ніна і Зоя, розігрують 15 квитків у театр опери і балету, 8 – у драматичний театр і 7 – у театр оперети. Яка ймовірність того, що Ніна і Зоя відвідають одну й ту саму виставу?

19.39. Під час чемпіонату Європи з футболу для 20 уболівальників, серед яких Микола й Андрій, розігрують 9 квитків на матч Україна–Швеція, 6 квитків на матч Україна–Франція і 5 квитків на матч Україна–Англія. Яка ймовірність того, що друзі Микола й Андрій вболіватимуть за улюблену команду на одному й тому самому матчі?

19.40. Використовуючи властивості операцій над подіями, доведіть тотожність:

1) $(A + B)(A + \overline{B}) = A$; 2) $(A + B)(\overline{A} + B)(A + \overline{B}) = AB$;

3) $A + B = A + \overline{A}B$; 4) $A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$.

19.41. З ящика, у якому лежить 6 білих і 8 чорних куль, навмання вибирають 5 куль. Знайдіть ймовірність того, що кількості білих і чорних куль різняться не менше ніж на дві кулі.

19.42. У наборі повітряних кульок 6 білих і 4 рожеві кульки. З набору навмання виймають 6 кульок. Знайдіть ймовірність того, що серед них білих кульок виявиться більше, ніж рожевих.

19.43. 1) У деякій територіальній громаді 80 000 осіб. Відсоток працездатних осіб становить приблизно 67,5 %. Скільки приблизно працездатних осіб у цій територіальній громаді?

2) *Проектна діяльність.* Дізнайся з Інтернету відомості про відсоток працездатних осіб вашої територіальної громади (міста, района, села тощо) та порівняй її з відсотком працездатних осіб в Україні.

19.44. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $a^4 + b^4 = c^2 + 2019$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 19

1. У коробці не більше 40 цукерок. Їх можна поділити порівну між трьома або п'ятьма дітьми, але не можна поділити порівну між дев'ятьма дітьми. Укажіть, яка найбільша кількість цукерок може бути в коробці.

А	Б	В	Г	Д
30	33	36	38	39

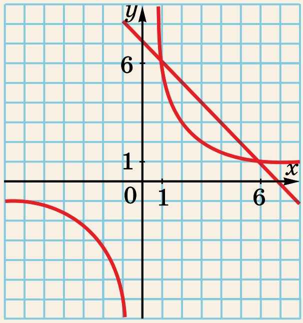
2. Знайдіть кількість звичайних дробів зі знаменником 18, які більші за $\frac{5}{6}$, але менші за 1.

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	чотири

3. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2}5 \cdot \log_{0,2}x < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 5)$	$(1; +\infty)$	$(0; +\infty)$

4. На малюнку зображено графіки функцій $f(x)=\frac{6}{x}$ і $g(x) = 7 - x$. Укажіть розв'язок нерівності $f(x) \leqslant g(x)$.



А	Б	В	Г	Д
(1; 6)	[1; 6]	$(-\infty; 0] \cup [1; 6]$	$(-\infty; 0) \cup [1; 6]$	$(-\infty; +\infty)$

5. Обчисліть $\sin^2 15° - \cos^2 15°$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Ціна акцій щороку зростає на 20 %. Зараз одна акція коштує 500 грн. Якою буде її ціна через 2 роки?

А	Б	В	Г	Д
600 грн	630 грн	660 грн	690 грн	720 грн

7. Установіть відповідність між числовим виразом (1–4) та значенням цього виразу (А–Д).

Числовий вираз

1 $\log_{\frac{1}{3}} 3$

2 $\log_9 \frac{1}{3}$

3 $\log_{\frac{1}{3}} 9$

4 $\log_{27} \frac{1}{9}$

Значення числового виразу

А $-\frac{1}{3}$

Б $-0,5$

В $-\frac{2}{3}$

Г -1

Д -2

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Човен проплив 14 км проти течії річки і 16 км за течією, витративши на весь шлях 2 год. Знайдіть швидкість течії (у км/год), якщо власна швидкість човна дорівнює 15 км/год.

9. Знайдіть корінь рівняння $5^{x+1} - 5^x - 5^{x-1} = 95$.

§ 20. НЕЗАЛЕЖНІ ПОДІЇ. УМОВНА ЙМОВІРНІСТЬ

Якщо у певному досліді або випробуванні маємо дві сумісні події, постає питання, як настання однієї з подій впливає на настання іншої. У цьому параграфі розглянемо саме це.

1. Незалежні події

Подію A називають *незалежною від події B*, якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулася чи ні подія B.

Приклад 1. Розглянемо дослід, який полягає у двох послідовних підкиданнях монети; подія A – випадання герба при другому підкиданні, B – випадання герба при першому підкиданні. Зрозуміло, що $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$ і ймовірність події A не залежить від того, відбулася чи ні подія B. Отже, події A і B у даному прикладі незалежні.

Приклад 2. Дослід полягає в однократному підкиданні грального кубика. Подія A – випадання непарної кількості очок; подія B – випадання кількості очок, меншої за 4. Зрозуміло, що $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Якщо ж відбулася подія B, тобто випало 1 очко, або 2 очка, або 3 очка, то ймовірність події A вже дорівнюватиме $\frac{2}{3}$. Оскільки $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$, то події A і B не є незалежними у даному випробуванні.

Теорема (про ймовірність добутку двох незалежних подій). **Ймовірність добутку двох незалежних подій A і B дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто**

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B).$$

Приймемо цю теорему без доведення.
З теореми маємо важливий наслідок.

Н а с л і д о к. Якщо події $A_1, A_2 \ldots A_n$ незалежні у сукупності, тобто здійснення довільної кількості з них не змінює ймовірності здійснення інших, то

$$p(A_1 A_2 \ldots A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n).$$

Зазначимо, що цим наслідком слід користуватися досить обережно, оскільки події можуть бути попарно незалежні, але не бути незалежними у сукупності.

Повертаючись до прикладу 1, зазначимо, що подія AB полягає у тому, що герб випав як при першому, так і при другому підкиданні. Оскільки події A і B незалежні, можемо застосовувати теорему про ймовірність добутку двох незалежних подій. Маємо

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Той самий результат можна було отримати, розв'язуючи задачу за класичним означенням ймовірності.

Розглянемо ще приклад.

Приклад 3. Гральний кубик підкидають до тих пір, поки не випаде 6 очок. Знайти ймовірність того, що 6 очок вперше випали під час третього підкидання.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо події: A – випало 6 очок вперше при третьому підкиданні, B_i – випало 6 очок при i-му підкиданні ($i = 1; 2; 3$). Тоді $A = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot B_3$. Зрозуміло, що $p(B_i) = \frac{1}{6}$; $p(\overline{B_i}) = \frac{5}{6}$ і $\overline{B}_1, \overline{B}_2$ і B_3 незалежні у сукупності. Отже, маємо

$$p(A) = p(\overline{B_1}\,\overline{B_2}B_3) = p(\overline{B_1})p(\overline{B_2})p(B_3) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}.$$

В і д п о в і д ь. $\frac{25}{216}$.

2. Умовна ймовірність

Для кількісної характеристики залежності однієї події від іншої вводять поняття ***умовної ймовірності***.

Якщо ймовірність події A обчислюють за умови, що подія B відбулася, то тоді ймовірність події A називають *умовною* і назначають $p(A/B)$.

Це означення дає можливість по-іншому означити незалежні події, а саме:

події A і B називають *незалежними між собою*, якщо $p(A/B) = p(A)$ або $p(B/A) = p(B)$.

Це означення можна трактувати так, що виконання однієї з подій не впливає на ймовірність виконання іншої.

Приклад 4. З ящика, у якому лежить 5 чорних і 3 білі кулі, послідовно навмання виймають дві кулі. Розглянемо події: A – перша куля чорна; B – друга куля біла. Чи незалежні події A і B, якщо:

1) після виймання першої кулі її повертають до ящика;
2) після виймання першої кулі її не повертають до ящика?

Розв'язання. Зрозуміло, що $p(A) = \frac{5}{8}$; $p(B) = \frac{3}{8}$.

1) Якщо після того, як першою вийнято чорну кулю, її повернуто до ящика, то у ящику знову стало 5 чорних і 3 білі кулі. А тому $p(B/A) = \frac{3}{8}$. Отже, $p(B/A) = p(B) = \frac{3}{8}$. Події A і B – незалежні.
2) Якщо після того, як першою вийнято чорну кулю, її не повернули до ящика, то у ящику стало 4 чорні і 3 білі кулі. А тому $p(B/A) = \frac{3}{7}$. Маємо $p(B/A) \neq p(B)$. Події A і B – не є незалежними.

Відповідь. 1) Так; 2) ні.

Можна дати й інше означення умовної ймовірності, за яким можна її обчислювати.

Якщо A і B – дві сумісні в одному випробуванні події, причому $p(B) \neq 0$, то число $\frac{p(AB)}{p(B)}$ називають умовною ймовірністю події A за умови, що подія B відбулася, або просто умовною ймовірністю події A.

Отже, маємо: $p(A/B) = \frac{p(AB)}{p(B)}$.

Приклад 5. У шухляді лежить 5 чорних і 3 червоні кулі. Двічі поспіль навмання з шухляди виймають по одній кулі, не повертаючи їх назад до шухляди. Знайти ймовірність того, що другою було вийнято червону кулю, за умови, що першою було вийнято чорну.

Розв'язання. Нехай подія A означає, що першою вийнято чорну кулю; подія B означає, що другою вийнято червону кулю. Тоді подія AB означає, що послідовно вийнято спочатку чорну, а потім червону кулю; B/A – другою вийнято червону кулю за умови, що першою вийнято чорну.
1-й спосіб. Після того як відбулася подія A (першою вийнято чорну кулю), у шухляді залишилося 4 чорні і 3 червоні кулі, а тому $p(B/A) = \frac{3}{7}$ (за класичним означенням ймовірності).

2-й спосіб. $p(A) = \frac{5}{8}$ (за класичним означенням ймовірності);

$p(AB) = \frac{5 \cdot 3}{A_8^2} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 7} = \frac{15}{56}$. Тоді $p(B/A) = \frac{p(AB)}{p(A)} = \frac{15}{56} : \frac{5}{8} = \frac{3}{7}$.

Відповідь. $\frac{3}{7}$.

Використовуючи друге означення умовної ймовірності, можна сформулювати теорему, яку ще називають **теоремою множення ймовірностей:**

T $\boldsymbol{p(AB) = p(A/B) \cdot p(B) = p(B/A) \cdot p(A)}$
(враховуючи, що AB і BA – одна й та сама подія).

Зауважимо, що ця формула має зміст і коли A і B – сумісні.

Н Наслідок 1. **Якщо події A і B незалежні, тобто $p(A/B) = p(A)$ та $p(B/A) = p(B)$, то $p(AB) = p(A) \cdot p(B)$.**

Цю формулу ми знаємо ще з попереднього пункту цього параграфа.

Н Наслідок 2. $\boldsymbol{p(A_1A_2A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot p(A_3/A_1A_2)}$.

Н Наслідок 3.
$\boldsymbol{p(A_1A_2...A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) \cdot p(A_3/A_1A_2) \cdot p(A_n/A_1A_2...A_{n-1})}$.

Приклад 6. 1 % деталей, що виробляють на заводі, – браковані. Серед якісних деталей 60 % – вищого сорту. Яка ймовірність того, що взята навмання деталь буде вищого сорту?

Розв'язання. Нехай подія A означає те, що деталь небракована, а подія B – те, що деталь вищого сорту. Тоді $P(A) = 0{,}99$; $P(B/A) = 0{,}6$.
Отже, $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}99 \cdot 0{,}6 = 0{,}594$.

Відповідь. 0,594.

Приклад 7. Шість карток розрізної абетки містять букви, з яких можна скласти слово «ракета». Картки перемішують, а потім по одній викладають зліва направо. Яка ймовірність того, що знов утвориться слово «ракета»?

Розв'язання. Розглянемо події: A – знов утворилося слово «ракета»; A_i – на i-му місці опинилася потрібна літера.

Літера «*р*» першою може з'явитися з ймовірністю $\frac{1}{6}$, після чого залишиться 5 літер, з яких 2 літери «а», а отже, $P(A_2/A_1) = \frac{2}{5}$ і так само далі. Тоді

$P(A) = P(A_1A_2A_3A_4A_5A_6) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \times$
$\times P(A_4/A_1A_2A_3) \cdot P(A_5/A_1A_2A_3A_4) \cdot P(A_6/A_1A_2A_3A_4A_5) =$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{360}.$$

Відповідь. $\frac{1}{360}$.

Слід зауважити, що цю задачу, як і деякі інші з цього параграфа, можна було розв'язати за класичним означенням ймовірності, а саме $P(A) = \frac{2!}{6!} = \frac{1}{360}$.

3. Ймовірність того, що відбудеться принаймні одна з незалежних подій

Раніше ми вже кілька разів розглядали задачі, у яких треба було знайти ймовірність того, що відбудеться принаймні одна з незалежних подій.

Розглянемо універсальну задачу.

Приклад 8. Нехай події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні в сукупності, а подія A означає, що відбулася хоча б одна з цих подій. Довести, що

$$P(A) = 1 - (1 - p(A_1)) \cdot (1 - p(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - p(A_n)) \quad (*),$$

або $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$, де $q_i = 1 - P(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доведення. Знайдемо ймовірність протилежної події: $P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_n})$. Оскільки події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні в сукупності, то і події $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ також незалежні в сукупності. Тоді

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) = (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)).$$

Отже,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)).$$ ■

Зверніть увагу, якщо $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = p$, то

$$\boldsymbol{P(A) = 1 - (1 - p)^n = 1 - q^n}, \textbf{ де } \boldsymbol{q = 1 - p}. \quad (**)$$

Розглянемо, як застосовувати доведену формулу (*).

Приклад 9. Ймовірність того, що при натисканні стартера мотор запрацює, дорівнює $\frac{5}{6}$. Знайти ймовірність того, що для запуску мотора знадобиться не більше двох натискань.

Розв'язання. Маємо: $P(A_1) = P(A_2) = \frac{5}{6}$, де подія A_i полягає у тому, що мотор запрацював при i-му натисканні стартера. Тоді, якщо подія A полягає у тому, що для запуску мотора треба не більше двох натискань, то за формулою (**):

$$P(A) = 1 - \left(1 - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{35}{36}.$$

Відповідь. $\frac{35}{36}$.

Приклад 10. Скільки разів достатньо підкинути монету, щоб з ймовірністю 0,99 бути впевненим у тому, що хоча б один раз випаде герб?

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що хоча б один раз випав герб, а події A_i – у тому, що при i-му підкиданні випав герб ($i = 1, 2, ..., n$). Зрозуміло, що $P(A_i) = \frac{1}{2} = 0,5$ для всіх i. Тому $P(A) = 1 - (1 - 0,5)^n = 1 - (0,5)^n$. Залишається знайти таке n, щоб $1 - (0,5)^n \geqslant 0,99$, тобто $(0,5)^n \leqslant 0,01$.

Тоді $n \geqslant \log_{0,5} 0,01$, але $\log_{0,5} 0,01 = \log_2 100 = \frac{2}{\lg 2} \approx 6,64$.

Оскільки $n \in N$, то $n \geqslant 7$, отже, $n = 7$. Таким чином, підкинувши монету сім разів, можна з ймовірністю 0,99 бути впевненим у тому, що хоча б один раз випаде герб.

Відповідь. 7 разів.

Приклад 11. (*Задача де Мере*). Шевальє де Мере, друг математика Б. Паскаля, пропонував партнерам гру за такими правилами: він буде підкидати два гральних кубики 24 рази і виграє, якщо хоча б один раз випаде дві шістки. Його суперник підкидає один раз чотири гральних кубика і виграє, якщо випаде хоча б одна шістка. Здавалося, що шевальє де Мере вибрав собі більш сприятливі умови, але граючи багато разів, він більше програвав, ніж вигравав. Чому?

Розв'язання. Нехай подія A – випадання двох шісток при підкиданні двох кубиків, тоді $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Подія B – випадання хоча б однієї шістки при підкиданні чотирьох кубиків, тоді $P(B) = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0,518$.

Подія C – виграш шевальє де Мере, тобто випадання двох шісток (подія A) хоча б один раз в серії з 24 підкидань двох кубиків, тоді $P(C) = 1 - \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491$.

Оскільки $P(B) > P(C)$, то шевальє де Мере частіше програвав, ніж вигравав.

• Коли подію A називають незалежною від події B? • Сформулюйте теорему про ймовірність добутку двох незалежних подій та її наслідок. • Коли ймовірність події A називають умовною? • За якою формулою можна знайти умовну ймовірність? • Сформулюйте теорему множення ймовірностей та наслідки з неї. • Покажіть на прикладі 8, як знайти ймовірність здійснення принаймні однієї з незалежних подій.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

20.1. Одночасно підкидають два гральних кубики. Покажіть, що незалежними є події:
1) A – випадання «1» на першому кубику і B – випадання «6» на другому кубику;
2) C – випадання парної кількості очок на першому кубику і D – випадання кількості очок, кратної числу 3, на другому.

20.2. Одночасно підкидають два гральних кубики. Доведіть, що незалежними є події:
1) A – випадання «2» на першому кубику і B – випадання «4» на другому кубику;
2) C – випадання кількості очок, кратної числу 5, на першому кубику і D – випадання непарної кількості очок на другому.

2

20.3. Гральний кубик підкидають доти, доки не випаде парне число. Знайдіть ймовірність того, що вперше воно випаде на третьому підкиданні.

20.4. Монету підкидають до тих пір, поки не з'явиться герб. Знайдіть ймовірність того, що вперше він випаде при другому підкиданні.

20.5. У ящику 6 білих і 4 чорні кульки. З ящика двічі виймають кульки, не повертаючи їх назад. Знайдіть ймовірність подій:
1) A – перший раз вийнято білу кульку, а другий – чорну;
2) B – другою було вийнято чорну кульку за умови, що першою було вийнято білу кульку.

20.6. У ящику 4 виграшних лотерейних білети і 16 білетів без виграшу. По черзі з ящика виймають два білети, не повертаючи їх назад. Знайдіть ймовірності подій:
1) A – першим витягнуто білет без виграшу, а другим – виграшний білет;
2) B – другим витягнуто виграшний білет за умови, що перший білет без виграшу.

20.7. У букеті 5 білих троянд і 2 червоні. Послідовно навмання з букету виймають дві троянди. Розглядаємо події: A – перша троянда біла; B – друга троянда червона. Чи незалежні події A і B, якщо після виймання першої троянди її:
1) повертають до букета;
2) не повертають до букета?

20.8. У коробці 8 кольорових і 3 простих олівці. Навмання з коробки послідовно виймають два олівці. Розглядаємо події: A – перший олівець кольоровий; B – другий олівець простий. Чи незалежні події A і B, якщо після виймання першого олівця його:

1) не повертають до коробки;
2) повертають до коробки?

20.9. Із п'яти карток розрізної абетки складено слово «число». Картки перемішують, а потім по одній розкладають зліва направо. Яка ймовірність того, що знов буде складено слово «число»?

20.10. Із чотирьох карток розрізної абетки складено слово «сало». Картки перемішують, а потім по одній розкладають зліва направо. Яка ймовірність того, що знов буде складено слово «сало»?

20.11. На дев'яти картках записано цифри від 1 до 9. Картки перемішують, а потім по одній розкладають зліва направо. Яка ймовірність того, що буде складено число «4321»?

20.12. На дев'яти картках записано цифри від 1 до 9. Картки перемішують, а потім по одній розкладають зліва направо. Яка ймовірність того, що буде складено число «19»?

20.13. У ящику 8 білих і 10 чорних кульок. Двічі поспіль навмання виймають по одній кульці, не повертаючи їх назад. Знайдіть ймовірність події:
1) A – обидві кульки білі;
2) B – обидві кульки чорні;
3) C – другою витягнуто білу кульку за умови, що першою витягнуто чорну;
4) D – другою витягнуто чорну кульку за умови, що першою витягнуто білу.

20.14. У шухляді лежить 6 виделок і 8 ложок. Двічі поспіль навмання виймають по одному столовому приладу, не повертаючи їх назад. Знайдіть ймовірність події:
1) A – обидва виявилися виделками;
2) B – обидва виявилися ложками;
3) C – другою витягнуто виделку за умови, що першою витягнуто ложку;
4) D – другою витягнуто ложку за умови, що першою витягнуто виделку.

20.15. Підкидають одночасно два гральних кубики. Яка ймовірність того, що:
1) на першому випаде 3 очки, а на другому – парна кількість очок;
2) на першому випаде «1» або «2», а на другому – непарна кількість очок?

20.16. Підкидають одночасно два гральних кубики. Яка ймовірність того, що:
1) на першому випаде «6», а на другому – парна кількість очок;
2) на першому випаде непарна кількість очок, а на другому кількість очок менша за 3?

20.17. Ймовірність влучення стрільця у мішень дорівнює 0,7. Стрілець зробив три постріли. Знайдіть ймовірність того, що всі три виявилися влучними.

20.18. Ймовірність влучення у мішень першою біатлоністкою дорівнює 0,6, а другою – 0,5. Кожна з них зробила по одному пострілу. Яка ймовірність того, що обидві влучили?

20.19. У ящику 2 білі, 3 чорні і 5 червоних кульок. Навмання двічі виймають з ящика одну кульку, повертаючи кожного разу її назад до ящика. Яка ймовірність того, що:

1) обидва рази витягнуто чорну кульку;
2) перший раз витягнуто чорну кульку, а другий – білу.
3) перший раз витягнуто білу кульку, а другий – чорну;
4) перший раз витягнуто червону кульку, а другий – білу або чорну.

20.20. У ящику 5 зелених, 4 білі і 1 чорна кулька. Навмання двічі виймають з ящика одну кульку, повертаючи кожного разу її назад до ящика. Яка ймовірність того, що:

1) обидва рази витягнуто білу кульку;
2) перший раз витягнуто зелену кульку, а другий – чорну;
3) перший раз витягнуто чорну кульку, а другий – зелену;
4) перший раз витягнуто чорну кульку, а другий – зелену або білу.

3

20.21. Гральний кубик підкидають один раз. Розглядають події: A – випаде число більше за 2, B – випаде парне число. Знайдіть:

1) $p\ (A/B)$; 2) $p\ (B/A)$.

20.22. Гральний кубик підкидають один раз. Розглядають події: A – випаде число менше за 5, B – випаде непарне число. Знайдіть:

1) $p(A/B)$; 2) $p(B/A)$.

20.23. При виготовленні партії повітряних кульок ймовірність виявити в партії браковану кульку дорівнює 0,001. Відомо, що $\frac{2}{3}$ кульок – червоного кольору, а інші – синього. Яка ймовірність того, що навмання вибрана кулька буде небракованою і червоною?

20.24. У партії моторів, які випускає завод, брак складає 1 %. Третину моторів пофарбовано у зелений колір, інші – у чорний. Яка ймовірність того, що навмання обраний мотор буде небракованим і зеленого кольору?

20.25. Стрілець тричі поспіль стріляє по мішені. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,9. Знайдіть ймовірність того, що стрілець влучив лише при:

1) першому і третьому пострілах;
2) другому пострілі.

20.26. Стрілець тричі поспіль стріляє по мішені. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,8. Знайдіть ймовірність того, що стрілець влучив лише при:

1) першому пострілі; 2) другому та третьому пострілах.

20.27. Ймовірність виготовлення якісної деталі на першому верстаті дорівнює 0,95, а на другому – 0,9. На першому верстаті виготовлено 3 деталі, а на другому – 2 деталі. Чи можна з ймовірністю 0,7 стверджувати, що всі вони якісні?

20.28. Підкидають послідовно дві монети. Розглядаємо події: A – випав герб на першій монеті; B – випав хоча б один герб; C – випала хоча б одна цифра; D – випав герб на другій монеті. Чи будуть незалежними події:

1) A і B; 2) A і D; 3) B і C; 4) B і D.

20.29. Двічі підкидають гральний кубик. Розглядаємо події: A – при першому підкиданні випала «одиничка»; B – при другому підкиданні випало число, кратне числу 3. Знайдіть ймовірність події $A\overline{B}$.

20.30. Двічі підкидають гральний кубик. Розглядаємо події: A – перший раз випала парна кількість очок; B – другий раз випало число менше за 3. Знайдіть ймовірність події $A\overline{B}$.

20.31. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Яка ймовірність того, що у мішень буде влучено хоча б одним пострілом, якщо обидва стрільці виконують по одному пострілу незалежно один від одного?

20.32. Ймовірність влучення стрільця в мішень при одному пострілі дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що з двох пострілів він влучить хоча б один раз?

20.33. Прилад складається з 10 блоків: 6 першого типу і 4 – другого. Ймовірність виходу з ладу протягом доби для кожного блоку першого типу дорівнює 0,002, а для кожного блоку другого типу – 0,004. Прилад виходить з ладу у випадку поламки хоча б одного блоку. Знайдіть ймовірність того, що протягом доби прилад вийде з ладу.

20.34. Деталі лежать у ящиках по 100 штук в кожному. У кожному ящику є по одній бракованій деталі. Контролер якості продукції, що перевіряє деталі, вибирає навмання по одній деталі з кожного зі 100 ящиків. Яка ймовірність того, що хоча б одна з вибраних деталей виявиться бракованою?

20.35. Над виготовленням певного виробу послідовно працюють троє робітників. Якість виробу при переході від одного робітника до іншого не перевіряють. Перший робітник допускає брак з ймовірністю 0,01, другий – 0,05; третій – 0,08. Знайдіть ймовірність того, що:

1) виріб буде якісним;
2) виріб буде бракованим.

20.36. Електричний прилад виходить з ладу, якщо виходить з ладу хоча б один з трьох елементів, які псуються з ймовірностями 0,1; 0,2 і 0,3 незалежно один від одного в період року. Знайдіть ймовірність того, що протягом року:
1) прилад буде працювати без ремонту;
2) прилад зіпсується.

20.37. Відомо, що при підкиданні двох гральних кубиків на кожному випала парна кількість очок. Яка ймовірність того, що сума очок на кубиках буде більшою за 8?

20.38. Відомо, що при підкиданні двох гральних кубиків на кожному випала непарна кількість очок. Яка ймовірність того, що сума очок на кубиках буде меншою за 8?

4 **20.39.** При включенні двигун починає працювати з ймовірністю 0,98. Знайдіть ймовірності наступних подій:
1) A – двигун почне працювати при другому включенні;
2) B – для початку роботи двигуна запалення треба включати не більше двох разів.

20.40. Гральний кубик підкидають доти, доки не випаде шістка. Яка ймовірність того, що виконають не більше трьох підкидань?

20.41. У ящику 2 білі кульки і 3 чорні. Два гравці по черзі виймають по одній кульці і не повертають їх назад. Виграє той, хто першим вийме білу кульку. У скільки разів шанси першого гравця більші за шанси другого?

20.42. Маємо коробку з 9 новими м'ячами. Для гри беруть три м'ячі, а після гри їх повертають у коробку. При цьому м'ячі, якими вже грали, не відрізняються від нових. Яка ймовірність того, що після трьох ігор в коробці не залишиться м'ячів, якими ще не грали?

20.43. Із коробки, що містить 6 білих і 4 чорні кулі, навмання послідовно виймають по одній кулі доти, доки не з'явиться чорна куля. Знайдіть ймовірність того, що знадобиться більше трьох спроб для цього, якщо вийняту кулю:
1) відкладають у сторону; 2) повертають до коробки.

20.44. Скільки разів треба підкинути гральний кубик, щоб із ймовірністю 0,95 бути впевненим, що хоч раз випаде шістка?

20.45. Скільки разів треба підкинути гральний кубик, щоб із ймовірністю 0,96 бути впевненим, що хоч раз випаде більше 4 очок?

20.46. Відомо, що при підкиданні трьох гральних кубиків на жодному не випало одиниці. З якою ймовірністю можна стверджувати, що хоч на одному з них випала парна кількість очок?

20.47. Відомо, що при підкиданні двох гральних кубиків на жодному не випало шістки. З якою ймовірністю можна стверджувати, що хоч на одному з них випала парна кількість очок?

20.48. В одному ящику 5 білих кульок, 11 чорних і 8 зелених, а в другому – 10 білих, 8 чорних і 6 зелених. Навмання беруть по одній кульці з кожного ящика. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

20.49. В одному ящику 5 білих, 4 чорні і 1 синя кулька, а в другому – 3 білі, 3 чорні і 4 сині. Навмання беруть по одній кульці з кожного ящика. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

20.50. Три стрільці незалежно один від одного по одному разу стріляють у ціль. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого – 0,75, для третього – 0,7. Знайдіть ймовірності таких подій:

1) жоден не влучив;
2) відбудеться хоча б одне влучення;
3) відбудеться рівно одне влучення;
4) відбудеться рівно два влучення.

20.51. Три стрільці незалежно один від одного роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення першого стрільця дорівнює 0,8, другого – 0,7, третього – 0,4. Яка ймовірність того, що у мішень влучили рівно два стрільці?

20.52. N гостей, що виходять з квартири, мають однаковий розмір взуття і взувають його у темряві. Відомо, що кожний з гостей у темряві може відрізнити взуття на ліву ногу від взуття на праву. Знайдіть ймовірності подій:

1) кожний гість взується у своє взуття;
2) кожний гість взується у взуття однієї пари (можливо, що й не своє).

20.53. До білетів з іспиту включено 30 питань, з яких студент Половинченко вивчив лише 15. Для успішного складання іспиту треба відповісти на два навмання обраних питання або на одне питання з двох обраних і на одне додаткове, обране з питань, що залишилися. Яка ймовірність того, що Половинченко успішно складе іспит?

20.54. Визначте, скільки відсотків свого місячного доходу витрачає на цигарки людина, що викурює одну пачку на добу, якщо пачка цигарок коштує 30 грн, а її щомісячна зарплатня складає 7500 грн (у місяці 30 днів).

20.55. Розв'яжіть рівняння

$$e^x - 1 = \ln(x+1).$$

Перевірте свою компетентність

Завдання № 20

1. Відомо, що $\log_{0,1} x > \log_{0,1} 11$. Якому значенню може дорівнювати x?

А	Б	В	Г	Д
0	2	12	22	42

2. Розв'яжіть рівняння $16^x = 8$.

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$

3. Знайдіть значення виразу $6\sin\frac{\pi}{6} + 3\cos\pi$.

А	Б	В	Г	Д
–3	–1	0	2	4

4. Укажіть функцію, що не має похідної в точці 0.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$	$y = 4$

5. Дано: $f(x) = e^{3x} - e^x$. Знайдіть: $f'(0)$.

А	Б	В	Г	Д
–1	0	1	2	3

6. Укажіть вираз, значення якого є найменшим.

А	Б	В	Г	Д
$0,1^3$	$0,1^5$	$0,1^\pi$	$0,1^{3,2}$	$0,1^4$

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та його коренем (А–Д).

Рівняння	*Корені рівняння*
1 $\log_3 x = 2$	**А** 1
2 $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$	**Б** 3
3 $\log_2(x+1) = 3$	**В** 5
4 $\log_7(x-2) = 0$	**Г** 7
	Д 9

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Обчисліть $\sin 7°30' \cos 7°30' \cos 15°$.

9. У шухляді є чорні й білі кульки, різниця між кількістю яких дорівнює 8. Ймовірність витягнути з шухляди навмання білу кульку дорівнює 0,3. Скільки чорних кульок у шухляді?

§ 21. ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА ТА ЇЇ МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ

Одним з найважливіших понять теорії ймовірностей є поняття *випадкової величини*. У цьому параграфі розглянемо найпростіший вид випадкової величини, а саме, коли випадковий дослід має скінченну множину елементарних наслідків. Такі випадкові величини називають *дискретними*. Більш складні види випадкових величин розглядають у вищих навчальних закладах.

1. Випадкова величина

Розглянемо випадковий дослід, який полягає в одночасному підкиданні трьох монет. Тоді кількість гербів, які можуть при цьому випасти, дорівнює одному з чисел 0; 1; 2 або 3, тобто ця кількість набуває деякого випадкового значення.

***Випадковою величиною* називають величину, яка в результаті випадкового досліду набуває того чи іншого значення, причому заздалегідь невідомо, якого саме.**

Домовимося випадкові величини позначати великими латинськими літерами X; Y; Z ..., а значення, яких вони набувають, відповідно малими літерами x_1, x_2, x_3 ...; y_1, y_2, y_3 ...; z_1, z_2, z_3 ... .

Так, якщо, наприклад, X – кількість гербів, що з'явилася при підкиданні трьох монет, то $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Приклад 1. Проводять один дослід, у результаті якого подія A може відбутися з ймовірністю 0,6. Розглянемо випадкову величину X – кількість появи події A у даному досліді. Будемо вважати, що випадкова величина набуває значення 0, якщо подія A не відбулася, і значення 1, якщо відбулася. Маємо: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Позначимо ймовірності, що відповідають цим значенням, відповідно p_1 і p_2. Тоді очевидно, що $p_2 = 0,6$ (за умовою), а $p_1 = 1 - 0,6 = 0,4$. Отримані дані зручно подати у вигляді таблиці.

x_i	0	1
p_i	0,4	0,6

У такому разі кажуть, що *закон розподілу випадкової величини X* задано у вигляді таблиці. Зауважимо, що закон розподілу випадкової величини можна задавати не лише у вигляді таблиці, а й в інший спосіб, проте для випадкової величини, яка у даному випадковому досліді має скінченну множину значень $x_1, x_2, \ldots x_n$ (їх ще називають елементарними значеннями), табличний вигляд є найбільш зручним.

У загальному вигляді *таблицю розподілу* можна записати так:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Перший рядок таблиці містить всі можливі значення випадкової величини (зазвичай, у порядку зростання), а другий – їхні ймовірності. Таку таблицю називають ще *рядом розподілу*.

Таким чином, для опису випадкової величини треба знати її можливі значення $x_1, x_2, \ldots x_n$ та відповідні їм ймовірності $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Оскільки досліди, які розглядають для випадкової величини, мають скінченну множину попарно несумісних елементарних наслідків, що утворюють повну групу подій, то сума їхніх ймовірностей дорівнює 1, тобто

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Розглянемо приклад.

Приклад 2. Закон розподілу деякої випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	a	0,1	0,4

Знайти a.

Розв'язання. Оскільки $p_1 + p_2 + p_3 + p_n = 1$, маємо рівняння: $0,2 + a + 0,1 + 0,4 = 1$, звідки $a = 0,3$.

Відповідь. 0,3.

Отже, якщо закон розподілу деякої випадкової величини задано таблицею, то можна знайти ймовірність набуття випадковою величиною певного значення. Наприклад, той факт, що випадкова величина X набуває значення 3 із ймовірністю 0,4, записують так:

$$p(X = 3) = 0,4.$$

Приклад 3. Закон розподілу деякої випадкової величини X задано у таблиці:

x_i	2	4	6	8	10
p_i	0,1	0,3	0,25	0,15	0,2

Знайдіть: 1) $p(X = 4)$; 2) $p(X < 6)$; 3) $p(4 \leqslant X < 9)$; 4) $p(X \geqslant 8)$.

Р о з в ’ я з а н н я. 1) $p(X = 4) = 0{,}3$;
2) $p(X < 6)$ – це ймовірність того, що випадкова величина X набула значення, меншого за 6, тобто значень 2 або 4. Маємо: $p(X < 6) = p(X = 2) + p(X = 6) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$;
3) $p(4 \leqslant X < 9) = p(X = 4) + p(X = 6) + p(X = 8) = 0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}7$;
4) $p(X \geqslant 8) = p(X = 8) + p(X = 10) = 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}35$.

В і д п о в і д ь. 1) 0,3; 2) 0,4; 3) 0,7; 4) 0,35.

Приклад 4. Стрілець стріляє по мішені двічі. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,6. Випадкова величина X – кількість влучень. Запишіть закон розподілу цієї випадкової величини.

Р о з в ’ я з а н н я. Очевидно, що результатом досліду можуть бути 0, 1 або 2 влучення.
Отже, якщо $x_1 = 0$, то $p_1 = (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}4^2 = 0{,}16$;
$x_2 = 1$, то $p_2 = 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}6) + (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}6 = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48$;
$x_3 = 2$, то $p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$.

Маємо закон розподілу:

x_i	0	1	2
p_i	0,16	0,48	0,36

Зауважимо, що у задачах, пов’язаних із законом розподілу, пересвідчитися у правильності результатів можна перевіркою, що сума ймовірностей дорівнює 1.
Справді, $0{,}16 + 0{,}48 + 0{,}36 = 1$.

2. Математичне сподівання випадкової величини

Закон розподілу випадкової величини повністю її характеризує, проте для розв’язування деяких практичних задач достатньо знати лише деякі числові параметри, які характеризують суттєві властивості закону розподілу. Їх прийнято називати *числовими характеристиками випадкової величини*. У шкільному курсі математики розглядають лише одну з основних характеристик, а саме, *математичне сподівання*. Інші числові характеристики випадкової величини розглядають у вищих навчальних закладах.

Математичним сподіванням (або ***середнім значенням***) **дискретної випадкової величини називають число, що дорівнює сумі добутків всіх її значень на відповідні їм ймовірності.**

Математичне сподівання випадкової величини X будемо позначати $M(X)$. Отже, якщо маємо ряд розподілу:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

то $\boldsymbol{M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots x_np_n}$.

Так, у прикладі 1 $M(X) = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}6$, а у прикладі 4 $M(X) = 0 \cdot 0{,}16 + 1 \cdot 0{,}48 + 2 \cdot 0{,}36 = 1{,}2$.

Ймовірнісний зміст математичного сподівання полягає в тому, що воно є середнім значенням, якого може набувати випадкова величина.

Приклад 5. У ящику лежить 5 білих куль і 3 чорні. З ящика навмання виймають 3 кулі. Нехай X – кількість білих куль серед вийнятих. Знайти:
1) закон розподілу випадкової величини X; 2) $M(X)$.

Розв'язання. 1) Якщо $x_1 = 0$, то $p_1 = \frac{C_5^0 \cdot C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$;

якщо $x_2 = 1$, то $p_2 = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$;

якщо $x_3 = 2$, то $p_3 = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$;

якщо $x_4 = 3$, то $p_4 = \frac{C_5^3 \cdot C_3^0}{C_8^3} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$.

Отримали ряд розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

2) $M(X) = 0 \cdot \frac{1}{56} + 1 \cdot \frac{15}{56} + 2 \cdot \frac{15}{28} + 3 \cdot \frac{5}{28} = 1\frac{7}{8}$.

Відповідь. 2) $1\frac{7}{8}$.

● Що називають випадковою величиною? ● Як задають таблицю розподілу випадкової величини? ● Що називають математичним сподіванням випадкової величини?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **21.1.** Закон розподілу випадкової величини задано в таблиці:

1)

x_i	1	2	3
p_i	0,5	a	0,2

2)

x_i	1	3	5	7
p_i	a	0,2	0,4	$3a$

Знайдіть a.

21.2. Закон розподілу випадкової величини задано в таблиці:

1)

x_i	1	2	3	4
p_i	b	0,3	0,2	0,4

2)

x_i	2	4	6
p_i	b	$2b$	0,1

Знайдіть b.

21.3. Закон розподілу випадкової величини X задано таблицею:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,15	0,1	0,25	0,05	0,2	0,25

Знайдіть: 1) $p(X < 2)$; 2) $p(X \geqslant 5)$; 3) $p(1 \leqslant X < 3)$; 4) $p(2 < X \leqslant 4)$; 5) $p(1 < X \leqslant 6)$; 6) $p(3 < X < 5)$.

21.4. Закон розподілу випадкової величини X задано таблицею:

x_i	2	3	4	5	6	7
p_i	0,1	0,2	0,25	0,3	0,05	0,1

Знайдіть: 1) $p(X \leqslant 3)$; 2) $p(X > 5)$; 3) $p(2 \leqslant X < 6)$; 4) $p(3 < X \leqslant 4)$; 5) $p(2 \leqslant X < 4)$; 6) $p(4 \leqslant X \leqslant 6)$.

2

21.5. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини X у задачі 21.3.

21.6. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини X у задачі 21.4.

21.7. Проводять один дослід, у результаті якого подія A може відбутися з ймовірністю 0,8. Розглядають випадкову величину X – кількість появи події A у даному досліді. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X;
2) математичне сподівання випадкової величини X.

21.8. Проводять один дослід, у результаті якого подія A може відбутися з ймовірністю 0,7. Розглядають випадкову величину X – кількість появи події A у даному досліді. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X;
2) математичне сподівання випадкової величини X.

3

21.9. Стрілець стріляє по мішені двічі. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,7. Випадкова величина X – кількість влучень. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X;
2) $p(X < 1{,}5)$; 3) $p(X > 1)$; 4) $M(X)$.

21.10. Одночасно підкидають дві монети. Випадкова величина X – кількість випадань герба. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X;
2) $p(X > 1{,}5)$; 3) $p(X \leqslant 1)$; 4) $M(X)$.

21.11. Лотерея налічує 1000 квитків, з яких 10 білетів з виграшем у 100 грн, 50 білетів – у 500 грн, 100 білетів – у 50 грн, інші білети – невиграшні. Знайдіть математичне сподівання виграшу на один білет.

21.12. Лотерея налічує 1000 квитків, з яких 5 білетів із виграшем у 2000 грн, 100 білетів – у 500 грн, 200 білетів – у 10 грн. Знайдіть математичне сподівання виграшу на один білет.

4

21.13. На полиці стоїть 3 навчальних посібники з геометрії і 5 посібників з алгебри. Навмання вибирають з них дві книжки. Випадкова величина X – кількість книжок з алгебри серед вибраних. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X;
2) $p(X<1)$; 3) $p(X \leqslant 1{,}5)$; 4) $M(X)$.

21.14. У ящику лежить 8 білих кульок і 2 чорні. Навмання з ящика виймають 2 кульки. Випадкова величина X – кількість чорних кульок серед тих, що вийняли. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X;
2) $p(X < 3)$; 3) $p(X > 2)$; 4) $M(X)$.

21.15. Відомо, що відкрити двері можна одним із чотирьох ключів. Послідовно намагаються відкрити двері кожним із цих ключів. Випадкова величина X – кількість спроб, необхідних для відкривання замка. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X; 2) $M(X)$.

21.16. Кожний з двох стрільців незалежно один від одного стріляє по мішені. Ймовірність влучання першим стрільцем дорівнює 0,8, а другим – 0,6. Випадкова величина X – сумарна кількість влучень по мішені у даному досліді. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X; 2) $M(X)$.

21.17. Спортсменка стріляє по мішені двічі. Ймовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 0,7. Випадкова величина X – кількість влучень у даному досліді. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X; 2) $M(X)$.

21.18. Підкидають одночасно чотири гральних кубики. Випадкова величина X – кількість кубиків, на яких випало більше двох очок. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X; 2) $M(X)$.

21.19. Проводять три незалежних досліди, у кожному з яких подія відбувається з ймовірністю 0,4. Випадкова величина X – кількість появи події A в цих трьох дослідах. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X; 2) $M(X)$.

21.20. Здорова людина у віці 16–17 років потребує приблизно 2500 ккал на добу для забезпечення організму енергією. Під час сніданку Марічка отримала 500 ккал, за обід – 1000 ккал, за полуденок – 300 ккал.
1) Який відсоток від добової норми ккал отримала Марічка під час сніданку, який – під час обіду, який – під час полуденку?
2) Якою має бути калорійність вечері, щоб Марічка отримала добову норму ккал?

3) *Проектна діяльність.* Проаналізуйте свій раціон харчування за один із днів. Знайдіть в Інтернеті таблицю калорійності продуктів та обчисліть приблизну кількість калорій, спожиту вами протягом доби.

21.21. Миша починає гризти куб, що складається із 27 однакових кубиків. Згризши один кубик, вона переходить до сусіднього, що має з ним спільну грань. Чи може миша у такий спосіб згризти весь куб, за виключенням центрального кубика?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

Розв'яжіть рівняння (**21.22–21.23**):

21.22. 1) $12x = -24$; 2) $7x + 14 = 7$;
3) $4(x - 2) = 2(x + 3) - 7$; 4) $\frac{x}{5} - \frac{x}{3} = 4$.

21.23. 1) $2x^2 + 3x = 0$; 2) $4x^2 - 16 = 0$;
3) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; 4) $9x^2 - 6x + 1 = 0$;
5) $\frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x + 3} = 0$; 6) $\frac{21}{x^2 - 2x} - \frac{14}{x^2 + 2x} = \frac{5}{x}$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 21

1. Укажіть значення b, при якому вираз $\frac{b+1}{2b+6}$ не має змісту.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{3}$	-1	-3	3	0

2. Обчисліть $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{14}$.

А	Б	В	Г	Д
$9 + 2\sqrt{14}$	$9 - 2\sqrt{14}$	9	3	$\sqrt{7} + \sqrt{2}$

3. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $3^x = \frac{2\sqrt{3}}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$[-3; -2)$	$[-2; -1)$	$[-1; 0)$	$(0; +\infty]$

4. Укажіть парну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{x-1}{x-1}+x^2$	$y=\frac{x^2-1}{x^2-1}+x^2$	$y=\frac{x^2-1}{x^2-1}+x$	$y=\frac{x^2}{x}$	$y=\frac{x-1}{x-1}$

5. Обчисліть інтеграл $\int_0^6 x^2dx$.

А	Б	В	Г	Д
12	18	24	36	72

6. Укажіть точку, у якій функція $y=\mathrm{tg}\,x$ не має похідної.

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

7. Установіть відповідність між функцією, заданою формулою (1–4), та множиною її значень (А–Д).

Функція

1 $y=\sqrt[4]{x-3}$

2 $y=\log_2(x^2-9)$

3 $y=\frac{10}{\sqrt{x-3}}$

4 $y=\lg(3-x)$

Множина значень функції

А $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$

Б $(-\infty;-3)$

В $(-\infty;3)$

Г $[3;+\infty)$

Д $(3;+\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. У букеті 3 сині та 2 білі айстри. Навмання вибирають три з них. Яка ймовірність того, що всі вони сині?

9. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_{18}=-29$, $S_{10}=-40$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 7

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Ймовірність виграти в лотерею велосипед дорівнює 0,1. Яка ймовірність не виграти велосипед у цій лотереї?

А. 0,1 **Б.** 0,2 **В.** 0,8 **Г.** 0,9

2. Підкидають два гральних кубики і розглядають події:
A – випадання шістки на першому кубику;
B – випадання парної кількості очок на другому.

Тоді події A і B ...
А. несумісні у даному досліді
Б. незалежні у даному досліді
В. не є незалежними у даному досліді
Г. утворюють повну групу подій у даному досліді

3. Закон розподілу випадкової величини задано таблицею:

x_i	1	2	3	4
p_i	a	0,3	0,4	a

Знайдіть a.
А. 0,3 **Б.** 0,2 **В.** 0,15 **Г.** 0,1

2 **4.** Біатлоністка влучає в «десятку» з ймовірністю 0,1, у «дев'ятку» – з ймовірністю 0,3, у «вісімку» – з ймовірністю 0,5. Біатлоністка виконала один постріл. Яка ймовірність того, що вона влучила не менше ніж у «дев'ятку»?
А. 0,1 **Б.** 0,4 **В.** 0,5 **Г.** 0,6

5. У ящику 3 білі, 2 чорні і 5 червоних кульок. Навмання двічі вибирають по одній кульці і повертають їх назад до ящика. Яка ймовірність того, що перший раз вибрано білу кульку, а другий – червону?

А. 0,15 **Б.** 0,8 **В.** $\frac{1}{6}$ **Г.** 0,5

6. Закон розподілу випадкової величини X зазначено у таблиці:

x_i	0	2	4	6
p_i	0,2	0,5	0,1	0,2

Знайдіть $M(X)$.
А. 2,4 **Б.** 2,6 **В.** 2,8 **Г.** 3

3 **7.** Тричі підкидають монету. Подія A_i – поява герба при i-му підкиданні ($i = 1; 2; 3$). Подія B – поява двох гербів. Тоді

А. $B = A_1A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3$ **Б.** $B = A_1A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2A_3$
В. $B = A_1A_2A_3$ **Г.** $B = A_1 + A_2$

8. Одночасно підкидають два гральних кубики. Випадкова величина X – кількість кубиків, на яких випала парна кількість очок. Укажіть закон розподілу випадкової величини X.

А.

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Б.

x_i	0	1	2
p_i	0,5	0,25	0,25

В.

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,25	0,5

Г.

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

9. Ймовірність витягнути білу кульку з першої коробки дорівнює 0,3, а з другої – 0,4. Із кожної коробки навмання витягнуто по одній кульці. Яка ймовірність того, що принаймні одна з них біла?

А. 0,12 **Б.** 0,7 **В.** 0,58 **Г.** 0,42

4 **10.** У коробці лежить 8 цукерок з чорного шоколаду і 2 цукерки з білого. Навмання з коробки беруть три цукерки. Яка ймовірність того, що принаймні одна з них з білого шоколаду?

А. $\frac{7}{15}$ **Б.** $\frac{8}{15}$ **В.** 0,3 **Г.** 0,2

11. Серед 15 уболівальників випадковим чином розігрують 10 квитків на змагання зі спортивної гімнастики і 5 білетів на змагання з плавання. Яка ймовірність того, що друзі Остап та Надія вболіватимуть на одних і тих самих змаганнях?

А. $\frac{1}{3}$ **Б.** $\frac{10}{21}$ **В.** $\frac{11}{21}$ **Г.** $\frac{2}{3}$

12. Яку найменшу кількість разів треба підкинути гральний кубик, щоб з ймовірністю 0,9 впевнитися в тому, що хоч одного разу з'явиться шістка?

А. 12 **Б.** 13 **В.** 14 **Г.** 15

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 19–21

1 **1.** Ймовірність того, що студент складе іспит з першої спроби, дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що він не складе іспит з першої спроби?

2. Підкидають два гральних кубики і розглядають події:
A – випадання непарної кількості очок на першому кубику;
B – випадання трійки на другому кубику.
Чи будуть події A і B у даному досліді:
1) несумісними; 2) незалежними?

3. Закон розподілу випадкової величини задано у таблиці:

x_i	0	2	4	6
p_i	a	$4a$	0,2	0,4

Знайдіть a.

2 **4.** Команда «Юпітер» у першості району з футболу може посісти перше місце з ймовірністю 0,15, друге – з ймовірністю 0,2, а третє – з ймовірністю 0,25. Знайдіть ймовірність таких подій:

1) A – команда «Юпітер» посіла місце вище третього;
2) B – команда «Юпітер» посіла місце нижче третього.

5. У ящику 6 білих кульок і 4 чорні. Два рази навмання виймають по одній кульці, не повертаючи їх назад. Знайдіть ймовірності таких подій:

1) A – обидва рази вийнято білу кульку;

2) B – другого разу вийнято білу кульку, за умови, що першого разу також вийнято білу кульку.

6. Закон розподілу випадкової величини X задано у таблиці:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,2	0,15	0,3	0,05	0,3

Знайдіть: 1) $p(X \leqslant 3)$; 2) $p(X > 2)$; 3) $p(2 \leqslant X < 4)$; 4) $M(X)$.

3 **7.** Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,7, а для другого – 0,6. Два стрільці незалежно один від одного виконують по одному пострілу в одну й ту саму мішень. Яка ймовірність того, що у мішень буде хоча б одне влучення?

8. Одночасно підкидають два гральних кубики. Випадкова величина X – кількість кубиків, на яких випало більше 4 очок. Знайдіть закон розподілу випадкової величини X.

4 **9.** Серед 20 учнів 11-го класу розігрують 12 путівок на екскурсію до Одеси і 8 – на екскурсію до Львова. Яка ймовірність того, що двоє друзів з цього класу, Олег і Катерина, попадуть на одну і ту саму екскурсію?

Додаткові завдання

3 **10.** Три рази підкидають гральний кубик. Подія A_i – випадання парної кількості очок ($i = 1; 2; 3$). Подайте у вигляді сум, добутків або сум добутків події:

1) B – поява парної кількості очок рівно на одному кубику;

2) C – поява парної кількості очок не менше ніж на одному кубику.

4 **11.** Ймовірність того, що стрілець влучить у мішень при одному пострілі, дорівнює 0,8. Скільки пострілів треба зробити, щоб з ймовірністю 0,95 стверджувати, що хоч один з пострілів був влучним?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 16

1 **1.** До яких відомих числових множин (N, Z, Q, R) належать числа:

1) $-7,3$; 2) $2\frac{1}{9}$; 3) 2π; 4) 0;

5) $\frac{e}{4}$; 6) -8; 7) 7; 8) $\sqrt{2}$?

2. Запишіть множини, назвіть їх елементи:

1) одноцифрові парні натуральні числа;

2) непарні натуральні числа, менші за 30, але більші за 20;

3) квадрати перших п'яти натуральних чисел;
4) букви слова «алгебра».

3. Множина C складається з коренів рівняння $\sin x = -2$. Що це за множина?

2

4. Які з тверджень правильні:
1) $Q \subset R$; 2) $Z \subset Q$; 3) $Z \subset N$; 4) $R \subset Z$?

5. Чи правильно, що $X \subset Y$, якщо:
1) $X = \{5\}$; $Y = \{1; 2; 5\}$; 2) $X = \{a, b\}$; $Y = \{a; c; m\}$;
3) $X = \{\triangle, \square; !\}$; $Y = \{\triangle\}$; 4) $X = \varnothing$; $Y = \{A; B; C\}$?

3

6. Множина A складається з розв'язків рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$, а множина B – з розв'язків рівняння $-0,5x^2 - x + 4 = 0$. Чи правильно, що множина A є підмножиною множини B? А навпаки?

7. Упорядкуйте елементи множини $C = \{-3; 10; 8\}$:
1) за зростанням; 2) за спаданням;
3) за зростанням їх модулів; 4) за спаданням їх модулів.
Чи є серед цих впорядкованих множин рівні впорядковані множини?

8. Запишіть усі підмножини множини $A = \{2; 3; 4; 5\}$, які містять:
1) один елемент; 2) два елементи;
3) три елементи; 4) чотири елементи.

4

9. Множина C складається з розв'язків рівняння $\cos x = -1$, а множина D – з розв'язків рівняння $\sin x = 0$. Чи правильно, що: 1) $C \subset D$; 2) $D \subset C$; 3) $C = D$?

До § 17

1

10. Обчисліть:
1) A_6^2; 2) A_3^3; 3) P_2; 4) P_7; 5) C_3^2; 6) C_7^3.

11. Утворіть усі перестановки елементів множини:
1) $C = \{\triangle; *\}$; 2) $D = \{1; 2; 3\}$.

12. Скільки п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 2; 3; 4; 5; 6, якщо цифри в числі не повторюються?

13. У кошику лежить 5 помідорів і 7 огірків. Скількома способами можна взяти з кошика:
1) один овоч; 2) один помідор і один огірок?

2

14. Скоротіть дріб: 1) $\frac{7!}{6!}$; 2) $\frac{P_3}{P_5}$; 3) $\frac{A_8^2}{A_7^3}$; 4) $\frac{C_4^3}{C_5^3}$.

15. Обчисліть:
1) $\frac{P_6 - P_5}{P_5}$; 2) $\frac{A_5^2 + A_5^3}{A_5^1}$; 3) $\frac{A_6^4}{P_4}$; 4) $C_{2012}^{2011} + C_8^1$.

16. Скількома способами можна скласти пару з однієї голосної і однієї приголосної літер у слові «циркуль»?

17. Скількома способами можна розкласти в ряд 4 олівці різного кольору?

18. Скількома способами в баскетбольній команді з 12 гравців можна вибрати капітана та його заступника?

19. Скількома способами з 9 учасників шахового гуртка можна обрати трьох для участі в турнірі?

20. Скільки можна утворити трикутників, вершинами яких є вершини правильного дванадцятикутника?

21. Гральний кубик підкидають тричі. Скільки різних послідовностей чисел можна при цьому отримати?

22. Скільки можна скласти різних трицифрових чисел, у запису яких є цифри 6; 7; 8; 9, якщо цифри в числі:

1) не повторюються; 2) можуть повторюватися?

23. Обчисліть: 1) $\frac{1}{P_7}-\frac{1}{P_6}$; 2) $\frac{1}{P_3}-\frac{16}{P_5}$.

24. Розв'яжіть рівняння: 1) $\frac{1}{12}P_{x+2}=P_x$; 2) $C_x^2=28$.

25. Скількома способами на полиці можна розставити п'ять зошитів з різних предметів так, щоб зошит з алгебри стояв посередині?

3 **26.** Скільки різних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 0; 1; 3; 5; 7, якщо в кожному числі цифри не повторюються?

27. Скількома способами 6 туристів можна розмістити в двох наметах: двомісному і чотиримісному?

28. Скількома способами можна утворити букет з 2 білих і 3 рожевих троянд, вибираючи їх з 5 білих і 7 рожевих троянд?

29. 12 учасників конференції обмінялися один з одним візитками. Скільки візиток було роздано?

30. На дошці записано число 12 345. Учень може будь-яку цифру цього числа поміняти на одну з цифр 6; 7; 8 або 9. Скільки різних чисел можна при цьому отримати?

31. Розв'яжіть нерівність:

1) $P_x > 12P_{x-2}$; 2) $A_x^2 \leqslant 42$.

4 **32.** Скільки різних послідовностей літер можна отримати, переставляючи всі літери слова:

1) алгебра; 2) колобок?

33. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0; 1; 2; 3; 4; 5, якщо цифри в числі не повторюються?

34. Скількома способами можна розфарбувати в три кольори клітинки квадрата 3×3, якщо кожним кольором зафарбовувати 3 клітинки?

35. Скільки парних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 1; 2; 3; 4; 5, якщо цифри в числі не повторюються?

36. У ящику 5 білих і 4 чорні кульки. Скількома способами з ящика можна вибрати:

1) чотири кульки;
2) чотири кульки одного кольору;
3) чотири кульки так, щоб серед них були як білі, так і чорні?

37. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

38. Скільки різних добутків, кратних числу 10, можна отримати із чисел 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17?

39. 2 книжки з алгебри і 4 з інших предметів хочуть розставити на полиці так, щоб дві книжки з алгебри не стояли поруч. Скільки є способів такої розстановки?

40. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0; 1; 3; 5; 7; 9 так, щоб у кожному була цифра 9 і цифри в числі не повторювалися?

До § 18

1 **41.** Які з даних подій випадкові, вірогідні, неможливі:

1) програти партію в шахи рівному по силі супернику;
2) підкинувши гральний кубик, отримати число 11;
3) отримати два герби при підкиданні двох монет одночасно;
4) день народження людини, яку зустріли, 1 вересня;
5) день народження людини, яку зустріли, 31 вересня;
6) витягнути олівець з коробки, у якій 6 зелених і 5 червоних олівців;
7) після 1 грудня настання 2 грудня;
8) після 2 грудня настання 1 грудня?

42. Для кожного з випробувань складіть повну групу подій:

1) підкидання грального кубика;
2) вибір олівця з коробки, у якій тільки червоні та зелені олівці;
3) перевірка деталі на якість;
4) вибір натурального числа, меншого за 5.

43. Підкидають гральний кубик. Сумісні чи несумісні такі дві події:

1) A – випала «двійка»; B – випало число, що є дільником числа 6;
2) C – випала «трійка»; D – випало парне число?

2 **44.** Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного досліду вкажіть приклад вірогідної, неможливої, випадкової події.

№ п/п	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Одночасне підкидання двох гральних кубиків			
2	Витягування квітки з букета, у якому знаходяться червоні та жовті квітки			
3	Складання трицифрового числа із цифр 1, 2, 3			
4	Кількість днів навмання обраного місяця року			

45. Відомо, що в партії з 10 000 калькуляторів трапляється 9 бракованих. Яка ймовірність того, що навмання вибраний із цієї партії калькулятор виявиться бракованим?

46. Знайдіть ймовірність події:

1) веселка, що з’явилася після дощу, має коричневий колір;

2) сума очок, що випала при підкиданні трьох гральних кубиків, менша за 19.

47. У пеналі 8 синіх і 2 чорні ручки. Яка ймовірність витягнути з пеналу:

1) синю ручку; 2) чорну ручку?

48. Із 25 учнів класу 5 взяли участь у шкільній математичній олімпіаді. Знайдіть ймовірність того, що навмання обраний учень класу:

1) брав участь в олімпіаді;

2) не брав участі в олімпіаді.

49. У ящику 20 білих, 8 чорних, 12 зелених кульок. Навмання вибирають одну з них. Яка ймовірність того, що вона:

1) біла; 2) зелена; 3) біла або чорна; 4) не біла?

50. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність події:

1) A – випаде не менше 2 очок;

2) B – випаде не більше 3 очок;

3) C – випаде число, що є дільником числа 15;

4) D – випаде просте число;

5) E – випаде складене число;

6) F – випаде число, кратне числу 3?

51. У команді з 6 шахістів двоє – майстри спорту, а інші – кандидати у майстри. Яка ймовірність того, що обидва навмання обраних шахісти цієї команди є майстрами спорту?

52. У букеті 7 білих і 14 червоних троянд. З букета виймають білу троянду і відкладають убік. Після цього з букета беруть ще одну троянду. Яка ймовірність того, що вона також біла?

53. Підкидають 2 однакові монети. Яка з подій більш ймовірна: A – монети випадуть однаковими сторонами; B – монети випадуть різними сторонами?

3 **54.** З натуральних чисел від 1 до 20 навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число складене?

55. Одночасно підкинули 2 гральних кубики. Знайдіть ймовірності таких подій:

1) сума очок на кубиках – парне число;
2) сума очок на кубиках дорівнює 5;
3) сума очок на кубиках менша за 6;
4) сума очок на кубиках не менша ніж 10.

56. У коробці 12 синіх ручок і кілька червоних. Скільки червоних ручок у коробці, якщо ймовірність витягнути навмання:

1) синю ручку дорівнює 0,8;
2) червону ручку дорівнює 0,25;
3) синю ручку більша за 0,75;
4) червону ручку менша за 0,2?

57. Є 5 карток із числами 1; 2; 4; 8; 16. Навмання обирають три з них. Яка ймовірність того, що з обраних чисел можна утворити геометричну прогресію?

58. Комп'ютер випадковим чином складає список із 7 учнів. Яка ймовірність того, що в цьому списку прізвища учнів будуть йти за алфавітом?

59. На картках записано числа від 1 до 16. Навмання беруть дві з них. Яка ймовірність того, що добуток чисел на картках дорівнюватиме 48?

60. Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове парне число буде кратним числу 3?

4 **61.** З 50 лотерейних квитків 10 виграшних. Купили два лотерейних квитки. Яка ймовірність того, що вони виграшні?

62. У коробці 7 зелених і 3 червоних олівці. Вибирають навмання три з них. Яка ймовірність того, що:

1) усі олівці зелені;
2) два олівці зелені й один червоний;
3) серед олівців є як зелені, так і червоні?

63. Одночасно підкидають два гральних кубики – білий і чорний. Яка ймовірність того, що:

1) число, яке випало на білому кубику, на 1 більше за число, яке випало на чорному;

2) модуль різниці очок, що випали на кубиках, дорівнює 3?

64. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибраний член послідовності $c_n = n^2 + 2$, де $n = 1, 2, ..., 10$, буде кратним числу 3.

65. Вибирають навмання чотири літери слова «геометрія». Яка ймовірність того, що з них можна скласти слово «метр»?

66. По черзі вибирають чотири літери слова «математика». Яка ймовірність того, що вибрані чотири літери в послідовності їх вибору складуть слово «тема»?

До § 19

1

67. Сумісні чи ні події A і B, якщо:

1) A – випадання одного очка при одноразовому підкиданні кубика; B – випадання парної кількості очок.

2) A – випадання трьох очок при одноразовому підкиданні кубика; B – випадання непарної кількості очок.

3) A – навмання назване трицифрове число кратне числу 4; B – навмання назване трицифрове число не кратне числу 4;

4) A – навмання назване натуральне число кратне числу 2; B – навмання назване натуральне число кратне числу 3?

68. Запишіть події, протилежні таким:

1) A – випадання герба при одноразовому підкиданні монети;
2) B – випадання шістки при одноразовому підкиданні кубика;
3) C – чотири влучення при чотирьох пострілах;
4) D – всі учні класу напишуть контрольну роботу на 12 балів;
5) E – на гральному кубику випаде не менше 5 очок;
6) F – одна з команд виграє футбольний матч.

69. Ймовірність того, що Микола отримає за контрольну роботу оцінку 12, дорівнює 0,05. Яка ймовірність того, що Микола не отримає за контрольну оцінку 12?

70. Ймовірність виграти у лотерею м'яч дорівнює 0,1, скакалку – 0,05, а хула-хуп – 0,04. Усі інші призи цієї лотереї не пов'язані зі спортом. Світлана придбала один лотерейний квиток. Яка ймовірність того, що вона виграє спортивний інвентар?

2

71. У букеті 5 білих, 7 червоних і 3 рожеві гвоздики. Навмання вибирають одну гвоздику. Яка ймовірність того, що вона не рожева? (Розв'яжіть задачу двома способами.)

72. У ящику 20 % кульок білого кольору, 40 % – чорного, 15 % – зеленого і 25 % – синього. Навмання з них вибирають одну кульку. Яка ймовірність того, що вона:

1) не синього кольору; 2) чорного або зеленого кольору;
3) не білого кольору; 4) не чорного і не синього кольору?

73. Петро в п'ятницю ввечері з ймовірністю 0,1 може відвідати кінотеатр, з ймовірністю 0,05 грати у футбол, а з ймовірністю 0,15 кататися на роликах, причому витратити час лише на одну з цих розваг. Яка ймовірність того, що вечір п'ятниці Петро проведе вдома?

74. Учасник лотереї з ймовірністю 0,1 виграє приз у 200 грн, з ймовірністю 0,15 – у 100 грн, і з ймовірністю 0,2 – у 50 грн. Учасник придбав один квиток. Знайдіть ймовірність події:

1) A – учасник виграє більше 50 грн;
2) B – учасник виграє менше 50 грн;
3) C – учасник виграє не менше 50 грн.

75. Серед натуральних чисел від 10 до 19 навмання вибирають одне. Розглядають події:

A – число парне;
B – число більше за 12, але менше за 16;
C – число кратне числу 3;
D – число кратне числу 5.

Поясніть, у чому полягають події:

1) $A + B$;	2) $C + D$;	3) $A + C$;	4) $B + D$;
5) $A + D$;	6) $B + C$;	7) AB;	8) AC;
9) AD;	10) BC;	11) BD;	12) CD.

3 **76.** У фізико-математичному класі 18 учнів. У шкільній олімпіаді з математики взяли участь 8 учнів (подія A), в олімпіаді з фізики – 6 учнів (подія B), а в олімпіадах і з математики, і з фізики – 4 учні (подія C). Виразіть подію C через події A і B. У чому полягають події:

1) $A + B$; 2) $\overline{A} \cdot B$; 3) $\overline{B} \cdot A$; 4) $\overline{A + B}$?

77. Кожна з цифр 7, 8 і 9 записана на окремій картці. Навмання виймають одну з них і записують отриману цифру як кількість десятків двоцифрового натурального числа. Потім картку повертають назад. Виймають навмання картку ще раз і записують зазначену на ній цифру як кількість одиниць двоцифрового натурального числа. Подія A – отримане натуральне число є парним; подія B – в отриманого числа кількість десятків більша за кількість одиниць.

1) Побудуйте простір елементарних подій даного експерименту.
2) Задайте переліком елементів події A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, AB, $A + B$, $A\overline{B}$.
3) Які з подій із пункту 2) попарно несумісні?

78. Стрілець тричі стріляє по мішені. Подія A_k – попадання при k-му пострілі (k = 1; 2; 3). Виразіть через A_k такі події:

A – точно три влучення;
B – не менше двох влучень;
C – промах не раніше, ніж при другому пострілі;
D – хоча б одне влучення.

4 **79.** Серед 22 дівчат, що відвідують секцію художньої гімнастики, 4 мають звання майстра спорту. Випадковим чином серед усіх дівчат для участі в змаганнях обирають трьох. Яка ймовірність того, що серед них принаймні одна виявиться майстром спорту?

80. Навмання вибирають шестицифрове число. Яка ймовірність того, що хоча б дві цифри в ньому однакові?

81. У ящику 5 кульок білого кольору і 10 чорного. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

82. Група з 25 школярів отримала путівки в табори відпочинку: 10 – в Одесу; 7 – у Затоку і 8 – у Лазурне. Путівки розподіляють жеребкуванням. Яка ймовірність того, що Іван і Настя з цієї групи відпочиватимуть в одному таборі?

До § 20

1 **83.** Одночасно підкидають дві монети. Розглядають події:
A – випадання герба на першій монеті;
B – випадання цифри на першій монеті;
C – випадання герба на другій монеті;
D – випадання цифри на другій монеті.
Доведіть, що незалежними є події:

1) A і C; 2) A і D; 3) B і C; 4) B і D.

2 **84.** Гральний кубик підкидають доти, доки не випаде непарне число. Знайдіть ймовірність того, що вперше воно випаде при четвертому підкиданні.

85. У шухляді 5 білих хустинок і 3 червоні. Двічі поспіль виймають по одній хустинці, не повертаючи хустинок назад до шухляди. Знайдіть ймовірність подій:

1) A – перший раз витягнуто білу хустинку, а другий – червону;
2) B – другого разу витягнуто червону хустинку за умови, що перший раз витягнуто білу.

86. У ящику 4 білі і 7 кольорових кульок. Послідовно навмання виймають дві кульки. Розглядаємо події: A – перша кулька біла; B – друга кулька кольорова. Чи незалежні події A і B, якщо:

1) після виймання першої кульки її назад не повернуть;
2) після виймання першої кульки її повернуть назад?

87. Із 7 карток розрізної абетки складено слово «функція». Картки перемішують, а потім по одній викладають зліва направо. Яка ймовірність того, що знов буде отримано слово «функція»?

88. На дев'яти картках записано цифри від 1 до 9. Картки перемішують, а потім викладають зліва направо. Яка ймовірність того, що складуть число 531?

89. У ящику 5 зелених і 6 синіх кульок. Двічі навмання виймають по одній кульці, не повертаючи їх назад. Знайдіть ймовірність події:

1) A – обидві кульки зелені;
2) B – обидві кульки сині;
3) C – другою витягнуто зелену кульку за умови, що першою витягнуто синю;
4) D – другою витягнуто синю кульку за умови, що першою витягнуто зелену.

90. Підкидають одночасно два гральних кубики. Яка ймовірність того, що:

1) на першому випала парна кількість очок, а на другому кількість очок більша за 2;

2) і на першому, і на другому випала непарна кількість очок?

91. Ймовірність влучення у мішень першим стрільцем дорівнює 0,7, другим – 0,65, а третім – 0,6. Кожний з них зробив по одному пострілу. Яка ймовірність того, що всі постріли виявляться влучними?

92. У ящику 6 білих, 3 чорні і 1 зелена кулька. Навмання двічі виймають по одній кульці і повертають їх назад. Яка ймовірність того, що:

1) обидва рази вийнято зелену кульку;
2) перший раз вийнято чорну кульку, а другий – зелену;
3) перший раз вийнято зелену кульку, а другий – чорну;
4) перший раз вийнято чорну кульку, а другий – білу або зелену?

3 **93.** Один раз підкинуто гральний кубик. Розглядають події: A – випало парне число; B – випало число, менше за 4. Знайдіть:

1) $p(A/B)$; 2) $p(B/A)$.

94. Завод виготовляє кубики синього та червоного кольорів. Ймовірність виготовлення бракованого кубика дорівнює 0,004. Синіх кубиків виготовляють $\frac{3}{4}$ від загальної кількості, решта кубиків – червоні. Яка ймовірність того, що навмання обраний кубик синій і небракований?

95. Стрілець стріляє по мішені тричі. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,7. Знайдіть ймовірність того, що влучними були лише:

1) перший і другий постріли;
2) третій постріл.

96. Двічі підкидають гральний кубик. Розглядаємо події:
A – перший раз випала кількість очок, більша за 2;
B – другий раз випала непарна кількість очок.

Знайдіть ймовірність події $\overline{A}B$.

97. Ймовірність влучного пострілу для кожного з трьох стрільців дорівнює 0,7. Усі троє по одному разу, незалежно один від одного, зробили по одному пострілу по мішені. Яка ймовірність того, що в мішень влучила хоча б одна куля?

98. Прилад складається з двох незалежних блоків. Ймовірність поломки першого блоку протягом місяця дорівнює 0,05, а другого – 0,08. Для того щоб прилад зламався, достатньо поломки хоча б одного блоку. Знайдіть ймовірність того, що протягом місяця:

1) прилад вийде з ладу;
2) прилад працюватиме без ремонту.

99. Відомо, що при підкиданні двох кубиків на першому випала парна кількість очок, а на другому – непарна. Яка ймовірність того, що сума очок на кубиках більша за 3, але менша за 11?

4 **100.** Монету підкидають доти, доки не випаде герб. Яка ймовірність того, що доведеться виконати не більше чотирьох підкидань?

101. У деяку ціль роблять n пострілів. Кожний з пострілів незалежно один від одного є влучним з ймовірністю 0,7. Для ураження цілі достатньо одного влучного пострілу. Скільки треба зробити пострілів, щоб з ймовірністю 0,99 гарантувати влучення?

102. Відомо, що при підкиданні двох гральних кубиків не випало жодної трійки. З якою ймовірністю можна стверджувати, що хоча б на одному з них випала шістка?

103. В одному ящику 2 білі, 3 чорні і 5 зелених кульок, а в іншому – 3 білі, 5 чорних і 2 зелені кульки. Навмання беруть по одній кульці з кожного ящика. Яка ймовірність того, що вони:
1) одного кольору;
2) різного кольору?

До § 21

1 **104.** Закон розподілу випадкової величини задано у таблиці:

1)

x_i	1	2	3	4	5
p_i	a	a	0,2	0,3	0,1

2)

x_i	2	4	6	8
p_i	0,1	a	$4a$	0,4

Знайдіть a.

105. Закон розподілу випадкової величини X задано у таблиці:

x_i	3	4	5	6	7	8
p_i	0,1	0,2	0,1	0,15	0,2	0,25

Знайдіть: 1) $p(X \leqslant 4)$; 2) $p(X > 4)$; 3) $p(3 \leqslant X < 5)$;
4) $p(5 < X \leqslant 8)$; 5) $p(4 \leqslant X \leqslant 5)$; 6) $p(4 < X \leqslant 7)$.

2 **106.** Знайдіть математичне сподівання випадкової величини X з попередньої задачі.

107. Проводять один дослід, у результаті якого подія A може відбутися з ймовірністю 0,9. Розглядають випадкову величину X – кількість появ події A у даному досліді. Знайдіть:
1) закон розподілу випадкової величини X;
2) математичне сподівання випадкової величини X.

3

108. Одночасно підкидають два гральних кубики. Випадкова величина X – кількість шісток, що випали. Знайдіть:

1) закон розподілу випадкової величини X;
2) $p(X \geqslant 1,5)$; 3) $p(X < 2)$; 4) $M(X)$.

109. У лотереї грають 2000 квитків, серед яких 20 квитків по 1000 грн, 50 квитків по 500 грн, 200 квитків по 100 грн. Знайдіть математичне сподівання виграшу на один білет.

4

110. На полиці стоять 3 підручники з фізики і 5 з хімії. Марічка випадковим чином бере з полиці два підручники. Випадкова величина X – кількість підручників з фізики серед взятих з полиці. Знайдіть:

1) закон розподілу випадкової величини X;
2) $p(X < 1,5)$; 3) $p(X \geqslant 1)$; 4) $p(X < 3)$; 5) $p(X > 2)$; 6) $M(X)$.

111. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по мішені. Ймовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,7, а для другого – 0,6. Випадкова величина X – сумарна кількість влучень у мішень у даному досліді. Знайдіть:

1) закон розподілу випадкової величини X; 2) $M(X)$.

Українки у світі

***Олена Степанівна Дубинчук** (1919–1994) народилася на Вінничині, у старовинному Ямполі. Любов до математики та педагогіки їй прищепив її дядько Володимир Тарасов – математик, директор школи, заслужений учитель України. Закінчивши школу відмінницею, Ольга вступила на механіко-математичний факультет Київського університету (нині КНУ імені Тараса Шевченка), а диплом уже отримувала у 1941 році під свист авіаційних бомб.*

Учителювала на Київщині, а з 1951 року й до останніх своїх днів жила інтересами НДІ педагогіки України, коло її наукових інтересів – методика навчання математики. Олена Степанівна знана у світі, адже її книжки виходили друком у Болгарії, Польщі і Росії, а українські старшокласники багато років училися за підручником з алгебри і початків аналізу, співавтором якого була Олена Степанівна.

Під керівництвом О.С. Дубинчук захистили дисертації і стали кандидатами наук 25 вихованців її наукової школи. Олені Степанівні була притаманна виняткова скромність. Насправді учнів і послідовників у Олени Степанівни було набагато більше. Вона завжди підкреслювала, що ще мало зробила в педагогічній науці, що головне – попереду. У її доробку понад 200 наукових праць.

Олену Степанівну Дубинчук за її вагомий внесок в українську педагогічну і математичну науку відзначено багатьма державними нагородами.

РОЗДІЛ 4

РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ...

- ***пригадаєте*** *основні методи розв'язування рівнянь і нерівностей, систем рівнянь і нерівностей, задач з параметрами, текстових і прикладних задач.*

§ 22. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Пригадаємо основні методи розв'язування рівнянь з однією змінною.

1. Рівносильні перетворення

Одним з найпоширеніших методів розв'язування рівнянь є *метод рівносильних перетворень*. Розглянемо два підходи цього методу.

Перший полягає в тому, що на початку розв'язування рівняння знаходимо область допустимих значень змінної в рівнянні (ОДЗ). Як правило, це певна система умов (рівнянь чи нерівностей) для змінної, тобто певні обмеження для її значень. Далі розв'язуємо рівняння залежно від його типу або вигляду відомим нам для цього виду рівнянь способом, а отримані корені перевіряємо на належність ОДЗ. Слід зазначити, що систему умов, якою ми задавали ОДЗ, особливо тоді, коли знаходження значень змінної з таких умов є досить громіздким, необов'язково розв'язувати. Достатньо лише пересвідчитися, що отримані корені задовольняють цю систему умов.

Другий підхід полягає в тому, що початкове рівняння замінюють на певну систему умов (рівнянь, нерівностей тощо), одна з яких є рівнянням-наслідком (або сукупністю рівнянь-наслідків) початкового рівняння, а всі інші умови задають ОДЗ змінної цього рівняння. Тобто суть цього підходу полягає у заміні початкового рівняння рівносильною йому системою умов (рівнянь, нерівностей тощо). Розв'язки такої системи і будуть коренями початкового рівняння.

Розглянемо обидва підходи на прикладах.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2+2x+\sqrt{-x}=3+\sqrt{-x}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \leqslant 0$. На ОДЗ рівняння рівносильне рівнянню $x^2+2x-3=0$, корені якого $x_1=-3$; $x_2=1$, причому другий корінь не задовольняє ОДЗ. Отже, -3 – єдиний корінь початкового рівняння.

Відповідь. -3.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}=2$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді: $\sqrt{5x+4}=2+\sqrt{2x-1}$, щоб обидві його частини стали невід'ємними. Метод розв'язування цього рівняння полягає в піднесенні до квадрата лівої і правої його частин, які є невід'ємними числами при всіх допустимих значеннях змінної x.

Щоб забезпечити рівносильність такого перетворення, замінимо отримане рівняння рівносильною йому системою умов, що враховує ОДЗ змінної в рівнянні. Маємо:

$$\begin{cases}(\sqrt{5x+4})^2=(2+\sqrt{2x-1})^2,\\ 5x+4\geqslant 0,\\ 2x-1\geqslant 0;\end{cases} \quad \begin{cases}5x+4=4+4\sqrt{2x-1}+2x-1,\\ x\geqslant -0,8,\\ x\geqslant 0,5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}4\sqrt{2x-1}=3x+1,\\ x\geqslant 0,5.\end{cases}$$

Рівняння $4\sqrt{2x-1}=3x+1$, у свою чергу, рівносильне системі

$$\begin{cases}(4\sqrt{2x-1})^2=(3x+1)^2,\\ 3x+1\geqslant 0.\end{cases}$$ Тому маємо систему:

$$\begin{cases}16(2x-1)=9x^2+6x+1,\\ x\geqslant -\dfrac{1}{3},\\ x\geqslant 0,5;\end{cases} \quad \begin{cases}9x^2-26x+17=0,\\ x\geqslant 0,5;\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{aligned}&x=1,\\ &x=1\dfrac{8}{9},\end{aligned}\right.\\ x\geqslant 0,5.\end{cases}$$

Оскільки обидва корені рівняння задовольняють умову $x\geqslant 0,5$, то числа 1 та $1\frac{8}{9}$ є коренями початкового рівняння.

Відповідь. 1; $1\frac{8}{9}$.

2. Метод розкладання на множники

Нехай маємо рівняння $f(x) = 0$, ліву частину якого можна розкласти на множники, тобто звести до вигляду:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0.$$

Оскільки добуток кількох множників дорівнює нулю, якщо дорівнює нулю хоча б один з множників, то далі розв'язуємо кожне з рівнянь $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$; ...; $f_n(x) = 0$ та перевіряємо, чи належать отримані корені цих рівнянь області допустимих значень змінної початкового рівняння.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$. Маємо:

$(\sin x + \sin 3x) - \sin 2x = 0$;

$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} - \sin 2x = 0;$$

$2\sin 2x\cos x - \sin 2x = 0$;

$\sin 2x(2\cos x - 1) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ 2\cos x - 1 = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2x = \pi k,\ k \in Z,\\ \cos x = \dfrac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z,\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.\end{array}\right.$$

Відповідь. $\dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

3. Уведення нової змінної

Уведення нової змінної в рівнянні, інакше кажучи, заміна змінної, один з найчастіше вживаних підходів до розв'язування рівнянь. Це зумовлене тим, що цей метод можна вдало застосувати до широкого класу рівнянь з абсолютно різних розділів математики. Його застосовують і для раціональних рівнянь вищих степенів, де введення нової змінної дає змогу понизити степінь рівняння та звести його до рівняння, що є квадратним або може бути зведене до квадратного. Заміну змінної використовують також для розв'язування тригонометричних, ірраціональних і трансцендентних (показникових, логарифмічних тощо) рівнянь. Уведення нової змінної допомагає звести ці рівняння до раціональних рівнянь, а потім і до найпростіших, у порівнянні з початковими, тригонометричних, ірраціональних або трансцендентних рівнянь (або їх сукупностей).

Пригадаємо, як застосовують цей метод, на прикладах.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2 = 81$.

Розв'язання. Якщо розкрити дужки, то отримаємо раціональне рівняння четвертого степеня.

Піднесемо другий доданок лівої частини рівняння до квадрата, отримаємо рівняння: $(x^2 - 6x)^2 - 2(x^2 - 6x + 9) = 81$.

Понизимо степінь рівняння введенням нової змінної.
Нехай $x^2 - 6x = t$. Маємо рівняння: $t^2 - 2(t + 9) = 81$, тобто $t^2 - 2t - 99 = 0$, отже, $t_1 = -9$, $t_2 = 11$. Повертаємося до заміни:
1) $t = -9$, тоді $x^2 - 6x = -9$, тобто $x^2 - 6x + 9 = 0$, отже, $x = 3$;
2) $t = 11$, тоді $x^2 - 6x = 11$, тобто $x^2 - 6x - 11 = 0$, отже, $x = 3 \pm 2\sqrt{5}$.

Відповідь. 3; $3 \pm 2\sqrt{5}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\lg^4(x + 2)^2 + \lg^2(x + 2)^3 = 25$.

Розв'язання. Маємо логарифмічне рівняння, ОДЗ: $x > -2$. Враховуючи ОДЗ, спростимо кожний з доданків лівої частини рівняння:

$\lg^4(x + 2)^2 = (\lg(x + 2)^2)^4 = (2\lg|x + 2|)^4 = 16\lg^4(x + 2)$;

$\lg^2(x + 2)^3 = (\lg(x + 2)^3)^2 = (3\lg(x + 2))^2 = 9\lg^2(x + 2)$.

Тоді отримаємо рівняння $16\lg^4(x + 2) + 9\lg^2(x + 2) - 25 = 0$.

Введемо нову змінну, щоб звести це рівняння до квадратного.

Нехай $\lg^2(x + 2) = t$, де $t \geqslant 0$, маємо рівняння: $16t^2 + 9t - 25 = 0$, звідки $t_1 = 1$; $t_2 = -\frac{25}{16}$, але t_2 не задовольняє умову $t \geqslant 0$.

Повертаємося до заміни: $\lg^2(x + 2) = 1$, звідси $\left[\begin{array}{l}\lg(x+2) = 1,\\ \lg(x+2) = -1;\end{array}\right.$

тоді $\left[\begin{array}{l}x + 2 = 10^1,\\ x + 2 = 10^{-1};\end{array}\right.$ отже, $\left[\begin{array}{l}x = 8,\\ x = -1{,}9.\end{array}\right.$ Відповідь. 8; −1,9.

4. Застосування властивостей функцій

Іноді рівняння доцільно розв'язувати, застосовуючи властивості функцій, що є лівою і правою частинами даного рівняння або рівняння, до якого його можна звести рівносильними перетвореннями.

Розглянемо приклади рівнянь та випадки, коли доцільно застосовувати властивості функцій.

Припустимо, що ОДЗ змінної в рівнянні є порожньою множиною. Тоді, враховуючи, що корені рівняння мають належати ОДЗ, доходимо висновку, що

якщо ОДЗ змінної в рівнянні є порожньою множиною, то рівняння коренів не має.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = x + 5$.

Розв'язання. ОДЗ змінної в рівнянні знайдемо із системи $\begin{cases}x - 2 \geqslant 0,\\ x - 1 \leqslant 0,\end{cases}$ тобто $\begin{cases}x \geqslant 2,\\ x \leqslant 1.\end{cases}$ Очевидно, що система не має розв'язків, отже, ОДЗ змінної в рівнянні є порожньою множиною (не містить жодного числа), тому рівняння коренів не має.

Відповідь. Коренів немає.

Припустимо, що ОДЗ змінної в рівнянні є скінченною множиною, тобто ОДЗ містить усього кілька чисел. Тоді

щоб знайти корені рівняння, достатньо в рівняння замість змінної підставити числа з ОДЗ та вибрати з них ті, що перетворять рівняння в правильну числову рівність.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}=x+1$.

Розв'язання. ОДЗ знайдемо із системи нерівностей: $\begin{cases} x^2-1 \geqslant 0, \\ 1-x^2 \geqslant 0; \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x^2 \geqslant 1, \\ x^2 \leqslant 1, \end{cases}$ звідки маємо: $x^2=1$, тобто $x_{1,2}=\pm 1$.

Отже, ОДЗ містить всього два числа. Перевіримо, чи є вони коренями рівняння.

Нехай $x=1$, тоді $\sqrt{1^2-1}+\sqrt{1-1^2} \neq 1+1$, тому 1 – не є коренем рівняння.

Нехай $x=-1$, тоді $\sqrt{(-1)^2-1}+\sqrt{1-(-1)^2}=-1+1$, тобто $0 = 0$, тому -1 – корінь рівняння.

Відповідь. -1.

Розглянемо, як розв'язувати рівняння вигляду $f(x) = g(x)$ за допомогою оцінювання лівої і правої частин рівняння.

Якщо у рівнянні $f(x) = g(x)$ для всіх $x \in$ ОДЗ маємо: $f(x) \geqslant a$, $g(x) < a$ (де a – деяке число), то рівняння не має коренів.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $|x|+1=-x^2-4x-4$.

Розв'язання. Оскільки $|x| \geqslant 0$ для $x \in R$, то $|x|+1 \geqslant 1$. З іншого боку, $-x^2-4x-4=-(x^2+4x+4)=-(x+2)^2 \leqslant 0<1$.

Отже, $|x|+1 \geqslant 1$, а $-x^2-4x-4<1$, тому рівняння коренів не має.

Відповідь. Коренів немає.

Якщо у рівнянні $f(x) = g(x)$ маємо $f(x) \geqslant a$, $g(x) \leqslant a$ для всіх $x \in$ ОДЗ, то рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$$

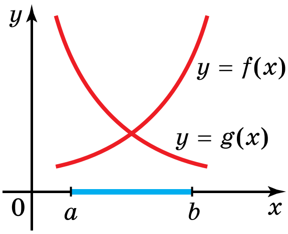
Приклад 9. Розв'язати рівняння $1-|x|=\sqrt{1+x^2}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$. Оцінимо ліву частину рівняння: $-|x| \leqslant 0$, тому $1-|x| \leqslant 1$. Оцінимо праву частину рівняння: $x^2+1 \geqslant 1$, тому $\sqrt{x^2+1} \geqslant 1$. Отже, $1-|x| \leqslant 1$ і $\sqrt{1+x^2} \geqslant 1$, тому початкове рівняння рівносильне системі рівнянь

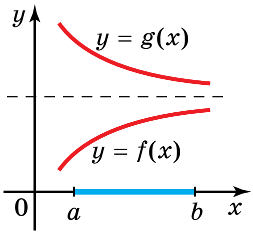
$\begin{cases} 1-|x|=1, \\ \sqrt{1+x^2}=1, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} |x|=0, \\ x^2=0, \end{cases}$ отже, $x=0$. Відповідь. 0.

Тепер пригадаємо, як розв'язати рівняння за допомогою монотонності його лівої і правої частин.

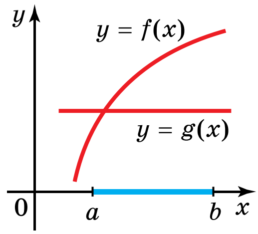
Розглянемо рівняння $f(x) = g(x)$, наприклад, за умови, що $f(x)$ – зростаюча на деякому проміжку $[a; b]$ функція, а $g(x)$ – спадна на цьому проміжку функція (або є сталою) (мал. 22.1–22.3).



Мал. 22.1



Мал. 22.2



Мал. 22.3

Тоді рівняння $f(x) = g(x)$ має єдиний розв'язок (мал. 22.1 і 22.3) або не має розв'язків взагалі (мал. 22.2). Аналогічно розв'язуємо рівняння і у випадку, коли $f(x)$ спадає на $[a; b]$, а $g(x)$ зростає на $[a; b]$ або є сталою.

Отже,

якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ одна з функцій $f(x)$ або $g(x)$ зростає на деякому проміжку, а інша – спадає на цьому проміжку або одна з функцій є монотонною, а інша – сталою, то рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня на цьому проміжку.

Часто коренем такого рівняння є ціле число, яке можна знайти підбором.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = \dfrac{4}{x+3}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \geqslant 0$. Функція $f(x) = \sqrt{x}$ зростає на $[0; +\infty]$, а $g(x) = \dfrac{4}{x+3}$ – спадає на $[0; +\infty]$ (самостійно схематично накресліть графік функції $g(x)$, щоб впевнитися в цьому). Тому рівняння $\sqrt{x} = \dfrac{4}{x+3}$ має не більше як один корінь. Легко пересвідчитися, що число 1 – корінь рівняння, бо $\sqrt{1} = \dfrac{4}{1+3}$, тому інших коренів немає.

Відповідь. 1.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $3^x + 4^x = 5^x$.

Розв'язання. Очевидно, що число 2 є коренем рівняння (справді, $3^2 + 4^2 = 5^2$). Залишається з'ясувати, чи має це рівняння інші корені.

Поділимо ліву і праву частини рівняння на $5^x \neq 0$. Отримаємо:
$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Функція $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ – спадна на R, як сума двох спадних функцій $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ і $y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$, а функція $y = 1$ є сталою. Тому пряма $y = 1$ і графік функції $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ можуть перетнутися на R не більше як в одній точці, а тому початкове рівняння може мати не більше як один корінь. Отже, 2 – єдиний корінь початкового рівняння.

Відповідь. 2.

5. Рівняння, що містять знак модуля

Спочатку розглянемо найпростіші рівняння, що містять знак модуля. Найпростішим будемо вважати рівняння, яке за означенням модуля легко замінити йому рівносильним рівнянням (або сукупністю рівнянь), що не містить знаків модуля.

Як розв'язати рівняння вигляду $|f(x)| = a$, де $a \in R$, нагадаємо за допомогою схеми.

Рівняння вигляду $|f(x)| = a$, $a \in R$

$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$	$f(x) = 0$	**коренів немає**

Приклад 12. Розв'язати рівняння $|x^2 + 7x| = 8$.

Розв'язання. Оскільки $8 > 0$, то рівняння рівносильне сукупності рівнянь: $\left[\begin{array}{l} x^2 + 7x = 8, \\ x^2 + 7x = -8. \end{array}\right.$ Маємо сукупність двох квадратних рівнянь: $\left[\begin{array}{l} x^2 + 7x - 8 = 0, \\ x^2 + 7x + 8 = 0. \end{array}\right.$

Коренями першого з них є числа 1 і –8, а другого – числа $\frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Відповідь. $1;\ -8;\ \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Рівняння вигляду $|f(x)| = |g(x)|$ теж є найпростішим.

Очевидно, що рівність $|a| = |b|$ справджується для кожного з випадків $a = b$ та $a = -b$.

Рівняння $|f(x)| = |g(x)|$ рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Приклад 13. Розв'язати рівняння $|x - 1| = |2x + 1|$.

Розв'язання. Маємо: $\left[\begin{array}{l} x - 1 = 2x + 1, \\ x - 1 = -(2x + 1); \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 0. \end{array}\right.$

Відповідь. -2; 0.

Рівняння вигляду $|f(x)| = g(x)$ теж можна вважати найпростішим.

Оскільки ліва частина рівняння $|f(x)| = g(x)$ є невід'ємною, то й права частина має бути невід'ємною, тобто, щоб рівняння мало розв'язки, має справджуватися умова $g(x) \geqslant 0$. Тоді за цієї умови $f(x) = g(x)$ або $f(x) = -g(x)$.

Рівняння $|f(x)| = g(x)$ рівносильне системі

$$\left\{\begin{array}{l} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Приклад 14. Розв'язати рівняння $|x + 1| = 2x - 4$.

Розв'язання. Маємо:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 4 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x + 1 = 2x - 4, \\ x + 1 = 4 - 2x; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = 1; \end{array}\right. \end{array}\right. \text{ отримаємо, що } x = 5.$$

Відповідь. 5.

Тепер розглянемо більш складні рівняння. Це, як правило, рівняння, що містять суму кількох доданків, всі або деякі з яких містяться під знаком модуля. Наприклад, рівняння вигляду $|f(x)| \pm |g(x)| = h(x)$, $|f(x)| \pm |g(x)| = |h(x)|$ тощо.

Щоб розв'язати таке рівняння, треба замінити його рівносильним, що не містить знаків модуля. Звільнитися від знаків модуля в таких рівняннях можна за алгоритмом, який ще називають *методом інтервалів для розкриття модуля*. Така назва пов'язана з тим, що розкривають знак модуля на проміжках знакосталості функцій, що містяться під знаком модуля.

Отже, згадані рівняння можна розв'язати за таким алгоритмом, що включає і метод інтервалів для розкриття модуля.

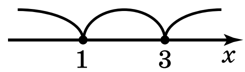
1) Знайти ОДЗ змінної в рівнянні.
2) Знайти нулі кожної з функцій, що міститься під знаком модуля (інакше кажучи, нулі підмодульних виразів).
3) Позначити нулі підмодульних виразів на ОДЗ, тим самим поділивши ОДЗ на проміжки знакосталості кожної з підмодульних функцій.
4) На кожному з проміжків розкрити знаки модуля і отримати рівняння-наслідок початкового рівняння. Розв'язати кожне з отриманих рівнянь. Корені, які не належатимуть проміжку, на якому розглядаємо рівняння, вилучаємо, бо для початкового рівняння вони є сторонніми.
5) Записуємо відповідь.

Як розв'язати рівняння за цим алгоритмом, розглянемо на прикладі.

Приклад 15. Розв'язати рівняння $|x-1|+|2x-6|=3$.

Розв'язання. 1) ОДЗ: $x \in R$.

2) Знайдемо нулі підмодульних виразів: $\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ 2x-6=0; \end{array}\right.$ отже, $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ – нулі підмодульних виразів.



Мал. 22.4

3) Позначимо точками числа 1 і 3 на числовій осі, отримаємо три проміжки: $(-\infty; 1]$, $(1; 3]$, $(3; +\infty)$ (мал. 22.4).

4) Якщо $x \in (-\infty; 1]$, то $x-1 \leqslant 0$, тому $|x-1|=-(x-1)$; $2x-6<0$, тому $|2x-6|=-(2x-6)$. Отже, на проміжку $(-\infty; 1]$ маємо рівняння: $-(x-1)-(2x-6)=3$, з якого $x=1\frac{1}{3}$.

Але $1\frac{1}{3} \notin (-\infty; 1]$, а тому не є коренем початкового рівняння.

Якщо $x \in (1; 3]$, то $x-1>0$, тому $|x-1|=x-1$; $2x-6 \leqslant 0$, тому $|2x-6|=-(2x-6)$. Отже, на проміжку $(1; 3]$ маємо рівняння: $x-1-(2x-6)=3$, з якого $x=2$. Оскільки $2 \in (1; 3]$, то є коренем початкового рівняння.

Якщо $x \in (3; +\infty)$, то $x-1>0$, тому $|x-1|=x-1$; $2x-6>0$, тому $|2x-6|=2x-6$. Отже, на проміжку $(3; +\infty)$ маємо рівняння: $x-1+2x-6=3$, з якого $x=3\frac{1}{3}$.

Оскільки $3\frac{1}{3} \in (3; +\infty)$, то є коренем початкового рівняння.

Отже, рівняння має два корені: 2 і $3\frac{1}{3}$.

Відповідь. 2; $3\frac{1}{3}$.

6. Розв'язування текстових і прикладних задач за допомогою рівнянь

Раніше ми вже розглядали рівняння як математичні моделі текстових і прикладних задач. Наприклад, ми розглядали задачі, математичними моделями яких у 7 класі були лінійні рівняння або їх системи, у 8 класі – квадратні рівняння або ті, що зводяться до них, у 9 класі – системи рівнянь з двома змінними.

Пригадаємо алгоритм математичного моделювання задачі за допомогою рівняння:

1) позначити змінною одну з невідомих величин;
2) інші невідомі величини (якщо вони є) виразити через введену змінну;
3) за умовою задачі встановити співвідношення між невідомими та відомими значеннями величин і скласти рівняння;
4) розв'язати одержане рівняння;
5) проаналізувати розв'язки рівняння і знайти невідому величину, а за потреби і значення інших невідомих величин;
6) записати відповідь до задачі.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 16. На свій день народження сестрички-близнючки Наталя й Олена отримали 127 вітальних SMS-повідомлень, причому Наталя отримала на 13 повідомлень більше, ніж Олена. По скільки SMS-повідомлень на свій день народження отримала кожна із сестричок?

Розв'язання. Нехай Олена отримала x повідомлень, тоді Наталя – $(x + 13)$. А обидві разом – $(x + x + 13)$ повідомлень, що за умовою дорівнює 127. Маємо рівняння: $x + x + 13 = 127$. Тоді $x = 57$. Отже, Олена отримала 57 повідомлень.
$57 + 13 = 70$ (повід.) – отримала Наталя.

Відповідь. 70 повідомлень; 57 повідомлень.

Приклад 17. З Кропивницького до Кам'янець-Подільського, відстань між якими 560 км, виїхали одночасно легковик і вантажівка. Швидкість легковика була на 10 км/год більшою за швидкість вантажівки, тому він прибув до пункту призначення на 1 год раніше від вантажівки. Знайти швидкість вантажівки і швидкість легковика.

Розв'язання. Нехай швидкість вантажівки x км/год. Систематизуємо умову задачі у вигляді таблиці:

	s, км	v, км/год	t, год
Вантажівка	560	x	$\frac{560}{x}$
Легковик	560	$x + 10$	$\frac{560}{x+10}$

Оскільки значення величини $\frac{560}{x+10}$ на 1 год менше від значення величини $\frac{560}{x}$, то маємо рівняння: $\frac{560}{x+10}+1=\frac{560}{x}$.
Коренів у нього два: $x_1 = 70$, $x_2 = -80$, але x_2 не відповідає змісту задачі, тому розв'язком задачі є лише x_1, отже, швидкість вантажівки 70 км/год. Тоді швидкість легковика 70 + 10 = 80 (км/год).

В і д п о в і д ь. 70 км/год; 80 км/год.

Приклад 18. Майстер і його учень, працюючи разом, можуть виконати певну роботу за 8 год. За скільки годин може виконати цю саму роботу кожен з них самостійно, якщо майстру на це потрібно на 12 год менше, ніж його учню?

Р о з в' я з а н н я. Нехай майстру, щоб виконати повну роботу самостійно, потрібно x год, тоді учню – (x + 12) год. Коли обсяг роботи в задачах на роботу не конкретизовано (як у даному випадку), його прийнято позначати одиницею. Нагадаємо, що *продуктивність праці* – це обсяг роботи, який може бути виконаний за одиницю часу. Тоді за 1 год майстер виконає $\frac{1}{x}$ частину роботи, а його учень – $\frac{1}{x+12}$ частину, це і є їх продуктивність праці. За умовою задачі майстер і учень пропрацювали 8 год, тому майстер виконав $8\cdot\frac{1}{x}=\frac{8}{x}$ частину роботи, а його учень – $8\cdot\frac{1}{x+12}=\frac{8}{x+12}$. Враховуючи, що вони виконали весь обсяг роботи, маємо рівняння:
$\frac{8}{x}+\frac{8}{x+12}=1$, коренями якого є числа: $x_1 = 12$, $x_2 = -8$.
Другий корінь не відповідає змісту задачі, оскільки є від'ємним. Отже, майстер, працюючи окремо, може виконати роботу за 12 год, а його учень – за 12 + 12 = 24 (год).
Умову цієї задачі, як і попередньої, можна також систематизувати в таблицю:

	Час для самостійного виконання, год	Продуктивність праці	Фактично витрачений час, год	Обсяг виконаної роботи
Майстер	x	$\frac{1}{x}$	8	$\frac{8}{x}$
Учень	$x + 12$	$\frac{1}{x+12}$	8	$\frac{8}{x+12}$

В і д п о в і д ь. 12 год і 24 год.

Зверніть увагу, що умови більшості задач на рух або роботу можна систематизувати в таблицю, що допоможе уникнути громіздких текстових записів.

● Як розв'язують рівняння за допомогою рівносильних перетворень? ● Коли для розв'язування рівняння використовують метод розкладання на множники? ● У яких випадках зручно використовувати метод заміни змінної? ● Як при розв'язуванні рівняння використовують його ОДЗ; що є порожньою або скінченною множиною? ● Як при розв'язуванні рівнянь використовують властивості функцій? ● Як розв'язувати рівняння з модулем? ● Якої послідовності слід дотримуватися, розв'язуючи задачу за допомогою рівняння?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

Розв'яжіть рівняння (**22.1–22.36**):

1

22.1. 1) $4x = 8$; 2) $-2x = \frac{1}{3}$; 3) $4x = -16$; 4) $-8x = -32$.

22.2. 1) $2x = -6$; 2) $-3x = -\frac{1}{6}$; 3) $12x = 24$; 4) $-5x = 20$.

22.3. 1) $2(x - 1) + 3 = 4x$; 2) $5(x + 3) - 7 = 2(x - 2)$.

22.4. 1) $3(x + 1) - 3 = 5x$; 2) $4(x - 3) - 9 = -(x + 3)$.

22.5. 1) $|x| = 5$; 2) $|x| = -7$; 3) $\sqrt{x} = 2$; 4) $\sqrt{x} = -1$.

22.6. 1) $|x| = -1$; 2) $|x| = 4$; 3) $\sqrt{x} = -3$; 4) $\sqrt{x} = 7$.

22.7. 1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$; 4) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

22.8. 1) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} x = -1$.

22.9. 1) $2^x = 8$; 2) $4^{x-1} = 16$; 3) $7^{x+2} = 1$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \frac{1}{27}$.

22.10. 1) $5^x = 25$; 2) $3^{x+1} = 81$; 3) $5^{x-3} = 1$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = \frac{1}{32}$.

22.11. 1) $\log_3 x = -1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$; 3) $\log_5(x - 1) = 0$; 4) $\lg(x + 3) = 1$.

22.12. 1) $\log_5 x = 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = -1$; 3) $\log_7(x + 1) = 0$; 4) $\lg(x - 2) = 2$.

2

22.13. 1) $8x^2 - 16 = 0$; 2) $4x^2 - 3x = 0$;

3) $3x^2 + 2x - 5 = 0$; 4) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;
5) $x^2 - 4x + 1 = 0$; 6) $x^2 + 2x - 7 = 0$.

22.14. 1) $3x^2 - 9 = 0$; 2) $7x^2 + 5x = 0$;
3) $4x^2 + 3x - 7 = 0$; 4) $25x^2 + 10x + 1 = 0$;
5) $x^2 + 4x - 1 = 0$; 6) $x^2 - 2x + 7 = 0$.

22.15. 1) $x^2 + 5x = -6$; 2) $1 - 4x = 5x^2$;
3) $x(x + 2) = 8$; 4) $(x + 1)^2 = x + 3$.

22.16. 1) $x^2 + 7 = -8x$; 2) $7x = x^2 + 12$;
3) $x(x - 2) = 4$; 4) $(x - 1)^2 = 2x - 2$.

22.17. 1) $|x-2| = 3$; 2) $|3x-7| = 1$; 3) $|x+2| = |3x-7|$;
4) $|x-3| = |5x+11|$; 5) $|x+1| = 3-x$; 6) $|x-7| = \frac{1}{6}x$.

22.18. 1) $|x+5| = 9$; 2) $|4x-9| = 3$; 3) $|x-7| = |2x-9|$;
4) $|x+1| = |2x-13|$; 5) $|x-1| = 5-x$; 6) $|x-5| = \frac{1}{4}x$.

22.19. 1) $\sqrt[7]{x+2} = \sqrt[7]{x^2+2}$; 2) $\sqrt{x} = \sqrt{x^2-6}$;
3) $\sqrt{2-x} = 4+x$; 4) $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - 3 = 0$.

22.20. 1) $\sqrt[5]{x^2-3} = \sqrt[5]{x-3}$; 2) $\sqrt{x} = \sqrt{x^2-12}$;
3) $\sqrt{1-x} = 5+x$; 4) $\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x} - 2 = 0$.

22.21. 1) $\sin 4x = 1$; 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$;
3) $\operatorname{tg} 3x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

22.22. 1) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$;
3) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$; 4) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

22.23. 1) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x - 2 = 0$.

22.24. 1) $2\cos^2 - \cos x - 1 = 0$; 2) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

22.25. 1) $2\cos^2 x + 2\sin x = 2,5$; 2) $\cos 2x + 10\cos x - 11 = 0$.

22.26. 1) $2\sin^2 x - 2\cos x = 2,5$; 2) $\cos 2x + 6\cos x + 5 = 0$.

22.27. 1) $\sin 6x - \sin 4x = 0$; 2) $\sin 2x - 2\cos x = 0$.

22.28. 1) $\cos 6x + \cos 2x = 0$; 2) $2\sin x + \sin 2x = 0$.

22.29. 1) $2^{x+2} \cdot 5^{x+2} = 2^{3x} \cdot 5^{3x}$; 2) $3^{x-3} + 3^x = 28$.

22.30. 1) $3^{x+3} \cdot 7^{x+3} = 3^{2x} \cdot 7^{2x}$; 2) $2^{x+2} - 2^x = 24$.

22.31. 1) $4^x + 2^x - 6 = 0$; 2) $5^{2x} + 2 \cdot 5^x - 3 = 0$.

22.32. 1) $9^x - 3^x - 6 = 0$; 2) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

22.33. 1) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}} = 4^{-x} \cdot 8^{-4}$; 2) $7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 5$.

22.34. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{7-x^2}{2}} = 27^{2x}$; 2) $5^x - 15 \cdot 5^{-x} = 2$.

22.35. 1) $\log_9 \frac{x}{1+x} = \log_9(x-1)$; 2) $\log_2^2 x - 4\log_2 x - 5 = 0$.

22.36. 1) $\log_7 \frac{x+1}{x} = \log_7 \frac{x}{2-x}$; 2) $\log_3^2 x + \log_3 x - 6 = 0$.

22.37. У двох цистернах разом 62 т пального, причому в першій на 4 т менше, ніж у другій. Скільки тонн пального в кожній цистерні?

22.38. В автопарку вантажівок у 6 разів більше, ніж легковиків. Скільки легковиків в автопарку, якщо їх разом з вантажівками налічується 98?

22.39. Бабуся ліпила вареники протягом двох годин. За другу годину вона виліпила на 10 % більше вареників, ніж за першу. Скільки вареників виготовила бабуся за першу годину і скільки за другу, якщо за другу годину вона виліпила на 6 вареників більше, ніж за першу?

22.40. За пральну машину та її встановлення і підключення заплатили 8820 грн. Вартість встановлення і підключення становить 5 % від вартості машини. Скільки коштує пральна машина?

22.41. За 1 год мотоцикліст долає таку саму відстань, що й велосипедист за 2,5 год. Швидкість мотоцикліста на 27 км/год більша за швидкість велосипедиста. Знайдіть швидкість кожного з них.

22.42. Ящик з апельсинами на 2,5 кг важчий, ніж ящик з лимонами. Яка маса кожного з них, якщо маса чотирьох ящиків з апельсинами така сама, як маса п'яти ящиків з лимонами?

3 Розв'яжіть рівняння (**22.43–22.48**):

22.43. 1) $\frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x-2} = 0$; 2) $\frac{6}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} = \frac{4}{x^2-6x+9}$;

3) $\frac{x+6}{x+1} + \frac{x-5}{x-3} = 1$; 4) $\frac{3x+2}{x+1} + \frac{x+4}{x-3} = \frac{3x^2+1}{x^2-2x-3}$.

22.44. 1) $\frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x+1} = 0$; 2) $\frac{3}{x^2+4x+4} - \frac{1}{x-2} = \frac{4}{4-x^2}$;

3) $\frac{3x+6}{x} + \frac{x-5}{x-2} = 3$; 4) $\frac{2x+7}{x+4} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{x^2+3x-4}$.

22.45. 1) $x|x| + 5x - 4 = 0$; 2) $\frac{x^3}{|x|} + 2x + 1 = 0$.

22.46. 1) $x|x| + 4x - 3 = 0$; 2) $\frac{x^3}{|x|} + 3x + 2 = 0$.

22.47. 1) $x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0$; 2) $x^2 - 2|x + 1| - 3x - 5 = 0$.

22.48. 1) $x^2 + 4x + |x + 1| + 3 = 0$; 2) $x^2 - 4|x + 1| + 5x + 3 = 0$.

22.49. Знайдіть усі корені рівняння $|x^2 + 2x - 5| = \frac{x - 1}{2}$, що задовольняють умову $x < \sqrt{2}$.

22.50. Знайдіть усі корені рівняння $2x - 1 = |x^2 + x - 1|$, що задовольняють умову $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій (**22.51–22.52**):

22.51. 1) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = x^2 + 1$; 2) $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - x^2} = x + 2$.

22.52. 1) $\sqrt{-x} + \sqrt{x} = 4x$; 2) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{9 - x^2} = x - 3$.

Розв'яжіть рівняння (**22.53–22.54**):

22.53. 1) $\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[8]{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{3 + x} + \sqrt{x} = 3$.

22.54. 1) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$; 2) $\sqrt{8 - x} + \sqrt{-x} = 4$.

Знайдіть суму усіх коренів рівняння (**22.55–22.56**):

22.55. $\sqrt{3x + 4}(9x^2 + 21x + 10) = 0$.

22.56. $\sqrt{5x + 3}(5x^2 - x - 4) = 0$.

Розв'яжіть рівняння (**22.57–22.74**):

22.57. 1) $\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{12}\right)} = 3$; 2) $\frac{14}{3 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = 7$.

22.58. 1) $\frac{4}{\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)} = -4$; 2) $\frac{16}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1} = 8$.

22.59. 1) $\cos x - \cos 3x = \sin x$; 2) $\sin 2x = 1 - \cos 4x$.

22.60. 1) $\cos 3x + \cos 5x = \cos x$; 2) $\cos 2x = 1 + \cos 4x$.

22.61. $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0$.

22.62. $\cos 6x - \cos 2x + \sin 6x - \sin 2x = 0$.

22.63. $6\sin^2 x = 5 - 2\sin 2x$. **22.64.** $2(\sin^2 x + \sin 2x) = 3$.

22.65. 1) $3^{x+2} \cdot 2^{x-1} = 162$; 2) $5^{|2x+1|} = (\sqrt{5})^{3-4x}$.

22.66. 1) $2^{x+1}\cdot 5^{x-2}=80$; 2) $7^{|2x-1|}=(\sqrt{7})^{4x+3}$.

22.67. 1) $2^x-2^{3-x}=2$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}=2^{5-x}+9$;

3) $\frac{9}{2^{x-2}}=\frac{10+4^{\frac{x}{2}}}{4}$; 4) $\frac{3^{2x}}{100^x}=2\cdot(0,3)^x+3$.

22.68. 1) $3^x-3^{2-x}=8$; 2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{x-2}=6^{5-x}-12$;

3) $4^{x-2}=3+2^{x-2}$; 4) $\frac{16^x}{10^{2x}}-4=3\cdot(0,4)^x$.

22.69. 1) $\log_5(2\cdot 5^x+75)=x+1$; 2) $\log_2(7+2^{-x})=x+3$.

22.70. 1) $\log_3(5\cdot 3^x-18)=x+1$; 2) $\log_2(2^x-7)=3-x$.

22.71. 1) $2\log_8(1-x)=\log_8(1-4x)$; 2) $\log_2(x+4)=2\log_2\sqrt{x}+5$;

3) $2\log_7(x-2)=\log_7(x-10)^2-2$;

4) $2\lg(x+0,5)-\lg(x-1)=\lg(x+2,5)+\lg 2$.

22.72. 1) $2\log_5(x+1)=\log_5(2x+1)$; 2) $2\log_3\sqrt{x}+\log_3(x+6)=3$;

3) $2\log_2(x-7)+2=\log_2(x-13)^2$;

4) $2\lg(0,5+x)=\lg(1-x)+\lg(1,5-x)+\lg 2$.

22.73. 1) $2\log_2^2 x-3\log_2\frac{x}{4}-11=0$;

2) $\log_3(2x+1)=2\log_{2x+1}3+1$.

22.74. 1) $2\log_3^2 x-7\log_3(3x)+3=0$;

2) $\log_2(9x-1)+3\log_{9x-1}2+4=0$.

22.75. Чи можна 68 банок консервів розкласти у три ящики так, щоб у другому було вдвічі більше банок, ніж у першому, а в третьому – на 3 банки менше, ніж у першому?

22.76. Чи можна 90 книжок розмістити на трьох полицях так, щоб на третій було на 3 книжки більше, ніж на другій, і на 5 книжок менше, ніж на першій?

22.77. На одній ділянці кущів аґрусу втричі більше, ніж на другій. Якщо з першої ділянки пересадити 18 кущів на другу, то кущів аґрусу на обох ділянках стане порівну. По скільки кущів аґрусу росте на кожній ділянці?

22.78. У двох мішках цукру було порівну. Після того як з першого мішка пересипали 12 кг у другий, у першому мішку стало вдвічі менше цукру, ніж у другому. По скільки кілограмів цукру було в кожному мішку спочатку?

22.79. Чисельник звичайного нескоротного дробу на 1 менший від знаменника. Якщо від чисельника відняти 7, а від знаменника відняти 5, то дріб зменшиться на 0,5. Знайдіть цей дріб.

22.80. Знаменник звичайного нескоротного дробу на 5 більший за чисельник. Якщо знаменник збільшити на 6, а чисельник збільшити на 4, то дріб зменшиться на 0,25. Знайдіть цей дріб.

22.81. З міста в село, відстань між якими 48 км, виїхали одночасно два велосипедисти. Швидкість одного з них була на 4 км/год більшою, ніж швидкість другого, і тому він прибув у село на 1 год раніше від другого. Знайдіть швидкість кожного з велосипедистів.

22.82. З міста A в місто B, відстань між якими 560 км, одночасно виїхали дві автівки. Швидкість однієї з них на 10 км/год більша за швидкість другої, і тому вона прибула у місто B на 1 год раніше, ніж друга. Знайдіть швидкість кожної з автівок.

22.83. Човен, власна швидкість якого 18 км/год, проплив 40 км за течією і 16 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Знайдіть швидкість течії, якщо вона менша за 4 км/год.

22.84. Відстань між двома пристанями 48 км. На човні шлях туди і назад можна подолати за 7 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

22.85. Дві бригади шляховиків мали заасфальтувати по 300 м^2 дорожнього полотна, причому перша бригада за день асфальтувала на 10 м^2 більше, ніж друга, і тому виконала завдання на 1 день раніше за другу. Скільки м^2 дорожнього полотна щодня асфальтувала кожна з бригад?

22.86. Для перевезення 60 т вантажу замовили деяку кількість вантажівок. Оскільки на кожну завантажили на 1 т більше, ніж планували, то 2 вантажівки виявилися зайвими. Скільки вантажівок було використано для перевезення вантажу?

22.87. Майстер і його учень, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 8 год. За скільки годин виконає це саме замовлення кожен з них самостійно, якщо майстру на це потрібно на 12 год менше, ніж його учню?

22.88. Два малярі, працюючи разом, можуть пофарбувати стіни певної будівлі за 20 год. За скільки годин може виконати цю роботу кожний з малярів самостійно, якщо одному з них для цього потрібно на 9 год більше, ніж іншому?

4 Розв'яжіть рівняння (**22.89–22.92**):

22.89. 1) $((x-1)^2-3)(x^2-2x-4)=8$;

2) $(x^2-x+1)^2-8x^2+8x-1=0$.

22.90. 1) $((x+1)^2-2)(x^2+2x-3)=3$;

2) $(x^2+x-1)^2-4x^2-4x-1=0$.

22.91. $(\sqrt{x-1}-2)(x^4-10x^2+9)=0$.

22.92. $(\sqrt{x-2}-1)(x^4-13x^2+36)=0.$

Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій (**22.93–22.94**):

22.93. 1) $|x|+1=\sqrt{1-x^2}$; 2) $3-\sqrt{x^2-1}=\sqrt{9+(x-1)^2}$.

22.94. 1) $1-\sqrt{x}=\sqrt{x^2+1}$; 2) $2+|x^2-1|=\sqrt{4-(x+1)^2}$.

Розв'яжіть рівняння (**22.95–22.96**):

22.95. 1) $|x+2|-|2x-6|=2$; 2) $|x+3|+|x-1|=4$.

22.96. 1) $|x-3|-|2x+2|=2$; 2) $|x-2|+|x+3|=5$.

Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій (**22.97–22.98**):

22.97. 1) $\sqrt{x}=\dfrac{12}{x+2}$; 2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=3$.

22.98. 1) $\sqrt{x}=\dfrac{5}{x+4}$; 2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=5$.

Розв'яжіть рівняння (**22.99–22.124**):

22.99. $\dfrac{|x-3|}{|x-2|-1}=1$. **22.100.** $\dfrac{|x+3|}{|x+2|-1}=1$.

22.101. 1) $\sqrt{5-3x}+\sqrt{1-2x}=\sqrt{4-x}$; 2) $\sqrt{x^2+2x+5}+x^2+2x=1$.

22.102. 1) $\sqrt{7-2x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{4-x}$; 2) $\sqrt{x^2-x+7}+x^2-x=5$.

22.103. $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$.

22.104. $(x+2)\sqrt{16x+33}=(x+2)(8x-15)$.

22.105. $3^x+7^x=10^x$. **22.106.** $2^x+3^x=5^x$.

22.107. 1) $5-\log_2 x=8\sqrt{\log_{16} x}$; 2) $\dfrac{\log_5(2x^2+x)}{\log_7(1-2x)}$.

22.108. 1) $4-\log_3 x=6\sqrt{\log_{81} x}$; 2) $\dfrac{\log_4(3x^2+2x)}{\log_3(x+2)}=0$.

22.109. 1) $\sqrt{x}+\dfrac{2x+1}{x+2}=2$; 2) $\cos 3x+\cos\dfrac{5x}{2}=2$;

3) $\cos 6x+\sin\dfrac{5x}{2}=2$; 4) $\cos^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)=0$.

22.110. 1) $\cos 2x+\cos\dfrac{3x}{4}=2$; 2) $\sin 6x-\sin 2x=2$.

22.111. $\sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos x-1}=-\sin x$.

22.112. $\sqrt{5+7\cos x}=\sqrt{2}\sin x$.

22.113. 1) $(3\log_{27}(27x))\log_3 x = 2(\log_3 x + 1)$;

2) $\log_x^2 \sqrt{5} + \log_x \dfrac{1}{125} = \dfrac{11}{8}$.

22.114. 1) $(2\log_{49} x)\log_7 7x = 3 - \log_7 x$;

2) $\log_x \sqrt{3} - \log_{x^2} 27 = 0,5$.

22.115. $\log_3(2\cos x - \sin x) + \log_3 \sin x + \log_3 2 = 0$.

22.116. $\log_5(2\sin x - \cos x) + \log_5 \cos x + \log_5 2 = 0$.

22.117. $\big||3 - x| - x + 1\big| + x = 6$.

22.118. $\big|x - 2 - |4 - x|\big| + x = 7$.

22.119. $\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$.

22.120. $\sqrt{3x^2 + 6x - 2} - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3x^2 + 8x + 4} - \sqrt{x^2 - 3x - 10}$.

22.121. $\sin\left(\dfrac{1}{2\cos x}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

22.122. $\sin\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

22.123. $\log_7\left(\cos\dfrac{x}{2} + 3\operatorname{tg} x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \log_{\frac{1}{7}}\left(\cos\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg} 2x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

22.124. $\log_{\frac{1}{11}}\left(\sin\dfrac{x}{2} - 3\operatorname{tg} x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \log_{11}\left(\sin\dfrac{x}{2} - \operatorname{tg} 2x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

22.125. 60 кг макулатури вберігають від вирубки одне дерево. З 1 т макулатури можна виготовити 2500 зошитів і при цьому зекономити 200 м^3 води. Учні школи зібрали на весняній толоці 1,2 т макулатури. Знайдіть:

1) скільки дерев вберегли учні від вирубки;
2) скільки зошитів можна виготовити з цієї макулатури;
3) скільки води буде при цьому зекономлено?

22.126. Для яких натуральних значень n, $n \geqslant 2$, рівняння $\sin x + \cos x = \sqrt[n]{n}$ має корені?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

Розв'яжіть нерівність **(22.127–22.129)**:

22.127. 1) $2x \geqslant -8$; 2) $-3x < -12$; 3) $\dfrac{1}{4}x > 7$; 4) $-5x \leqslant 20$.

22.128. 1) $2(x - 1) + 4x \geqslant 6x + 3$; 2) $x + 2 - (x - 13) \geqslant 15$.

22.129. 1) $x^2 - 9 \geqslant 0$; 2) $2x^2 + 3x < 0$;
3) $3x^2 + 2x - 5 > 0$; 4) $x^2 - 4x - 5 \leqslant 0$;
5) $x^2 + x + 7 \geqslant 0$; 6) $x^2 - x + 1 < 0$.

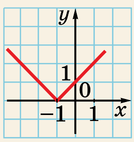
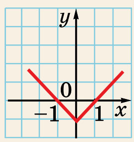
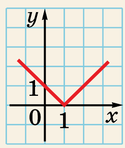
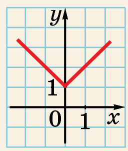
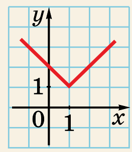
22.130. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x+1 \geqslant 3, \\ 2x-3>5, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-1 \geqslant 5, \\ 4x+1>-11. \end{cases}$

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 22

1. На якому з малюнків зображено графік функції $y = |x - 1|$?

А	Б	В	Г	Д
				

2. Маємо певну кількість слив. Якщо їх розкласти в купки по 3 сливи, то 2 сливи залишиться. А якщо їх розкласти в купки по 5 слив, то зайвих слив не залишиться. Про яку кількість слив може йти мова?

А	Б	В	Г	Д
41	40	30	35	44

3. Огірки подешевшали на 20 %. На скільки відсотків більше можна купити огірків на ту саму суму грошей?

А	Б	В	Г	Д
40 %	25 %	20 %	10 %	$\frac{1}{5}$ %

4. Обчисліть $(\sin 75° - \cos 75°)^2$.

А	Б	В	Г	Д
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5} 7 < \log_{0,5} x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;\ 7)$	$(0;\ 7)$	$(7;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-7;\ 7)$

6. Знайдіть інтеграл $\int_1^3 3x^2 dx$.

А	Б	В	Г	Д
26	$\frac{26}{3}$	78	24	12

7. Установіть відповідність між функцією (1–4) і значенням її похідної у точці 0 (А–Д).

Функція		*Значення похідної у точці 0*	
1	$y = e^x + 4x$	**А**	1
2	$y = 2\sin x + x$	**Б**	2
3	$y = \ln(2x + 1)$	**В**	3
4	$y = x - \cos x$	**Г**	4
		Д	5

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть значення виразу $\sqrt[4]{x^2 - 2x + 1}\sqrt{x + 1}$, якщо $x = 0{,}6$.

9. Вкладник відкрив у банку депозит на суму 10 000 грн. У перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а наступного року банківський відсоток було збільшено на 1 %. Після закінчення другого року на його рахунку стало 13 340 грн. Якою була відсоткова банківська ставка в перший рік?

§ 23. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Пригадаємо основні методи розв'язування нерівностей з однією змінною.

1. Рівносильні перетворення нерівностей та систем нерівностей

Як і для розв'язування рівнянь, для нерівностей часто використовують метод рівносильних перетворень.

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$x(x - 3) + 5(x + 7) > 43.$$

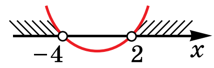
Р о з в ' я з а н н я. Перепишемо нерівність у вигляді: $x^2 + 2x - 8 > 0$.

Отримали квадратну нерівність. Коренями квадратного тричлена $x^2 + 2x - 8$ є числа -4 і 2.

Схематично зобразимо графік функції $y = x^2 + 2x - 8$, що є параболою, гілки якої напрямлені вгору (мал. 23.1).

Отже, маємо розв'язки нерівності:
$(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.



Мал. 23.1

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x \geqslant 1$.

Розв'язання. Перетворимо ліву частину нерівності:

$$\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x = \sin 4x + \cos 4x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} =$$

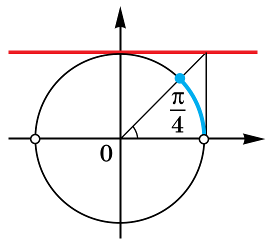
$$= \frac{\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos(4x - 2x)}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} 2x.$$

Нерівність набуде вигляду $\operatorname{ctg} 2x \geqslant 1$.
Отримаємо (мал. 23.2):

$$\pi k < 2x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z,$$

$$\frac{\pi k}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

Відповідь. $\left(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right],\ k \in Z.$



Мал. 23.2

Метод рівносильних перетворень використовують і для розв'язування систем нерівностей з однією змінною.

Нагадаємо, щоб розв'язати систему нерівностей з однією змінною, слід дотримуватися такого алгоритму:

1) розв'язати кожну з нерівностей системи;
2) зобразити множину розв'язків кожної з нерівностей на координатній прямій;
3) знайти переріз цих множин, який і буде множиною розв'язків системи;
4) записати відповідь.

Приклад 3. Розв'язати систему нерівностей

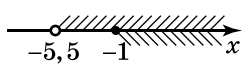
$$\begin{cases} 2(x-5) < 4x+1, \\ 3(x+2)-(x-1) \geqslant 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Поступово замінюючи кожну з нерівностей системи їй рівносильною, більш простою, матимемо:

$$\begin{cases} 2x-10 < 4x+1, \\ 3x+6-x-1 \geqslant 5, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-4x < 1+10, \\ 2x \geqslant 5-6-1, \end{cases} \quad \begin{cases} -2x < 11, \\ 2x \geqslant -2, \end{cases} \quad \begin{cases} x > -5{,}5, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$$

Позначимо на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність $x > -5{,}5$ і множину чисел, які задовольняють нерівність $x \geqslant -1$ (мал. 23.3). Множиною розв'язків системи є переріз цих множин, тобто проміжок $[-1; +\infty)$.

Відповідь. $[-1; +\infty)$.



Мал. 23.3

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}<3$.

Р о з в ' я з а н н я. ОДЗ змінної в нерівності знайдемо із системи

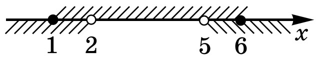
$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 6-x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 6. \end{cases} \quad \text{Отже, } 1 \leqslant x \leqslant 6.$$

Враховуючи ОДЗ, піднесемо до квадрата невід'ємні ліву і праву частини нерівності. Отже, початкова нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 6, \\ (\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x})^2 < 3^2, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 6, \\ x-1+2\sqrt{(x-1)(6-x)}+6-x < 9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 6, \\ \sqrt{(x-1)(6-x)} < 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 6, \\ 6x-6-x^2+x < 4, \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 6, \\ x^2-7x+10 > 0. \end{cases}$$

Розв'язавши другу нерівність, отримаємо: $x \in (-\infty;\ 2) \cup (5;\ +\infty)$. Враховуючи ОДЗ, маємо розв'язки початкової нерівності: $[1;\ 2) \cup (5;\ 6]$ (мал. 23.4).



Мал. 23.4

В і д п о в і д ь. $[1;\ 2) \cup (5;\ 6]$.

2. Заміна змінних у нерівностях

Метод введення нової змінної використовують і для розв'язування нерівностей.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt{9^x-3^{x+2}} > 3^x-9$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $3^x = t$, $t > 0$. Маємо нерівність: $\sqrt{t^2-9t} > t-9$. Розв'яжемо її, замінивши отриману нерівність рівносильною їй сукупністю систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t-9 \geqslant 0, \\ t^2-9t > (t-9)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} t-9 < 0, \\ t^2-9t \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \geqslant 9, \\ t > 9, \end{cases} \\ \begin{cases} t < 9, \\ t(t-9) \geqslant 0, \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t > 9, \\ t < 0. \end{array}\right.$$

Оскільки $t > 0$, то повертаємося до заміни тільки для $t > 9$. Маємо: $3^x > 9$, отже, $x > 2$.

В і д п о в і д ь. $x > 2$.

3. Метод інтервалів

Для розв'язування нерівностей часто використовують метод інтервалів. Його вважають універсальним для розв'язування нерівностей, оскільки цим методом можна розв'язати будь-яку нерівність вигляду $f(x) > 0$ (або $f(x) < 0$, або $f(x) \geqslant 0$, або $f(x) \leqslant 0$), де $f(x)$ – функція неперервна або така, що має скінченну кількість точок розриву.

Нагадаємо алгоритм розв'язування нерівностей методом інтервалів.

Щоб розв'язати нерівність вигляду $f(x) > 0$ (або $f(x) \geqslant 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leqslant 0$), треба:
1) Знайти область визначення функції $f(x)$ та позначити її на числовій осі.
2) Знайти нулі функції $f(x)$, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$, та позначити їх на області визначення функції (для строгої нерівності — «порожніми» точками).
3) Визначити знак функції $f(x)$ на кожному з отриманих проміжків (інтервалів знакосталості), наприклад, за значенням $f(a)$, де a — будь-яке число, що належить проміжку.
4) Записати відповідь.

Зверніть увагу, що число a з інтервалу знакосталості, за допомогою якого встановлюємо знак функції $f(x)$ на цьому інтервалі, ми ще називали «контрольною» точкою.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $(x^2 - 2x - 3)\log_3(x + 4) \geqslant 0$.

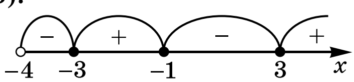
Р о з в ' я з а н н я. 1) Нехай $f(x) = (x^2 - 2x - 3)\log_3(x + 4)$. Тоді $D(f)$: $x > -4$.

2) Знайдемо нулі функції $f(x)$. Маємо рівняння:

$$(x^2 - 2x - 3)\log_3(x + 4) = 0,$$

яке рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0, \\ \log_3(x+4) = 0, \end{array}\right.$ з якої отримаємо, що $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$ — нулі функції. Позначимо їх на $D(f)$.

3) Знаходимо знаки функції $f(x)$ на кожному з отриманих проміжків (мал. 23.5).



Мал. 23.5

4) Маємо: $x \in [-3; -1] \cup [3; +\infty)$.

В і д п о в і д ь. $[-3; -1] \cup [3; +\infty)$.

4. Застосування властивостей функції

Під час розв'язування нерівностей можна також використовувати властивості функцій: область значень, монотонність, неперервність тощо.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\sin\dfrac{\pi x}{4} \geqslant x^2 - 4x + 5$.

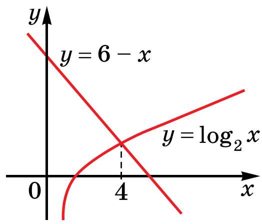
Р о з в ' я з а н н я. Оскільки $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geqslant 1$, а $\sin\dfrac{\pi x}{4} \leqslant 1$, то нерівність може справджуватися лише за одночасного виконання умов: $\sin\dfrac{\pi x}{4} = 1$ і $x^2 - 4x + 5 = 1$, тобто початкова нерівність рівносильна системі рівнянь $\begin{cases} \sin\dfrac{\pi x}{4}=1, \\ x^2-4x+5=1. \end{cases}$

Серед розв'язків другого рівняння є число 2, яке задовольняє і перше рівняння системи. Отже, 2 – єдиний розв'язок нерівності.

Відповідь. 2.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\log_2 x \leqslant 6 - x$.

Розв'язання. ОДЗ: $x > 0$. На ОДЗ функція $f(x) = \log_2 x$ зростає, а функція $g(x) = 6 - x$ спадає. Тому графіки цих функцій мають не більш як одну точку перетину (мал. 23.6). Очевидно, що число 4 є розв'язком рівняння $\log_2 x = 6 - x$, бо є абсцисою точки перетину графіків функцій $f(x)$ і $g(x)$. Якщо $0 < x < 4$, то графік функції $f(x) = \log_2 x$ лежить нижче графіка функції $g(x) = 6 - x$. Враховуючи, що знак нерівності нестрогий, остаточно отримаємо її розв'язки: $0 < x \leqslant 4$.



Мал. 23.6

Відповідь. (0; 4].

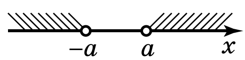
5. Нерівності, що містять знак модуля

Спочатку розглянемо найпростіші нерівності, що містять знак модуля.

Розглянемо нерівність вигляду $|f(x)| > a$, a – число.

Почнемо з нерівності $|x| > a$. Якщо $a < 0$, то, очевидно, розв'язком нерівності є будь-яке число, оскільки $|x| \geqslant 0$ для $x \in R$.

Якщо $a \geqslant 0$, то позначимо на числовій осі числа $-a$ і a – корені рівняння $|x| = a$. Вони розбивають числову вісь на три інтервали знакосталості функції $f(x) = x$ (мал. 23.7). Взявши по «контрольній» точці з кожного інтервалу, легко пересвідчитися, що нерівність задовольнятимуть лише значення: $x < -a$ або $x > a$.



Мал. 23.7

Узагальнюючи результат, отримаємо:

якщо $a < 0$, то множиною розв'язків нерівності $|f(x)| > a$ є всі числа з ОДЗ змінної виразу $f(x)$; а якщо $a \geqslant 0$, то нерівність рівносильна сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{array}\right.$

Міркуючи аналогічно, розв'язують нерівність вигляду $|f(x)| \geqslant a$.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $|x-1| \geqslant 2$.

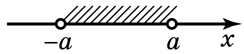
Розв'язання. Нерівність рівносильна сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l} x-1 \geqslant 2, \\ x-1 \leqslant -2. \end{array}\right.$ Далі маємо: $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 3, \\ x \leqslant -1. \end{array}\right.$

В і д п о в і д ь. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Розглянемо нерівність вигляду $|f(x)| < a$, $a \in R$.

Почнемо з нерівності $|x| < a$. Якщо $a < 0$, то, очевидно, розв'язків немає, оскільки $|x| \geqslant 0$ для $x \in R$.

Якщо $a \geqslant 0$, то, міркуючи як при розв'язуванні нерівності $|x| > a$ (мал. 23.8), матимемо, що розв'язками нерівності $|x| < a$ є ті значення x, для яких $-a < x < a$.



Мал. 23.8

Узагальнюючи, отримаємо:

якщо $a \leqslant 0$, то нерівність $|f(x)| < a$ розв'язків не має; якщо $a > 0$, нерівність рівносильна нерівності $-a < f(x) < a$.

Міркуючи аналогічно, розв'язують нерівність $|f(x)| \leqslant a$.

Приклад 10. Розв'язати нерівність $|x + 5| \leqslant 3$.

Р о з в ' я з а н н я. Маємо: $-3 \leqslant x + 5 \leqslant 3$;

$$-3 - 5 \leqslant x \leqslant 3 - 5;$$

$$-8 \leqslant x \leqslant -2.$$

В і д п о в і д ь. $[-8; -2]$.

Зауважимо, що коли $f(x)$ не є лінійною функцією, для розв'язання подвійної нерівності $-a < f(x) < a$ або $-a \leqslant f(x) \leqslant a$ доцільно перейти до рівносильної їй системи нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) \geqslant -a, \\ f(x) \leqslant a. \end{cases}$$

Для розв'язування більш складних нерівностей, що містять знак модуля, застосовують той самий підхід, що й для розв'язування рівнянь, які містять кілька знаків модулів, тобто розкривають модулі на інтервалах.

На кожному інтервалі розкриваємо модулі, отримуємо нерівність-наслідок початкової, розв'язуємо її та відбираємо лише ті її розв'язки, які належать проміжку, на якому отримано цю нерівність-наслідок. Об'єднання усіх отриманих на проміжках розв'язків і буде розв'язком початкової нерівності.

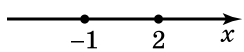
Розглянемо на прикладі, як розв'язати таку нерівність та оформити запис її розв'язання.

Приклад 11. Розв'язати нерівність $|x + 1| + |3x - 6| > 7$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) ОДЗ: $x \in R$.

2) Знайдемо нулі підмодульних виразів:

$$\left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ 3x - 6 = 0, \end{array}\right. \quad \text{тобто} \quad \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$



Мал. 23.9

Отже, -1 і 2 – нулі підмодульних виразів.

3) Позначимо отримані нулі на числовій осі (мал. 23.9) і отримаємо три проміжки: $(-\infty; -1]$, $(-1; 2]$ і $(2; +\infty)$.

4) Якщо $x \in (-\infty; -1]$, тобто $x \leqslant -1$, то $x+1 \leqslant 0$ і $|x+1| = -(x+1)$; $3x-6<0$ і $|3x-6| = -(3x-6)$. Отже, на проміжку $(-\infty; -1]$ маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x \leqslant -1, \\ -(x+1)-(3x-6) > 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant -1, \\ x < -0{,}5; \end{cases} \quad x \leqslant -1.$$

Якщо $x \in (-1; 2]$, тобто $-1 < x \leqslant 2$, то $x+1>0$ і $|x+1| = x+1$; $3x-6 \leqslant 0$ і $|3x-6| = -(3x-6)$. Отже, на проміжку $(-1; 2]$ маємо:

$$\begin{cases} -1 < x \leqslant 2, \\ x+1-(3x-6) > 7; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x \leqslant 2, \\ x < 0; \end{cases} \quad -1 < x < 0.$$

Якщо $x \in (2; +\infty)$, тобто $x > 2$, то $x+1>0$ і $|x+1| = x+1$; $3x-6>0$ і $|3x-6| = 3x-6$. На проміжку $(2; +\infty)$ маємо систему:

$$\begin{cases} x > 2, \\ x+1+3x-6 > 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x > 3; \end{cases} \quad x > 3.$$

Зауважимо, що розв'язання можна було оформити коротше, записавши і розв'язавши рівносильну початковій сукупність трьох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant -1, \\ -(x+1)-(3x-6) > 7; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 < x \leqslant 2, \\ x+1-(3x-6) > 7; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ x+1+3x-6 > 7. \end{cases} \end{array}\right.$$

Зрозуміло, що кількість систем у сукупності не може перевищувати кількості отриманих для розкриття модуля інтервалів.

В і д п о в і д ь. $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Також для розв'язування нерівностей використовують і інші методи або комбінації кількох методів.

• Які методи використовують для розв'язування нерівностей? • Сформулюйте алгоритм розв'язування нерівностей методом інтервалів. • Як розв'язати нерівність $|f(x)| > a$ і як $|f(x)| < a$, де a – число? • Як розв'язати нерівність, що містить кілька модулів?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть нерівність (**23.1–23.6**):

23.1. 1) $2x > 8$; 2) $-3x \leqslant 12$; 3) $4x \geqslant 16$; 4) $-x < 18$.

23.2. 1) $3x \geqslant 15$; 2) $-2x < 16$; 3) $3x \geqslant -15$; 4) $-x \leqslant -7$.

23.3. 1) $2(x-1)+3x > 4(x-7)$; 2) $-x(x+2)-7(x+3) \leqslant 6(x-1)$.

23.4. 1) $5(x+1)+7x > 11(x-3)$; 2) $(x-3)-2(x+1) \leqslant -3(x+1)$.

23.5. 1) $|x| > 5$; 2) $|x| \geqslant -2$; 3) $|x| \leqslant 3$; 4) $|x| < -8$.

23.6. 1) $|x| \geqslant 4$; 2) $|x| > -1$; 3) $|x| < 5$; 4) $|x| \leqslant -2$.

Розв'яжіть систему нерівностей **(23.7–23.8)**:

23.7. 1) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x > 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -5, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x > 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 2, \\ x \leqslant 3. \end{cases}$

23.8. 1) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x < 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 1, \\ x \leqslant -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x > 3, \\ x \geqslant 4. \end{cases}$

Розв'яжіть нерівність **(23.9–23.16)**:

23.9. 1) $\sqrt[5]{x} \leqslant 1$; 2) $\sqrt{x} > 2$; 3) $\sqrt[4]{x} < 1$; 4) $\sqrt[6]{x} > 0$.

23.10. 1) $\sqrt[7]{x} > 1$; 2) $\sqrt[4]{x} \geqslant 2$; 3) $\sqrt{x} < 3$; 4) $\sqrt[8]{x} \geqslant 0$.

23.11. 1) $2^x > 8$; 2) $7^x \leqslant 1$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{3}$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geqslant \frac{1}{25}$.

23.12. 1) $3^x \geqslant 9$; 2) $5^x < 1$; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{16}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x \leqslant \frac{1}{7}$.

23.13. 1) $\log_5 x > \log_5 7$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 9$;

3) $\log_7 x \leqslant \log_7 4$; 4) $\log_{0,9} x < \log_{0,9} 4$.

23.14. 1) $\log_9 x < \log_9 2$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 7$;

3) $\log_5 x \geqslant \log_5 3$; 4) $\log_{0,4} x > \log_{0,4} 9$.

2 **23.15.** 1) $x^2 - 2x - 8 > 0$; 2) $x^2 + x - 6 \leqslant 0$.

23.16. 1) $x^2 + x - 12 \geqslant 0$; 2) $x^2 - 3x - 4 < 0$.

Розв'яжіть нерівність методом інтервалів **(23.17–23.18)**:

23.17. 1) $(x-2)(x+7) \geqslant 0$; 2) $(x+3)(x-1) < 0$;

3) $\frac{x+5}{x-1} \leqslant 0$; 4) $\frac{x-3}{x+2} > 0$.

23.18. 1) $(x+3)(x-5) > 0$; 2) $(x+2)(x-3) \leqslant 0$;

3) $\frac{x-2}{x+3} < 0$; 4) $\frac{x+7}{x-4} \geqslant 0$.

Розв'яжіть нерівність **(23.19–23.20)**:

23.19. 1) $|x+2| \leqslant 3$; 2) $|2x-1| > 5$; 3) $|3x+2| < 8$; 4) $|4x+3| \geqslant 1$.

23.20. 1) $|x-3| < 4$; 2) $|3x+1| \geqslant 7$; 3) $|2x-4| \leqslant 8$; 4) $|5x+3| > 1$.

Розв'яжіть систему нерівностей (23.21–23.22):

23.21. 1) $\begin{cases} 4x > 8, \\ -7x > -28, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 7 < -3, \\ x - 5 > 4, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 4 > 3x, \\ 1,4 - 0,1x > 0,6x, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x+1) > 16, \\ -3(x-1) < -15. \end{cases}$

23.22. 1) $\begin{cases} 5x > 20, \\ -2x > -18, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2 < -3, \\ x - 2 > 7, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 7 > 2x, \\ 3,5 - 0,1x > 0,4x, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4(x-1) > 16, \\ -6(x+1) < -18. \end{cases}$

Розв'яжіть подвійну нерівність (23.23–23.24):

23.23. 1) $-2 \leqslant 2x \leqslant 8$; 2) $4 \leqslant x - 1 < 9$;

3) $-5 < x + 3 \leqslant 6$; 4) $0 < \frac{x}{3} < 4$.

23.24. 1) $-3 \leqslant 3x < 15$; 2) $4 < x + 3 \leqslant 11$;

3) $0 \leqslant x - 2 \leqslant 8$; 4) $0 < \frac{x}{2} < 5$.

Розв'яжіть нерівність (23.25–23.34):

23.25. 1) $\sqrt{x-1} \geqslant 2$; 2) $\sqrt[4]{x+13} < 3$;

3) $\sqrt[3]{2x-1} < 2$; 4) $\sqrt[6]{2x+12} \geqslant 0$.

23.26. 1) $\sqrt[4]{x+3} > 2$; 2) $\sqrt{x-3} \leqslant 5$;

3) $\sqrt[5]{3x+1} \leqslant 1$; 4) $\sqrt[8]{3x-15} > 0$.

23.27. 1) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$.

23.28. 1) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

23.29. 1) $\sin 4x < 0$; 2) $\cos \frac{x}{3} \geqslant \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < -1$.

23.30. 1) $\cos 2x \geqslant 0$; 2) $\sin \frac{x}{6} < -\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$; 4) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

23.31. 1) $\left(\frac{1}{8}\right)^x \leqslant 64$; 2) $2^{x-3} \geqslant 1$; 3) $7^{3x-1} > 49$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} > 9$.

23.32. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 27$; 2) $4^{2x-5} < 1$; 3) $5^{2x-3} \geqslant 125$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leqslant 8$.

23.33. 1) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$; 2) $\log_5 (x-1) \leqslant -1$;

3) $\log_5 (x+2) > \log_5 (6-x)$; 4) $\log_{\frac{1}{7}} (2x-3) \geqslant \log_{\frac{1}{7}} (x-2)$.

23.34. 1) $\log_{15} x > 1$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} \geqslant -2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} (x-2) < \log_{\frac{1}{2}} (6-x)$; 4) $\log_3 (3x-1) \leqslant \log_3 (x+3)$.

Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності (**23.35–23.36**):

23.35. $\log_{\frac{1}{9}} x + \log_3 9x < 3$. **23.36.** $\log_5 \frac{x}{5} + \log_{\frac{1}{25}} x < 1$.

3 Розв'яжіть нерівність (**23.37–23.44**):

23.37. 1) $(x^2-9)(x+4) \geqslant 0$; 2) $\frac{x^2+2x-15}{x-4} < 0$.

23.38. 1) $(x^2-16)(x-1) > 0$; 2) $\frac{x^2-x-12}{x+7} \leqslant 0$.

23.39. 1) $|x+1| > 7-2x$; 2) $|2x-4| \leqslant x+1$.

23.40. 1) $|x+2| < 11-2x$; 2) $|2x-6| \geqslant x+3$.

23.41. 1) $\frac{2x-1}{x+3} > 1$; 2) $\frac{1}{1-x} \geqslant -3$;

3) $\frac{4x-1}{3x+1} \geqslant 1$; 4) $\frac{4x-1}{2-3x} \geqslant -\frac{5}{8}$.

23.42. 1) $\frac{2x}{x+1} < 1$; 2) $\frac{3x}{x-1} > 2$;

3) $\frac{1}{2+x} \leqslant 3$; 4) $\frac{5x+2}{3-x} \geqslant -7$.

23.43. 1) $x^2 + 3|x| - 10 < 0$; 2) $2|x+1| > x+4$.

23.44. 1) $x^2 + 2|x| - 35 \leqslant 0$; 2) $3|x-1| < x+3$.

Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей (**23.45–23.46**):

23.45. 1) $\begin{cases} \frac{x}{5} < \frac{x-1}{6}; \\ 2(1-x)+5 > 14-3(x+5); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+2x-3 \leqslant 0; \\ |x| < 2. \end{cases}$

23.46. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} < \dfrac{x+3}{3}; \\ 3(1-x) - 5 < 4 - 2(x+3); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \leqslant 0; \\ |x| < 3. \end{cases}$

Знайдіть область визначення функції **(23.47–23.48)**:

23.47. $y = \sqrt[4]{10 - 2x} + \dfrac{1}{\sqrt[6]{2x - 0,6}} + \sqrt[7]{2x + 3}.$

23.48. $y = \sqrt[9]{4x - 5} + \sqrt[6]{3x - 0,12} + \dfrac{1}{\sqrt{16 - 4x}}.$

Розв'яжіть нерівність **(23.49–23.50)**:

23.49. 1) $\sqrt{x+1} < \sqrt{x^2 + x - 3};$ 2) $\sqrt{x-1} \geqslant \dfrac{x}{2}.$

23.50. 1) $\sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2 - x + 5};$ 2) $\sqrt{x+12} > x.$

Знайдіть суму усіх цілих розв'язків нерівності **(23.51–23.52)**:

23.51. $\sqrt{3x+10} \geqslant x.$

23.52. $\sqrt{x+6} \geqslant x.$

Розв'яжіть нерівність **(23.53–23.54)**:

23.53. $6\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 3\sqrt{3} > 0.$ **23.54.** $4\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2} \leqslant 0.$

Укажіть два довільних розв'язки нерівності, що належать даному проміжку **(23.55–23.56)**:

23.55. $\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}\right| \leqslant \sqrt{3};$ $[-\pi; \pi].$ **23.56.** $\left|\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right| < 1;$ $[0; 2\pi].$

Розв'яжіть нерівність **(23.57–23.58)**:

23.57. 1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+2x} \geqslant \dfrac{1}{8};$ 2) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^{x-5,5} < \sqrt{8}.$

23.58. 1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-x} \leqslant \dfrac{1}{9};$ 2) $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{3,5-x} > \dfrac{1}{16}.$

Знайдіть область визначення функції **(23.59–23.60)**:

23.59. 1) $y = \sqrt{9^x - 3^{x+7}};$ 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5^x + 5^{x-2} - 26}}.$

23.60. 1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2^{x+3} - 4^x}};$ 2) $y = \sqrt{3^x + 3^{x-1} - 12}.$

23.61. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності $4^x - 2^x - 12 < 0.$

23.62. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності $9^x + 3^x - 12 > 0.$

Розв'яжіть нерівність **(23.63–23.64)**:

23.63. 1) $3^{x-1} > \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{x}}$; 2) $7^{x^2+x-1} \geqslant \left(\frac{1}{7}\right)^{5x^2}$.

23.64. 1) $2^{x-2} < \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{x}}$; 2) $3^{2x^2-x-1} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{10x^2}$.

Знайдіть кількість натуральних розв'язків нерівності **(23.65–23.66)**:

23.65. $(2^x-4)(x^2-2x-3)\leqslant 0$.

23.66. $(5^x-5)(x^2-5x+6)\leqslant 0$.

Розв'яжіть нерівність **(23.67–23.74)**:

23.67. 1) $4\cdot 4^x < 7\cdot 2^x + 2$; 2) $7^{-x} - 3\cdot 7^{1+x} > 4$;
3) $2^x - 1 < 6\cdot 2^{-x}$; 4) $5^x + 3 > 10\cdot 5^{-x}$.

23.68. 1) $2\cdot 4^x + 2^x < 1$; 2) $9^x - 9^{1-x} > 8$;
3) $3^{1+x} - 3^{2-x} < 26$; 4) $7^x + 5 < 14\cdot 7^{-x}$.

23.69. 1) $\log_3(x^2+2x) < 1$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+4x)\leqslant -1$.

23.70. 1) $\log_8(x^2+2x)\geqslant 1$; 2) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2+3x) > -1$.

23.71. 1) $\log^2_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} x - 2\leqslant 0$; 2) $\log_2 x + \log_2(x-1) > 1$.

23.72. 1) $\log^2_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} x - 6 > 0$; 2) $\log_3 x + \log_3(x-2)\geqslant 1$.

23.73. 1) $\log_2(x^2-4x-5)\leqslant 4$; 2) $\log_{\sin\frac{\pi}{6}}(x^2-4x+3)\geqslant -3$.

23.74. 1) $\log_{12}(6x^2-48x-54)\leqslant 2$; 2) $\log_{\sin\frac{\pi}{3}}(x^2-3x+2)\geqslant 2$.

Знайдіть область допустимих значень функції **(23.75–23.76)**:

23.75. 1) $y = \sqrt[4]{\log_{0,25}(3x^2-2x)}$; 2) $y = \log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+\frac{2x}{3}\right)-1\right)$.

23.76. 1) $y = \sqrt[6]{1-\log_4(x^2-3x)}$; 2) $y = \log_5(\log_{0,7}(x^2-1,5x))$.

23.77. Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності

$$\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3})\leqslant 2.$$

23.78. Знайдіть добуток цілих розв'язків нерівності

$$\log_{\sqrt{8}-\sqrt{3}}(x^2-4x+14-4\sqrt{6})\leqslant 2.$$

Скільки цілих розв'язків має нерівність **(23.79–23.80)**:

23.79. $\log_{\frac{1}{7}}(3-x^2)\geqslant \log_{\frac{1}{7}}(4|x|-2)$?

23.80. $\log_5(x^2-2)\leqslant \log_5(1,5|x|-1)$?

Розв'яжіть нерівність **(23.81–23.82)**:

23.81. 1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(5^{x+1}-25^{x})>-2;$

2) $\log_{\sqrt{7}}\left(2^{x^2-1}-\dfrac{1}{8}\right)+3\log_{\sqrt{7}}2<\log_{\sqrt{7}}7.$

23.82. 1) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2^{x+2}-4^{x})>-2;$

2) $\log_{\sqrt{5}}\left(3^{x^2-1}-\dfrac{2}{9}\right)+2\log_{\sqrt{5}}3<\log_{\sqrt{5}}79.$

23.83. Знайдіть найменший розв'язок нерівності:

$$\log_{0,5}(1,5-x)+\log_{0,5}(1-x)\geqslant 1.$$

23.84. Знайдіть найбільший розв'язок нерівності:

$$\log_{0,5}(x-1)+\log_{0,5}(x-2)\geqslant -1.$$

Розв'яжіть систему нерівностей **(23.85–23.86)**:

23.85. $\begin{cases}\log_5^2(6-x)+2\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6-x)+3\geqslant 0,\\ |x-1|\leqslant 1.\end{cases}$

23.86. $\begin{cases}\log_2^2(3-x)+\log_{\sqrt[3]{2}}(3-x)\geqslant 4,\\ |x-3|\leqslant 2.\end{cases}$

Розв'яжіть нерівність **(23.87–23.96)**:

23.87. 1) $\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}\dfrac{6x-1}{2x^2+3}\geqslant 0;$ 2) $\log_{\sqrt{11}-\sqrt{7}}\dfrac{x+8}{x^2+2}\leqslant 0.$

23.88. 1) $\log_{\sqrt{13}-\sqrt{7}}\dfrac{6x+1}{5x^2+2}\leqslant 0;$ 2) $\log_{\sqrt{13}-\sqrt{6}}\dfrac{7+11x-3x^2}{4+x^2}\geqslant 0.$

4 **23.89.** 1) $|x-1|-|x+1|<1;$ 2) $|3x+6|+|x-2|\geqslant 6;$

3) $2|x-4|+|3x+5|\geqslant 16;$ 4) $7|x+2|+|2x-5|\leqslant 20.$

23.90. 1) $|x+2|-|x-3|\leqslant 3;$ 2) $|2x+4|+|x-1|>6;$

3) $|2x+3|+|x-2|\geqslant 4;$ 4) $3|x-2|+|5x+4|\leqslant 10.$

23.91. 1) $3x^2-|x-3|>9x-2;$ 2) $\dfrac{2x-5}{|x-1|}\leqslant 1.$

23.92. 1) $x^2+4\geqslant|3x+2|-7x;$ 2) $\dfrac{3x+4}{|x+3|}\leqslant 2.$

23.93. 1) $\sqrt{4-3x-x^2}\leqslant x+1;$ 2) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}>2.$

23.94. 1) $\sqrt{11-x}>x-5;$ 2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\leqslant 1.$

23.95. 1) $\sqrt{16-4x^2} < x+4$; 2) $\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant 3x-3$;
3) $\sqrt{x^2-3x-4} > x-2$; 4) $\sqrt{2x^2-6x+1} > x-2$.

23.96. 1) $\sqrt{36-6x-6x^2} < x+6$; 2) $\sqrt{x^2-5x+6} \leqslant 3x-6$;
3) $\sqrt{x^2+6x-16} > -x-4$; 4) $\sqrt{2x^2-4x-7} > x-1$.

23.97. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1.$$

23.98. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності

$$\frac{\sqrt{27-2x-x^2}}{3-x} < 1.$$

Розв'яжіть нерівність **(23.99–23.100)**:

23.99. 1) $(x^2-18x+77)\sqrt{10-x} \geqslant 0$;
2) $(3x^2-8x+5)\sqrt{2x^2-7x+6} \leqslant 0$.

23.100. 1) $(x^2-3x-40)\sqrt{2x-3} \geqslant 0$;
2) $(8x^2-6x+1)\sqrt{15x-2-25x^2} \geqslant 0$.

23.101. Знайдіть найменший додатний розв'язок нерівності

$$\sin x - \cos x \geqslant 0.$$

23.102. Знайдіть найбільший від'ємний розв'язок нерівності

$$\sin x + \cos x \leqslant 0.$$

Розв'яжіть нерівність **(23.103–23.114)**:

23.103. 1) $\dfrac{4^x-8}{x^2+x} \geqslant 0$; 2) $(25^x-5)(x^2-2x-3) < 0$.

23.104. 1) $\dfrac{3^x-27}{x^2-x} < 0$; 2) $(16^x-8)(x^2+x-20) \geqslant 0$.

23.105. $3^x < 4-x$. **23.106.** $5^x \geqslant 6-x$.

23.107. 1) $\dfrac{\log_4(x-1)}{x^2+x-12} > 0$; 2) $(x^2-3x)\log_3(x+1) < 0$.

23.108. 1) $\dfrac{\log_3(x+1)}{x^2-x-6} \leqslant 0$; 2) $(x^2+x)\log_5(x+2) > 0$.

23.109. $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant x-4$. **23.110.** $\log_4 x < 5-x$.

23.111. $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \leqslant \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

23.112. $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \geqslant \dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$.

23.113. Знайдіть найменший натуральний розв’язок нерівності
$$2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x < 16 - 2x^3.$$

23.114. Знайдіть найбільший натуральний розв’язок нерівності
$$x^4 + 3^{x+4} > x^4 \cdot 3^x + 81.$$

Знайдіть множину розв’язків системи **(23.115–23.116)**:

23.115. $\begin{cases} 7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^{1-x}(\sqrt[8]{7})^{x^2} + 6, \\ x^2 - 7x \leqslant 0. \end{cases}$

23.116. $\begin{cases} 5^{2x-\frac{1}{3}x^2} < 5^{2-2x} \cdot (\sqrt[3]{5})^{x^2} + 24, \\ x^2 - 6x \leqslant 0. \end{cases}$

Розв’яжіть нерівність **(23.117–23.118)**:

23.117. $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geqslant 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$.

23.118. $3^{\frac{1}{4}\log_3^2 x} \leqslant \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}\log_3 x}$.

Розв’яжіть нерівність **(23.119–23.124)**:

23.119. 1) $\frac{|x-2|}{|x-1|-1} \geqslant 1$; 2) $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leqslant 2$.

23.120. 1) $\frac{|x-3|}{|x-2|-1} \geqslant 1$; 2) $\frac{|x+2|+x}{|x+3|-1} \leqslant 2$.

23.121. $\frac{\sqrt{x^2-x-6}+4x+14}{x+4} > 2$.

23.122. $\frac{\sqrt{x^2-5x}-4x+26}{7-x} > 2$.

23.123. 1) $\log_{x+2}(2x^2+x) \leqslant 2$; 2) $\log_x \frac{2x+2,5}{5(1-x)} > 0$.

23.124. 1) $\log_{x+1}(2x^2-3x+1) \leqslant 2$; 2) $\log_x \frac{3x+2}{4(1-x)} > 0$.

23.125. Заробітна платня менеджера супермаркету електроніки у 2018 році складала 10 000 грн. Щомісяця із зарплатні утримувалося 18 % податку на доходи фізичних осіб та 1,5 % військового збору. На початку року менеджер вирішив щомісяця відкладати по 10 % від отриманої «на руки» зарплатні на придбання нового планшету, роздрібна ціна якого в супермаркеті, де він працює, становить 4500 грн. Через скільки місяців менеджер придбав планшет, якщо супермаркет надав йому знижку у 18 % від роздрібної ціни планшету?

23.126. (*Національна олімпіада Румунії*) Доведіть, що коренями рівняння $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ є числа $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$; $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$; $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

23.127. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 5x + 2y = 29; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 3y = -19, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$

23.128. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = -3, \\ -14x + 3y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 14x - 8y = -6, \\ 21x + 10y = 2. \end{cases}$

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 23

1. (b_n) – геометрична прогресія, серед членів якої є як додатні члени, так і від'ємні, $b_1 = 1$; $b_5 = 16$. Знайдіть знаменник прогресії.

А	Б	В	Г	Д
2	−2	2 або −2	−4	4

2. Знайдіть значення виразу $\sqrt[5]{(-2)^5} + \sqrt[4]{(-3)^4}$.

А	Б	В	Г	Д
−5	5	−1	1	2

3. Знайдіть $\lg(4a) + \lg(25b)$, якщо $\lg(ab) = 3$, $a > 0$, $b > 0$.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	300	103

4. Графік якої з функцій відмінний від прямої?

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{2}x + 3$	$y = \frac{x+7}{5}$	$y = \frac{5}{x+7}$	$y = \frac{x}{5} + 7$	$y = 7x + \frac{1}{5}$

5. Укажіть систему, яка не має розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 4x+6y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 4x+6y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 4x-6y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 4x-6y=14 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y=5, \\ 4x-6y=10 \end{cases}$

6. Відомо, що $a > b$. Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$-a > -b$	$0{,}5a > 0{,}5b$	$8b > 8a$	$0{,}8b > 0{,}8a$	жодна із запропонованих (А–Г)

7. Установіть відповідність між числовим виразом (1–4) та його значенням (А–Д).

Числовий вираз

1 $\log_3 9$

2 $\log_9 3$

3 $\log_{\sqrt{3}} 9$

4 $\log_9 \sqrt{3}$

Значення виразу

А $\frac{1}{4}$

Б $\frac{1}{2}$

В 2

Г 3

Д 4

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть (у квадратних одиницях) площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 3x$ і $y = x + 5$.

9. Обчисліть значення виразу $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 8

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Розв'яжіть рівняння $\log_3 x = -2$.

А. $-1{,}5$ **Б.** 9 **В.** -6 **Г.** $\frac{1}{9}$

2. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x} < 3$.

А. $(0; 9)$ **Б.** $[0; 9)$ **В.** $[0; 3)$ **Г.** $(-\infty; 9)$

3. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$.

А. $(4; +\infty)$ **Б.** $(3; +\infty)$ **В.** $(-\infty; 3)$ **Г.** $(-\infty; 4)$

2

4. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $|x + 3| = 2 - x$.

А. $(-\infty; -1]$ **Б.** $(-1; 1]$ **В.** $(1; 3]$ **Г.** $(3; +\infty)$

5. Якому проміжку належить корінь рівняння $3^{x-2}+3^{x}=10$?

А. $(-\infty;\ -1]$ **Б.** $(-1;\ 1]$ **В.** $(1;\ 3]$ **Г.** $(3;\ +\infty)$

6. Розв'яжіть нерівність $\frac{x-1}{x+3}\geqslant 0$.

А. $(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$ **Б.** $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$

В. $(-3;\ 1]$ **Г.** $[1;\ +\infty)$

3 **7.** Розв'яжіть рівняння $\sin 3x+\sin x=\cos x$.

А. $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ **Б.** $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

В. $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;\ (-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

Г. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z;\ (-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$

8. Знайдіть суму усіх коренів рівняння $2^{x}+2^{3-x}=6$.

А. 1 **Б.** 2 **В.** 3 **Г.** 6

9. З міста *A* в місто *B*, відстань між якими 12 км, одночасно вирушили велосипедист і пішохід. Швидкість пішохода на 8 км/год менша за швидкість велосипедиста, тому він прибув у місто *B* на 2 год пізніше, ніж велосипедист. Знайдіть швидкість велосипедиста.

А. 10 км/год **Б.** 12 км/год **В.** 13 км/год **Г.** 15 км/год

4 **10.** Розв'яжіть нерівність $\frac{3x-5}{|x-2|}\geqslant 1$.

А. $\left(-\infty;\frac{7}{4}\right]$ **Б.** $\left[\frac{7}{4};+\infty\right)$ **В.** $\left(\frac{7}{4};+\infty\right)$ **Г.** $\left[\frac{7}{4};2\right)\cup(2;+\infty)$

11. Розв'яжіть нерівність $(x^2-2x)\log_7(x+3)\leqslant 0$.

А. $(-3;2]\cup[0;2]$ **Б.** $(-3;2)\cup(0;2]$

В. $(-\infty;2]\cup[0;2]$ **Г.** $[-3;-2]\cup[0;2]$

12. Знайдіть добуток усіх коренів рівняння

$$\sqrt{x^2-2x+6}-2x=6-x^2.$$

А. 3 **Б.** −3 **В.** 2 **Г.** −2.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 22–23

1 **1.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x-3)-7=4(x-1)$; 2) $\log_4 x=-2$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $-2x<8$; 2) $\sqrt{x}\leqslant 2$.

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\geqslant\frac{1}{27}$; 2) $\log_5 x<\log_5 2$.

2 **4.** Знайдіть множину коренів рівняння:

1) $|x+2| = 1 - x$; 2) $\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 2}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+1} + 3^x = 12$; 2) $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x+3}{x-2} \leqslant 0$; 2) $|5x - 1| \leqslant 4$.

3 **7.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$; 2) $4^x - 8 \cdot 4^{-x} = 2$.

8. Щоб компенсувати запізнення на 1 год, потяг на перегоні завдовжки 300 км збільшив швидкість на 10 км/год порівняно зі швидкістю за розкладом. Яка швидкість потяга за розкладом?

4 **9.** Знайдіть множину розв'язків нерівності

$$(x^2 - 4x)\log_5(x+2) \geqslant 0.$$

Додаткові завдання

3 **10.** Розв'яжіть нерівність $6\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 3\sqrt{3} > 0$.

4 **11.** Знайдіть усі корені рівняння $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$.

§ 24. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Згадаємо основні підходи до розв'язування систем рівнянь.

1. Спосіб підстановки

Припустимо, маємо систему двох рівнянь з двома змінними, одне з рівнянь якої є лінійним. У такому разі систему доцільно розв'язувати способом підстановки. Нагадаємо послідовність дій для застосування цього способу:

1) *з лінійного рівняння системи виразити одну змінну через іншу*;

2) *підставити отриманий вираз замість цієї змінної в друге рівняння*;

3) *розв'язати отримане рівняння з однією змінною*;

4) *знайти відповідне йому значення другої змінної.*

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + 4y = 10, \\ x^2 + xy = -2. \end{cases}$

Розв'язання. З першого рівняння маємо: $x = 10 - 4y$. Підставимо $10 - 4y$ замість x у друге рівняння, отримаємо рівняння зі змінною y: $(10 - 4y)^2 + (10 - 4y)y = -2$, тобто квадратне рівняння $6y^2 - 35y + 51 = 0$, коренями якого є числа 3 і $\frac{17}{6}$. Тоді, якщо $y = 3$, то $x = 10 - 4 \cdot 3 = -2$; якщо $y = \frac{17}{6}$, то $x = 10 - 4 \cdot \frac{17}{6} = -\frac{4}{3}$.

Відповідь. $(-2; 3)$; $\left(-1\frac{1}{3}; 2\frac{5}{6}\right)$.

2. Спосіб додавання

Цей спосіб застосовують, якщо в результаті почленного додавання лівих і правих частин рівнянь системи отримуємо рівняння з однією змінною.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6, \\ x^2 - 2x + y^2 = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Помножимо ліву і праву частини другого рівняння на -2, система набуде вигляду: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 6, \\ -2x^2 + 4x - 2y^2 = -2. \end{cases}$

Тепер додамо почленно ліві і праві частини рівнянь. Отримаємо рівняння: $-x^2 + 4x = 4$, тобто $x^2 - 4x + 4 = 0$, коренем якого буде $x = 2$.

Підставимо отримане значення x в перше рівняння початкової системи: $4 + 2y^2 = 6$. Маємо: $y^2 = 1$, звідки $y_1 = 1$; $y_2 = -1$.

Отже, розв'язками системи є пари чисел (2; 1) і (2; –1).

Відповідь. (2; 1), (2; –1).

Іноді в результаті почленного додавання рівнянь системи під час розв'язування систем можна отримати відомі формули, що спростить процес розв'язання.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}5, \\ \cos x \cos y = 0{,}5. \end{cases}$

Розв'язання. Додаючи почленно рівняння системи, маємо: $\cos x \cos y + \sin x \sin y = 1$. Отже, за формулою додавання: $\cos(x - y) = 1$. Тоді $x - y = 2\pi k$.

Якщо перше рівняння системи помножити на (-1), а потім додати до другого, то отримаємо: $\cos x \cos y - \sin x \sin y = 0$. Отже, за формулою додавання: $\cos(x + y) = 0$. Тоді $x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Отримали систему двох лінійних рівнянь: $\begin{cases} x - y = 2\pi k, \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n. \end{cases}$

Додавши їх почленно, отримаємо $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n + 2\pi k$, звідки $x = \frac{\pi}{4} + \pi\left(\frac{n}{2} + k\right)$.

Віднявши від другого рівняння системи перше, отримаємо:

$2y=\frac{\pi}{2}+\pi n-2\pi k$, звідки $y=\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}-k\right)$.

Отже, $x=\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}+k\right)$, $y=\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}-k\right)$, де $n\in Z$, $k\in Z$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}+k\right); \frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}-k\right)\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$.

3. Рівносильні перетворення та використання рівнянь-наслідків

Під час використання рівнянь-наслідків не слід забувати про можливу появу сторонніх коренів. Тому з множини отриманих коренів треба вилучити сторонні, виконавши перевірку отриманих коренів.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x^2+xy+y^2=91,\\ x+\sqrt{xy}+y=13.\end{cases}$

Розв'язання. Запишемо друге рівняння системи у вигляді $x+y=13-\sqrt{xy}$ і піднесемо його ліву і праву частини до квадрата. Матимемо:

$x^2+2xy+y^2=169-26\sqrt{xy}+xy$, тобто $x^2+xy+y^2=169-26\sqrt{xy}$.

Ураховуючи з першого рівняння, що $x^2+xy+y^2=91$, отримаємо, що $91=169-26\sqrt{xy}$, звідки $\sqrt{xy}=3$, тому $xy=9$.

Отже, систему можна переписати у вигляді:

$\begin{cases}xy=9,\\ x+\sqrt{xy}+y=13.\end{cases}$ Розв'яжемо її: $\begin{cases}xy=9,\\ x+3+y=13,\end{cases}$ $\begin{cases}xy=9,\\ x+y=10.\end{cases}$

Очевидно, що пари чисел (1; 9), (9; 1) є розв'язками отриманої системи. Перевіркою переконуємося, що вони задовольняють початкову систему.

Відповідь. (1; 9), (9; 1).

4. Уведення нової змінної

Цей метод також часто використовують для розв'язування систем рівнянь.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}2^x+\log_3(y-4)=6,\\ 4^x+\log_9(y-4)=17.\end{cases}$

Розв'язання. Нехай $2^x=t$, $t>0$, тоді $4^x=(2^x)^2=t^2$.

Нехай $\log_3(y-4)=z$, тоді

$\log_9(y-4)=\log_{3^2}(y-4)=0{,}5\log_3(y-4)=0{,}5z$.

Маємо систему рівнянь зі змінними t і z: $\begin{cases} t + z = 6, \\ t^2 + 0,5z = 17. \end{cases}$

З першого рівняння отримаємо, що $z = 6 - t$, і підставимо отриманий вираз замість z у друге рівняння: $t^2 + 0,5(6 - t) - 17 = 0$.

Маємо квадратне рівняння $t^2 - 0,5t - 14 = 0$, корені якого $t_1 = 4$ і $t_2 = -3,5$. Оскільки $t_2 < 0$, то значення z знаходимо лише для $t = 4$.

Якщо $t = 4$, то $z = 6 - 4$, тобто $z = 2$. Повертаємося до заміни:

$\begin{cases} t = 4, \\ z = 2, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} 2^x = 4, \\ \log_3(y - 4) = 2, \end{cases}$ отже, $\begin{cases} x = 2, \\ y = 13. \end{cases}$

Відповідь. (2; 13).

5. Застосування властивостей функцій

Іноді для розв'язування систем рівнянь, як і для рівнянь, застосовують властивості функцій, аналітичні вирази яких містять рівняння системи.

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

Розв'язання. ОДЗ: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Оскільки для x і y з ОДЗ справджуються нерівності $\sqrt{x} + \sqrt{y+1} \geqslant 1$ та $\sqrt{x+1} + \sqrt{y} \geqslant 1$, то знак рівності в обох нерівностях досягається лише при $x = y = 0$, тому (0; 0) – єдиний розв'язок системи.

Відповідь. (0; 0).

6. Система двох рівнянь з двома змінними як математична модель текстових і прикладних задач

Нагадаємо орієнтовний алгоритм розв'язування текстових задач за допомогою системи двох рівнянь з двома змінними:

1) позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x і y);

2) за умовою задачі скласти систему рівнянь (математичну модель задачі);

3) розв'язати отриману систему;

4) проаналізувати знайдені значення змінних на відповідність умові та змісту задачі, дати відповідь на запитання задачі;

5) записати відповідь.

Приклад 7. За 2 год проти течії і 5 год за течією моторний човен долає 120 км. За 2 год за течією і 1 год проти течії цей самий човен долає 51 км. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії.

Розв'язання. Нехай власна швидкість човна – x км/год, а швидкість течії – y км/год.

Тоді швидкість човна за течією річки дорівнює $(x + y)$ км/год, а проти течії – $(x - y)$ км/год. За 5 год за течією човен подолає $5(x + y)$ км, за 2 год проти течії – $2(x - y)$ км, а разом – 120 км. Маємо перше рівняння: $5(x + y) + 2(x - y) = 120$.

Міркуючи аналогічно, складемо друге рівняння: $2(x + y) + (x - y) = 51$.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} 5(x+y) + 2(x-y) = 120, \\ 2(x+y) + (x-y) = 51, \end{cases}$

розв'язавши яку отримаємо: $\begin{cases} x = 16{,}5, \\ y = 1{,}5. \end{cases}$

Отже, власна швидкість човна – 16,5 км/год, а швидкість течії – 1,5 км/год.

Відповідь. 16,5 км/год; 1,5 км/год.

Приклад 8. Площа земельної ділянки прямокутної форми дорівнює 60 м^2. Якщо довжину цієї ділянки зменшити на 1 м, а ширину збільшити на 2 м, то площа ділянки стане 72 м^2. Знайти довжину огорожі цієї земельної ділянки.

Розв'язання. Нехай довжина даної ділянки дорівнює x м, а ширина – y м. Занесемо умову задачі в таблицю:

	Довжина, м	Ширина, м	Площа, м^2
Дана ділянка	x	y	xy
Ділянка після зміни розмірів	$x - 1$	$y + 2$	$(x - 1)(y + 2)$

За умовою задачі маємо систему рівнянь: $\begin{cases} xy = 60, \\ (x-1)(y+2) = 72. \end{cases}$

Розкривши дужки в другому рівнянні, перепишемо систему у вигляді: $\begin{cases} xy = 60, \\ xy + 2x - y - 2 = 72. \end{cases}$

Оскільки $xy = 60$, то в друге рівняння замість xy підставимо 60 і виразимо змінну y через змінну x, далі розв'яжемо систему способом підстановки:

$\begin{cases} xy = 60, \\ 60 + 2x - y - 2 = 72; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 60, \\ y = 2x - 14; \end{cases}$ $\begin{cases} x(2x - 14) = 60, \\ y = 2x - 14; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - 7x - 30 = 0, \\ y = 2x - 14. \end{cases}$$

З першого рівняння маємо: $x_1 = 10$, $x_2 = -3$. Число -3 не відповідає змісту задачі, оскільки довжина ділянки не може бути від'ємною. Отже, довжина ділянки 10 м, тоді ширина: $2 \cdot 10 - 14 = 6$ (м).

Знайдемо довжину огорожі як периметр відповідного прямокутника: $2(6 + 10) = 32$ (м).

Відповідь. 32 м.

Приклад 9. З пункту A вийшов пішохід. Через 50 хв після нього звідти ж у тому самому напрямку виїхав велосипедист, який наздогнав пішохода на відстані 6 км від пункту A. Знайти швидкості пішохода і велосипедиста, якщо велосипедист за 1 год долає на 1 км більше, ніж пішохід за 2 год.

Розв'язання. Нехай x км/год – швидкість пішохода, y км/год – велосипедиста. Обидва до зустрічі подолали відстань довжиною 6 км. Занесемо умову задачі в таблицю:

	s, км	v, км/год	t, год
Пішохід	6	x	$\frac{6}{x}$
Велосипедист	6	y	$\frac{6}{y}$

Оскільки пішохід перебував у дорозі на 50 хв довше, ніж велосипедист, а 50 хв $= \frac{5}{6}$ год, маємо рівняння: $\frac{6}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5}{6}$.

Оскільки велосипедист за 1 год долає y км і це на 1 км більше, ніж пішохід за 2 год, тобто $2x$ км, маємо ще одне рівняння: $y - 2x = 1$. Отримали систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5}{6}, \\ y - 2x = 1. \end{cases}$

Розв'язавши її (зробіть це самостійно) та врахувавши, що за змістом задачі $x > 0$ і $y > 0$, матимемо $x = 4$, $y = 9$.

Відповідь. 4 км/год; 9 км/год.

- Коли зручно використовувати спосіб підстановки в системах рівнянь? • Коли зручно використовувати спосіб додавання в системах рівнянь? • Які ще методи використовують для розв'язування систем рівнянь? • Сформулюйте орієнтовний алгоритм для розв'язування текстових і прикладних задач за допомогою систем рівнянь.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки **(24.1–24.2)**:

24.1. 1) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y = 7, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

24.2. 1) $\begin{cases} 4x + y = -2, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5y = -8, \\ x - 3y = 7. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання **(24.3–24.4)**:

24.3. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 5x - 3y = 23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 3y = 2, \\ 5x - 6y = -17. \end{cases}$

24.4. 1) $\begin{cases} 4x + 2y = 0, \\ 5x - 2y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 7y = 12, \\ 4x - 5y = -14. \end{cases}$

2 Розв'яжіть систему рівнянь **(24.5–24.8)**:

24.5. 1) $\begin{cases} 5(y - 2) = 2x - 1, \\ 3(y + 3) = 7(x + 3); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x + 2y) - 5x = 0{,}4, \\ 7(3x - 4y) + 3y = 5{,}9. \end{cases}$

24.6. 1) $\begin{cases} 7(y + 3) = 3x + 1, \\ 4(2 - y) = 5(x + 1) + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x - 2y) - 7x = 9{,}6, \\ 5(4x + 3y) + 8y = -18{,}5. \end{cases}$

24.7. 1) $\begin{cases} |x| + 2y = 22, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 3x = 3, \\ |y - 1| + x = 2. \end{cases}$

24.8. 1) $\begin{cases} y - 5x = 2, \\ x + |y| = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y + |x - 2| = 2, \\ y - 2x = 3. \end{cases}$

Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіків рівнянь **(24.9–24.10)**:

24.9. $2x - y = 3$ та $|x - y| = 1$. **24.10.** $2x + y = 5$ та $|x + y| = 3$.

Розв'яжіть систему рівнянь **(24.11–24.22)**:

24.11. 1) $\begin{cases} x + y + \dfrac{5}{x - y} = 4; \\ x + y - \dfrac{10}{x - y} = 1, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2}{x - y} + \dfrac{3}{x + y} = 2; \\ \dfrac{2}{x - y} - \dfrac{3}{x + y} = 0. \end{cases}$

24.12. 1) $\begin{cases} x - y + \dfrac{2}{x + y} = 7; \\ x - y - \dfrac{8}{x + y} = 2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3}{x + y} + \dfrac{5}{x - y} = 2; \\ \dfrac{3}{x + y} - \dfrac{5}{x - y} = 0. \end{cases}$

24.13. 1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5,\\ 3\sqrt{x}-2\sqrt{y}=7.\end{cases}$

24.14. 1) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=2,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=6,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ 5\sqrt{x}-2\sqrt{y}=1.\end{cases}$

24.15. 1) $\begin{cases}\sin x+y=5,\\ 2\sin x+4y=19,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}-1,5x+2\cos y=-5,5,\\ 4x+10\cos y=7.\end{cases}$

24.16. 1) $\begin{cases}2tgx+3y=4,\\ 3tgx+2y=1,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+4\sin y=-11,\\ -2x+5\sin y=3,5.\end{cases}$

24.17. 1) $\begin{cases}2^x+3^y=7,\\ 2^x-3^y=1,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}6^x-2\cdot 3^y=2,\\ 6^x\cdot 3^y=12,\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x+2^{-y}=-1,\\ 3,5\cdot 2^{-y+1}-20x=146,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}7y+2\cdot 3^{x+1}=-2,\\ -6y+5\cdot 3^x=93.\end{cases}$

24.18. 1) $\begin{cases}5^x-2^y=1,\\ 5^x+2^y=9,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3\cdot 7^x-3^y=1,\\ 7^x\cdot 3^y=15,\end{cases}$

3) $\begin{cases}7\cdot 2^x+6y=2,\\ 3\cdot 2^{x+1}-5y=93,\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+2^y=-1,\\ -10x+2^{1-y}=146.\end{cases}$

24.19. 1) $\begin{cases}\log_3 x-\log_5 y=4,\\ \log_3 x+\log_5 y=2,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5\cos x-2\log_y 3=-4,\\ -6\cos x+7\log_y 3=2,5.\end{cases}$

24.20. 1) $\begin{cases}\log_2 x+\log_7 y=3,\\ \log_2 x-\log_7 y=1,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}7\sin x+6\log_y 3=-2,5,\\ 2\sin x-5\log_y 3=6.\end{cases}$

24.21. 1) $\begin{cases}y^2-3x^2=24,\\ x+y=8;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y+4x=10,\\ y^2+xy=-2.\end{cases}$

24.22. 1) $\begin{cases}x^2-2y^2=8,\\ x+y=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y+3x=10,\\ y^2-xy=8.\end{cases}$

24.23. За один олівець і три зошити заплатили 27 грн, а за три олівці і один зошит – 17 грн. Скільки коштує один олівець і скільки – один зошит?

24.24. За 2 год пішки і 1 год на велосипеді турист подолав 20 км, а за 1 год пішки і 2 год на велосипеді – 28 км. З якою швидкістю турист рухався пішки і з якою – на велосипеді?

24.25. За 3 футбольних і 2 волейбольних м'ячі заплатили 506 грн. Скільки коштує футбольний м'яч і скільки – волейбольний, якщо два волейбольні м'ячі на 50 грн дорожчі за один футбольний?

24.26. 2 акумулятори і 3 батарейки разом коштують 135 грн. Скільки коштує один акумулятор і скільки – одна батарейка, якщо акумулятор коштує стільки ж, скільки 12 батарейок?

24.27. Човен за 3 год руху за течією і 2 год руху проти течії долає 138 км. За 9 год руху за течією човен долає відстань у 5 разів більшу, ніж за 2 год руху по озеру. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.

24.28. Човен рухався 2 год за течією і 5 год проти течії, подолавши за цей час 120 км. Швидкість човна проти течії складає 80 % від швидкості човна за течією. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.

24.29. Сума двох чисел дорівнює 93. Знайдіть кожне із чисел, якщо 70 % від одного і 60 % від другого разом складають 59,4.

24.30. 20 % від одного числа на 3,6 більше, ніж 10 % від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 108.

24.31. Периметр земельної ділянки прямокутної форми дорівнює 200 м, а її площа – 1600 м². Знайдіть сторони земельної ділянки.

24.32. Сума двох сусідніх сторін прямокутника дорівнює 22 см. Знайдіть ці сторони, якщо площа прямокутника дорівнює 120 см².

3 Розв'яжіть систему рівнянь **(24.33–24.52)**:

24.33. 1) $\begin{cases} |x| + |y-1| - 1{,}5 = 0, \\ |x| + 2y - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |y| + |x+2| = 3, \\ 2{,}5|y| + x = 2. \end{cases}$

24.34. 1) $\begin{cases} |x| + |y-1| - 3 = 0, \\ 2|x| + y - 5 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |y| + |x-1| = 3, \\ |y| + 2x = 6. \end{cases}$

24.35. 1) $\begin{cases} y + x^3 = 2, \\ 2y + y^2 + 5x^3 = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^3 + x = 1, \\ x^3 - 4x^2 + 4x + y^6 = 1. \end{cases}$

24.36. 1) $\begin{cases} y + x^2 = 2, \\ 2x^2 + y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y + x^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + 6y = 29. \end{cases}$

24.37. $\begin{cases} (x-y)^2 - 2(x-y) - 3 = 0, \\ (x+y)^2 + x + y - 2 = 0. \end{cases}$

24.38. $\begin{cases} (x+y)^2 + 2(x+y) - 3 = 0, \\ (x-y)^2 - x + y - 2 = 0. \end{cases}$

24.39. 1) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{y-x}=2,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{y-x}=8;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt{y}=9,\\ x-4y=9;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ xy=27;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=2{,}5,\\ xy-(x+y)=9.\end{cases}$

24.40. 1) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{y-x}=6,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{y-x}=12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}+3\sqrt{y}=5,\\ x-9y=-5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1,\\ xy=8;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{3y}}=2,\\ xy+x+y=14.\end{cases}$

24.41. 1) $\begin{cases}4\sin y-6\sqrt{2}\cos x=5+4\cos^2 y,\\ \cos 2x=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\cos x-\sqrt{\cos y}=0,\\ \cos 2x-2\cos^2 y+2=0.\end{cases}$

24.42. 1) $\begin{cases}1+2\cos 2x=0,\\ \sqrt{6}\cos y-4\sin x=2\sqrt{3}(1+\sin^2 y);\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sqrt{\sin 2y-1}\sin y=0,\\ \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-2y\right)-2\sin 3x=0.\end{cases}$

24.43. 1) $\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{4},\\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=5-2\sqrt{6};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2\sin 6x+3\cos 4y=5,\\ x+2y=\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$

24.44. 1) $\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{2},\\ \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=\dfrac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x+y=-\dfrac{\pi}{2},\\ 2\cos 6x-\sin y=-3.\end{cases}$

24.45. 1) $\begin{cases}3^y-2^x=77,\\ 3^{\frac{y}{2}}-2^{\frac{x}{2}}=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2\cos^2 x-\sin 2x-2=0,\\ 2^y=x.\end{cases}$

24.46. 1) $\begin{cases}5^y-6^x=589,\\ 5^{\frac{y}{2}}+6^{\frac{x}{2}}=31;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2+\sin 2x-2\sin^2 x=0,\\ 5^y=x.\end{cases}$

24.47. 1) $\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 200, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

24.48. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 144, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 25^{2x} + 25^{2y} = 30, \\ 25^{x+y} = 5\sqrt{5}. \end{cases}$

24.49. 1) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 576, \\ \log_2(x - y) = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{2y-x} = 81, \\ \lg xy - \lg 3 = 1. \end{cases}$

24.50. 1) $\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 5120, \\ \log_3(y - x) = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^{3x+y} = 32, \\ \lg xy + \lg 50 = 2. \end{cases}$

24.51. 1) $\begin{cases} \log_3 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{6}}(x - y) = 2, \\ \log_9 x + \log_3 y = 2. \end{cases}$

24.52. 1) $\begin{cases} \log_5 x - \log_{25} y = 0, \\ y^2 - 10x^2 + 9 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2(y - x) = 2, \\ \log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$

24.53. Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму своїх цифр і у 3 рази більше за добуток своїх цифр.

24.54. Знайдіть двоцифрове число, яке в 1,5 раза більше за добуток своїх цифр і в 4 рази більше за їх суму.

24.55. Два автомобілі виїхали одночасно з міст *A* і *B* назустріч один одному і зустрілися через годину. Після цього вони, не зупиняючись, продовжили рухатися з тією самою швидкістю. Один з них прибув у місто *B* на 50 хв пізніше, ніж другий у місто *A*. Знайдіть швидкість кожного з автомобілів, якщо відстань між містами 150 км.

24.56. Два велосипедисти виїхали назустріч один одному з Києва і Боярки, перебуваючи на відстані 30 км. Через годину вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рух з тією самою швидкістю. Один з них прибув у Боярку на 50 хв пізніше, ніж другий у Київ. Знайдіть швидкість кожного з велосипедистів.

24.57. Діагональ прямокутника дорівнює 13 см. Якщо одну з його сторін збільшити на 11 см, а другу залишити без змін, то діагональ збільшиться на 7 см. Знайдіть периметр початкового прямокутника.

24.58. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Якщо один з його катетів збільшити на 9 см, а другий залишити без змін, то гіпотенуза нового трикутника дорівнюватиме 17 см. Знайдіть площу початкового трикутника.

24.59. З пунктів *A* і *B*, відстань між якими 10 км, одночасно назустріч один одному вирушили два пішоходи. Через 1 год їм залишилося пройти до зустрічі 1 км. Якби один з пішоходів вийшов на 15 хв раніше, то зустріч відбулася б на середині шляху. Знайдіть швидкість кожного з пішоходів.

24.60. З двох міст, відстань між якими 72 км, назустріч один одному вирушили два велосипедисти і зустрілися на середині шляху, причому один з них виїхав на 1 год раніше, ніж другий. Якби велосипедисти виїхали одночасно, то зустрілися б через 2 год 24 хв. Знайдіть швидкість кожного з велосипедистів.

4 Розв'яжіть систему рівнянь (**24.61–24.74**):

24.61. $\begin{cases} |x-1|+y=6, \\ x-|y-3|=4. \end{cases}$ **24.62.** $\begin{cases} |y+1|+x=2, \\ y-|x-2|+1=0. \end{cases}$

24.63. 1) $\begin{cases} xy(x+y)=20, \\ x+y=1+xy; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}=-\dfrac{8}{3}, \\ 4x-3y=13. \end{cases}$

24.64. 1) $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x+y=11-xy; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2}, \\ 2y-3x=3. \end{cases}$

24.65. 1) $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^2-xy+y^2=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2-8xy+16x^2=324, \\ xy+4x^2=110. \end{cases}$

24.66. 1) $\begin{cases} x^3-y^3=28, \\ x^2+xy+y^2=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2+6xy+9x^2=100, \\ x^2-2xy=32. \end{cases}$

24.67. 1) $\begin{cases} xy+2x+2y=8, \\ x^2+y^2+3x+3y=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2+2y^2-3(x+y)+xy=-1, \\ x^2+y^2-2x-2y+3xy=1. \end{cases}$

24.68. 1) $\begin{cases} x+y=xy-29, \\ x^2+y^2=x+y+72; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2+5(x+y)=15-3xy, \\ x^2+y^2-x-y+xy=1. \end{cases}$

24.69. 1) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy}, \\ x+y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3-\sqrt{y}=1, \\ 5x^6+2y-8x^3\sqrt{y}=2. \end{cases}$

24.70. 1) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1{,}5\sqrt{xy}, \\ x+y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2-\sqrt{x}=1, \\ y^4+2x-3y^2\sqrt{x}=-2. \end{cases}$

24.71. 1) $\begin{cases} \sqrt{x+3y+1}=2, \\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-\sqrt{4y^2-x^2}=4, \\ y^3\sqrt{4y^2-x^2}=0. \end{cases}$

24.72. 1) $\begin{cases} \sqrt{x+y-1}=1, \\ \sqrt{x-y+2}=2y-2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2, \\ x\sqrt{x^2-4y^2}=0. \end{cases}$

24.73. $\begin{cases} \sin x\cos y=-0{,}5, \\ \operatorname{tg} x\operatorname{ctg} y=1. \end{cases}$ **24.74.** $\begin{cases} \cos y\cos x=-0{,}25, \\ \operatorname{tg} y=\operatorname{ctg} x. \end{cases}$

Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь (**24.75–24.76**):

24.75. $\begin{cases} \sin(2x - y) = 0, \\ \cos(y - x) = 1, \end{cases}$ що задовольняють умови $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$.

24.76. $\begin{cases} \sin(x - 2y) = 0, \\ \cos(x - y) = 1, \end{cases}$ що задовольняють умови $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$.

Розв'яжіть систему рівнянь (**24.77–24.81**):

24.77. 1) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x + y)^{\frac{1}{x}} = 9, \\ (x + y) \cdot 2^x = 18. \end{cases}$

24.78. 1) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - y)^{\frac{1}{x}} = 2, \\ (x - y) \cdot 2^x = 16. \end{cases}$

24.79. 1) $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{6}} + 2^{\frac{x+y}{3}} = 6, \\ \log_3(y - 2x) + \log_3(2y - x) = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{10}{3}, \\ xy = 16. \end{cases}$

24.80. 1) $\begin{cases} 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2y-x} + 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2y-x}{2}} = 6, \\ \lg(3y - x) + \lg(x + y) = \lg 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2}, \\ xy = 8. \end{cases}$

24.81. 1) $\begin{cases} x^{\frac{x+3y}{2}} = y^{62x-4y}, \\ y^3 = \frac{1}{xy}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^{1-0,4\log_x y} = x^{0,4}, \\ 1 + \log_x\left(1 - \frac{3y}{x}\right) = \log_x 4. \end{cases}$

24.82. 1) $\begin{cases} (xy)^y \cdot x^{6x} = y^x, \\ x^2 y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{2,5}, \\ \log_4 y \cdot \log_y(y - 3x) = 1. \end{cases}$

24.83. Моторний човен за 3 год 20 хв проплив 33 км за течією річки і повернувся назад. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії, якщо відомо, що 11 км за течією і 6 км проти течії він долає за 50 хв.

24.84. З двох пунктів A і B, відстань між якими 18 км, одночасно виїхали назустріч один одному два велосипедисти. Велосипедист, що виїхав з пункту A, прибув у пункт B через 24 хв після зустрічі, а другий велосипедист прибув у пункт A через 54 хв після зустрічі. Знайдіть швидкість кожного з велосипедистів.

Розв'яжіть систему рівнянь (**24.85–24.86**):

24.85. 1) $\begin{cases} \log_{|x-y|} \dfrac{xy}{2} = 2, \\ x + y = xy + 1, \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x-y| - \log_2^2 (|x| + y + 1) + 6 = 0, \\ (x-y)^2 - 6(x-y)\log_2 (|x| + y + 1) + 5\log_2^2 (|x| + y + 1) = 0. \end{cases}$

24.86. $\begin{cases} |2x+y| + \log_3^2 (|y| - 2x + 5) - 20 = 0, \\ (2x+y)^2 - 7(2x+y)\log_3 (|y| - 2x + 5) - 8\log_3^2 (|y| - 2x + 5) = 0. \end{cases}$

24.87. Вечірній прийом їжі має відбуватися не пізніше ніж за 2,5 години до сну. О котрій годині треба повечеряти одинадцятикласниці Оленці, якщо вона, дотримуючись режиму дня, має прокинутися вранці о 7-00, а її нічний відпочинок має тривати не менше 8 годин?

24.88. Доведіть формули (*формули Вієта*):
1) $\cos mx = 2\cos x \cos(m-1)x - \cos(m-2)x$;
2) $\sin mx = 2\cos x \sin(m-1)x - \sin(m-2)x$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

24.89. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:
1) $2ax = 8$; 2) $(a-1)x = a^2 - 1$;
3) $(a^2-1)x = a + 1$; 4) $x^2 - (2+a)x + 2a = 0$

24.90. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність:
1) $2x < a$; 2) $ax > 2$;
3) $(a+3)x > a + 3$; 4) $(a-3)x \leqslant a^2 - 9$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 24

1. Укажіть рівняння, коренем якого є число 4.

А	Б	В
$\log_2(x+3) = 7$	$\sqrt{x-3} = -1$	$\log_2(x-2) = 1$
Г	**Д**	
$0{,}5^{x-2} = 0{,}5$	$\cos\dfrac{\pi x}{2} = 0$	

2. Скоротіть дріб $\dfrac{a-16}{\sqrt{a}+4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{a}+4$	$\sqrt{a}-4$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}-4}$	$a-4$	$a+4$

3. Якщо графік функції $y = x^2$ підняти на дві одиниці вздовж осі y, то отримаємо графік функції...

А	Б	В	Г	Д
$y = (x+2)^2$	$y = (x-2)^2$	$y = x^2 - 2$	$y = x^2 + 2$	$y = 2x^2$

4. Укажіть значення a, при яких рівняння $(a + 2)x = a^2 - 4$ не має розв’язків.

А	Б	В	Г	Д
немає таких значень a	2	0	± 2	-2

5. Який з квадратних тричленів не можна розкласти на лінійні множники на множині дійсних чисел?

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + 2x - 3$	$x^2 + 2x - 7$	$-x^2 - 2x - 1$	$-x^2 - 2x - 2$	$x^2 - 2x - 2$

6. Укажіть непарну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$	$y = \mathrm{tg}^2 x$	$y = \cos x$	$y = \sin x$

7. Установіть відповідність між числовим виразом (1–4) та його значенням (А–Д).

Числовий вираз

1 $(2-\sqrt{10})(2+\sqrt{10})$

2 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{15}$

3 $(\sqrt{27}-\sqrt{3})\sqrt{3}$

4 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3}-\sqrt{27})$

Значення числового виразу

А 8

Б 6

В 1

Г -1

Д -6

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть значення виразу $\dfrac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\cos \alpha}$, якщо $\alpha = 20°$.

9. Знайдіть найменше значення функції

$$y = \sqrt{|x-1|+4+x^2-2x+1}.$$

§ 25. ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

У попередніх класах ми вже розглядали задачі з параметрами, в основному це були рівняння, нерівності або системи рівнянь.

Нагадаємо, що зазвичай у рівняннях, нерівностях або їх системах літерами позначають змінні, але іноді в умові може трапитися літера, якою позначено невідоме стале число, тобто *параметр*.

У такому разі ми маємо вже не одну задачу, а багато задач, які отримуємо для різних значень параметра. При цьому задача при деяких значеннях параметра може не мати розв'язків, при деяких значеннях параметра мати єдиний розв'язок, а при деяких – безліч розв'язків тощо.

Нагадаємо також, що всі задачі з параметром можна умовно поділити на два типи, залежно від вимоги, яку висувають до задачі. Якщо треба розв'язати рівняння (нерівність, систему рівнянь тощо), як правило, для кожного допустимого значення параметра, то це один тип задач. А якщо треба знайти значення параметра, при якому рівняння (нерівність, система рівнянь тощо) задовольняє певну умову, найчастіше це вимога щодо кількості або числових значень його розв'язків, то це другий тип задач з параметрами.

Зауважимо, що важливим етапом розв'язування задачі з параметром є запис відповіді. У задачах першого типу всі знайдені значення параметра та відповідні їм розв'язки записують у відповіді до задачі, зазвичай, у вигляді «Якщо..., то...». Відсутність у відповіді хоча б одного значення параметра з його області допустимих значень означатиме, що деякі випадки існування розв'язків не розглянуто, тому відповідь є неповною.

Розглянемо кілька прикладів таких задач з параметром, позначивши параметр літерою a.

1. Найпростіші задачі з параметрами

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(3 + a)x = a^2 - 9.$$

Розв'язання. Для розв'язання задачі достатньо розглянути два випадки:

1) $3 + a = 0$, тобто $a = -3$. Маємо рівняння: $0x = -9$, яке не має коренів.

2) $3 + a \neq 0$, тобто $a \neq -3$. Маємо рівняння: $(3 + a)x = (a - 3)(a + 3)$, звідки $x = \dfrac{(a-3)(a+3)}{3+a}$, отже, $x = a - 3$.

Відповідь. Якщо $a = -3$, то коренів немає; якщо $a \neq -3$, то $x = a - 3$.

Приклад 2. Знайти усі значення параметра a, для кожного з яких числа x і y, що задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3, \end{cases}$ задовольняють також і нерівність $x > y$.

Розв'язання. Розв'язуючи систему способом додавання, маємо: $3x = a + 3$; $x = \frac{a+3}{3}$; $y = a - x$; $y = \frac{2a-3}{3}$.

Шукані значення a мають задовольняти умову $x > y$, тобто $\frac{a+3}{3} > \frac{2a-3}{3}$. Отже, $a < 6$.

Відповідь. $a < 6$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $a \cdot 2^x < a^2$.

Розв'язання. Розглянемо такі випадки:
1) $a > 0$. Тоді, поділивши ліву і праву частини рівняння на a, матимемо $2^x < a$. Врахувавши ще раз, що $a > 0$, отримаємо $x < \log_2 a$;
2) $a = 0$. Тоді маємо: $0 \cdot 2^x < 0$, нерівність не має розв'язків;
3) $a < 0$. Тоді, поділивши ліву і праву частини нерівності на a і змінивши знак нерівності на протилежний, матимемо: $2x > a$. Оскільки $a < 0$, то отриману нерівність задовольняє будь-яке значення x.

Відповідь. Якщо $a > 0$, то $x < \log_2 a$; якщо $a = 0$, то нерівність не має розв'язків; якщо $a < 0$, то x – будь-яке число.

2. Параметр у задачах, пов'язаних з коренями квадратного рівняння

Досить часто розглядають задачі з параметрами, які пов'язані з коренями квадратного рівняння або квадратного тричлена. У першу чергу це задачі, пов'язані з розміщенням коренів квадратного рівняння відносно деякого числа або деяких чисел. Якщо дискримінант квадратного рівняння є повним квадратом, то можна знайти корені за формулою, а потім порівняти їх із заданим числом або заданими числами. Якщо ж дискримінант квадратного рівняння не є повним квадратом, то запропонований шлях у більшості випадків є досить громіздким. У такому разі розглядають геометричну інтерпретацію.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a обидва корені квадратного тричлена $x^2 - x(2a - 1) + a^2 - a$ належать проміжку $(1; 4)$?

Розв'язання. Маємо дискримінант квадратного тричлена: $D = (2a - 1)^2 - 4(a^2 - a) = 1$ та його корені $x_{1,2} = \frac{2a-1\pm 1}{2}$, тобто $x_1 = a$ і $x_2 = a - 1$. Очевидно, що рівняння має два різних корені при будь-якому значенні a. Запишемо для отриманих коренів вимогу задачі:

$$\begin{cases} 1 < a < 4, \\ 1 < a - 1 < 4, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} 1 < a < 4, \\ 2 < a < 5, \end{cases} \text{ отже, } 2 < a < 4.$$

Відповідь. $2 < a < 4$.

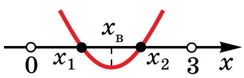
Приклад 5. При яких значеннях параметра a корені $x_{1,2}$ рівняння $(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$ задовольняють умову $0<x_{1,2}<3$?

Розв'язання. 1) Якщо $a=1$, то рівняння стає лінійним: $-2x+1=0$. Коренем його є число 0,5, яке задовольняє вимогу задачі. Отже, значення параметра $a=1$ є розв'язком задачі.

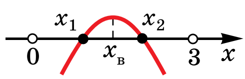
2) Якщо $a \neq 1$, то маємо квадратне рівняння. Його дискримінант $D=(a+1)^2-4a(a-1)=-3a^2+6a+1$ не є повним квадратом, отже, на відміну від приклада 4, корені рівняння будуть ірраціональними, а тому розв'язувати задачу в той самий спосіб, що ми використали у прикладі 4, недоцільно.

У цій задачі скористаємося графічною інтерпретацією – розташуванням графіка квадратичної функції на координатній площині та її властивостями, зокрема напрямком гілок параболи та тим, що нулями функції (абсцисами точок перетину з віссю x) є корені відповідного квадратного рівняння.

Позначимо $f(x)=(a-1)x^2-(a+1)x+a$. Розташуємо параболу $y=f(x)$ у координатній площині так, щоб її нулі, тобто корені $x_{1,2}$ відповідного квадратного рівняння, належали проміжку $(0;\ 3)$, тобто задовольняли умову $0<x_{1,2}<3$. Оскільки розташування осі ординат у таких задачах не впливає на розв'язки, вісь y на малюнку зображувати не будемо. Таких розташувань для нашої параболи всього два: якщо $a-1>0$, то гілки напрямлені вгору (мал. 25.1), а якщо $a-1<0$, то – вниз (мал. 25.2).



Мал. 25.1



Мал. 25.2

Кожне із цих розташувань можна задати системою умов, де $x_в$ – абсциса вершини параболи:

$$\begin{cases} a-1>0, \\ D\geqslant 0, \\ 0<x_в<3, \\ f(0)>0, \\ f(3)>0, \end{cases} \text{(мал. 25.1)} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a-1<0, \\ D\geqslant 0, \\ 0<x_в<3, \\ f(0)<0, \\ f(3)<0. \end{cases} \text{(мал. 25.2)}$$

Кожна із цих систем містить необхідні і достатні умови для розташування параболи саме так, як зображено на малюнках 25.1 і 25.2.

Ці дві системи можна об'єднати в одну: $\begin{cases} 0<x_в<3, \\ D\geqslant 0, \\ (a-1)f(0)>0, \\ (a-1)f(3)>0. \end{cases}$

Розв'язуючи її, отримаємо систему раціональних нерівностей:

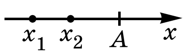
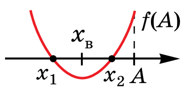
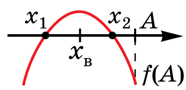
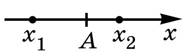
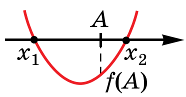
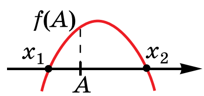
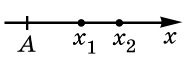
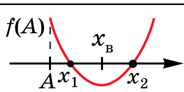
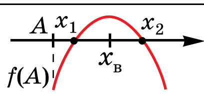
$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{2(a-1)} > 0, \\ \dfrac{a+1}{2(a-1)} < 3, \\ -3a^2 + 6a + 1 \geqslant 0, \\ (a-1)a > 0, \\ (a-1)(7a-12) > 0. \end{cases}$$

Розв'язавши кожну нерівність цієї системи (зробіть це самостійно) та знайшовши переріз отриманих розв'язків, матимемо, що $a \in \left(\dfrac{12}{7}; \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$.   Відповідь. $\{1\} \cup \left(\dfrac{12}{7}; \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$.

У прикладі 5 ми розглянули *задачу про розташування коренів квадратного тричлена відносно даного проміжка*. У схожих на цю задачах може ставитися вимога і до розташування коренів відносно даного числа.

Усі можливі розташування коренів відносно деякого числа та необхідні і достатні умови для цього систематизовано в таблиці.

Розташування коренів $x_{1,2}$, $x_1 \leqslant x_2$, квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ відносно числа A

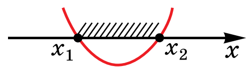
Умова для коренів	$a > 0$	$a < 0$	Висновок
$x_1 < A,\ x_2 < A$ 	 $\begin{cases} x_в < A, \\ f(A) > 0, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$	 $\begin{cases} x_в < A, \\ f(A) < 0, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_в < A, \\ af(A) > 0, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$
$x_1 < A < x_2$ 	 $f(A) < 0$	 $f(A) > 0$	$af(A) < 0$
$x_1 > A,\ x_2 > A$ 	 $\begin{cases} x_в > A, \\ f(A) > 0, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$	 $\begin{cases} x_в > A, \\ f(A) < 0, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x_в > A, \\ af(A) > 0, \\ D \geqslant 0. \end{cases}$

Так само в таблицю можна систематизувати умови для розташування коренів квадратного тричлена відносно даного проміжка.

Деякі задачі з параметрами, що пов'язані з коренями квадратного тричлена, можна розв'язати за теоремою Вієта.

Приклад 6. При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $x^2 - ax - 4 \leqslant 0$ є проміжок завдовжки 5?

Розв'язання. Множина розв'язків даної нерівності буде відрізком лише тоді, коли квадратний тричлен $x^2 - ax - 4$ має два різних корені. Знайдемо дискримінант відповідного квадратного тричлена: $D = (-a)^2 - 4 \cdot (-4) = a^2 + 16 > 0$. Оскільки $D > 0$, то тричлен має два різних корені x_1 і x_2, а розв'язком нерівності є проміжок $[x_1; x_2]$ (мал. 25.3). Тоді для виконання вимоги задачі треба, щоб $|x_1 - x_2| = 5$.



Мал. 25.3

Але $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$.

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = a$; $x_1x_2 = -4$. Отже: $\sqrt{a^2 + 16} = 5$.

Тоді $a^2 + 16 = 25$, тобто $a^2 = 9$. Отже, $a = 3$ або $a = -3$.

Відповідь. ± 3.

3. Розв'язування задач з параметрами аналітичними методами

Розглянемо приклади задач з параметрами, які можна розв'язувати аналітичними методами.

Приклад 7. Розв'язати рівняння:

$$4(a - 1)(\sin^4 x + \cos^4 x) = a^2 + 4a - 3.$$

Розв'язання. Розглянемо окремо кожен з двох випадків: $a = 1$ і $a \neq 1$.

1) Якщо $a = 1$, отримаємо рівняння: $0 \cdot (\sin^4 x + \cos^4 x) = 2$, яке не має коренів.

2) Якщо $a \neq 1$, маємо рівняння: $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{a^2 + 4a - 3}{4(a-1)}$.

Перетворимо ліву частину рівняння та зведемо його до найпростішого тригонометричного рівняння:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{a^2 + 4a - 3}{4(a-1)};$$

$$1 - 0,5(2\sin x \cos x)^2 = \frac{a^2 + 4a - 3}{4(a-1)};$$

$$0,5\sin^2 2x = \frac{-1 - a^2}{4(a-1)};$$

$$2\sin^2 2x = \frac{-1-a^2}{a-1};$$

$$1-\cos 4x = \frac{-1-a^2}{a-1};$$

$$\cos 4x = \frac{a^2+a}{a-1}.$$

Оскільки $-1 \leqslant \cos 4x \leqslant 1$, то отримане рівняння має корені, якщо $-1 \leqslant \frac{a^2+a}{a-1} \leqslant 1$.

Подвійна нерівність рівносильна системі нерівностей:

$\begin{cases} \frac{a^2+a}{a-1} \leqslant 1, \\ \frac{a^2+a}{a-1} \geqslant -1. \end{cases}$ Розв'яжемо її: $\begin{cases} \frac{a^2+1}{a-1} \leqslant 0, \\ \frac{a^2+2a-1}{a-1} \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a-1<0, \\ a^2+2a-1 \leqslant 0; \end{cases}$

отже, $-1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1+\sqrt{2}$.

Для цих значень a маємо корені: $4x = \pm\arccos\frac{a^2+a}{a-1} + 2\pi k$, $k \in Z$, тобто $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{a^2+a}{a-1} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Для інших значень a рівняння коренів не має.

Відповідь. Якщо $a < -1-\sqrt{2}$ або $a > -1+\sqrt{2}$, то коренів немає; якщо $-1-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant -1+\sqrt{2}$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{a^2+a}{a-1} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0$.

Розв'язання. Нехай $2^x = t$. Маємо рівняння:

$t^2 - a(a+1)t + a^3 = 0$.

$D = (a(a+1))^2 - 4a^3 = a^2(a^2 - 2a + 1) = (a(a-1))^2$,

$$t_1 = \frac{a(a+1)-a(a-1)}{2} = a; \quad t_2 = \frac{a(a+1)+a(a-1)}{2} = a^2.$$

Отже, повертаючись до заміни, отримаємо, що $2^x = a$ або $2^x = a^2$. Тоді:

1) якщо $a < 0$, то рівняння $2^x = a$ коренів не має, а для рівняння $2^x = a^2$ маємо корінь: $x = 2\log_2|a| = 2\log_2(-a)$;

2) якщо $a = 0$, то жодне з рівнянь коренів не має;

3) якщо $a > 0$, то кожне з рівнянь має корінь. Для $2^x = a$ маємо: $x = \log_2|a| = \log_2 a$, а з рівняння $2^x = a^2$ отримаємо: $x = 2\log_2|a| = 2\log_2 a$.

Відповідь. Якщо $a < 0$, то $x = 2\log_2(-a)$; якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a > 0$, то $x_1 = \log_2 a$, $x_2 = 2\log_2 a$.

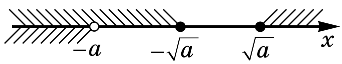
Приклад 9. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-a}-x \geqslant a$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Якщо $a \leqslant 0$, то $x^2 - a \geqslant x^2$ і $\sqrt{x^2-a} \geqslant x$ для всіх $x \in R$. Тому $\sqrt{x^2-a}-x \geqslant 0 \geqslant a$, а отже, нерівність справджується для $x \in R$, тому будь-яке значення x є її розв'язком.
2) Якщо $a > 0$, то нерівність перепишемо у вигляді $\sqrt{x^2-a} \geqslant a+x$. Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

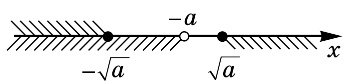
$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases} a + x < 0, \\ x^2 - a \geqslant 0, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} a + x \geqslant 0, \\ x^2 - a \geqslant (a+x)^2. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Для системи (1) маємо: $\begin{cases} a > 0, \\ a + x < 0, \\ x^2 - a \geqslant 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} a > 0, \\ x < -a, \\ \left[\begin{array}{l} x \geqslant \sqrt{a}, \\ x \leqslant -\sqrt{a}. \end{array}\right. \end{cases}$

1-й випадок: $-a \leqslant -\sqrt{a}$, тобто $a \geqslant \sqrt{a}$, отже, $a \geqslant 1$. Тоді $x \in (-\infty; -a)$ (мал. 25.4).
2-й випадок: $-\sqrt{a} < -a$, тобто $\sqrt{a} > a$, отже, $0 < a < 1$. Тоді $x \in (-\infty; -\sqrt{a}]$ (мал. 25.5).



Мал. 25.4

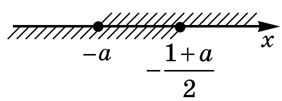


Мал. 25.5

Для системи (2) маємо: $\begin{cases} a > 0, \\ a + x \geqslant 0, \\ x^2 - a \geqslant (a+x)^2, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} a > 0, \\ x \geqslant -a, \\ 2ax \leqslant -a - a^2. \end{cases}$

Оскільки $2a > 0$, поділимо обидві частини останньої нерівності системи на $2a$. Матимемо:

$$\begin{cases} a > 0, \\ x \geqslant -a, \\ x \leqslant -\dfrac{1+a}{2}. \end{cases}$$



Мал. 25.6

Щоб ця система мала розв'язки, має справджуватися умова: $-a \leqslant -\dfrac{1+a}{2}$ (мал. 25.6), тобто $a \geqslant 1$. Тоді $x \in \left[-a; -\dfrac{1+a}{2}\right]$.

В і д п о в і д ь. Якщо $a \leqslant 0$, то $x \in R$; якщо $0 < a < 1$, то $x < -\sqrt{a}$; якщо $a \geqslant 1$, то $x \leqslant -\dfrac{1+a}{2}$.

Приклад 10. При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases}\cos x\cos y = a,\\ \mathrm{ctg}x\,\mathrm{ctg}y = \dfrac{1}{a}\end{cases}$$ має розв’язки?

Р о з в ’ я з а н н я. ОДЗ параметра: $a \neq 0$. Маємо:

$$\begin{cases}\cos x\cos y = a,\\ \dfrac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y} = \dfrac{1}{a}.\end{cases}$$ Із системи маємо: $$\begin{cases}\cos x\cos y = a,\\ \sin x\sin y = a^2.\end{cases}$$

Додавши рівняння почленно, отримаємо $\cos(x - y) = a + a^2$, а віднявши почленно, матимемо $\cos(x + y) = a - a^2$.

Отже, в результаті рівносильних перетворень отримали систему рівнянь: $$\begin{cases}\cos(x-y) = a + a^2,\\ \cos(x+y) = a - a^2.\end{cases}$$

Враховуючи множину значень косинуса, система матиме розв’язки лише у випадку одночасного виконання умов: $-1 \leqslant a + a^2 \leqslant 1$ та $-1 \leqslant a - a^2 \leqslant 1$. Отже, для значень a (з урахуванням ОДЗ параметра) маємо:

$$\begin{cases}a^2 + a - 1 \leqslant 0,\\ a^2 + a + 1 \geqslant 0,\\ a^2 - a - 1 \leqslant 0,\\ a^2 - a + 1 \geqslant 0,\\ a \neq 0;\end{cases}$$ звідки отримаємо, що $a \in \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

В і д п о в і д ь. $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

4. Графічні прийоми розв’язування задач з параметрами

Деякі задачі з параметрами доцільно розв’язувати, використовуючи графічні образи рівнянь вигляду $y = f(x;\ a)$, де a – параметр, або $F(x;\ y;\ a) = 0$.

Розглянемо це на прикладах.

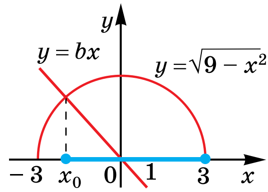
Приклад 11. При яких значеннях параметра a розв’язком нерівності $\sqrt{9 - x^2} \geqslant -a^2 x$ є відрізок завдовжки $\dfrac{15}{4}$?

Р о з в ’ я з а н н я. Нехай $-a^2 = b$, тоді $b \leqslant 0$.

Окремо розглянемо кожний з випадків $b = 0$ та $b < 0$.

1) Якщо $b = 0$, маємо нерівність $\sqrt{9 - x^2} \geqslant 0$, розв’язком якої є проміжок $[-3;\ 3]$, довжина якого більша за $\dfrac{15}{4}$. Отже, при $b = 0$ вимога задачі не виконується.

2) Якщо $b < 0$, розв'яжемо нерівність $\sqrt{9-x^2} \geqslant bx$ графічно. Графік функції $y = \sqrt{9-x^2}$ – це півколо радіуса 3 із центром у початку координат, а графік функції $y = bx$, де $b < 0$, – це пряма, що проходить через початок координат і лежить у II і IV координатних кутах. Графіки зображено на малюнку 25.7, звідки маємо, що розв'язком нерівності $\sqrt{9-x^2} \geqslant bx$ є проміжок $[x_0; 3]$, де x_0 – абсциса точки перетину графіків, тобто корінь рівняння $\sqrt{9-x^2} = bx$. Тоді має справджуватися рівність $3 - x_0 = \frac{15}{4}$, тому $x_0 = -\frac{3}{4}$. Тепер, знаючи корінь рівняння, підставимо його у рівняння, щоб



Мал. 25.7

знайти відповідне йому значення параметра: $\sqrt{9-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{3}{4}b$, тоді $b = -\sqrt{15}$. Але $a^2 = -b = \sqrt{15}$, отже, $a = \pm\sqrt[4]{15}$.

В і д п о в і д ь. $\pm\sqrt[4]{15}$.

Приклад 12. Для яких значень параметра a система рівнянь

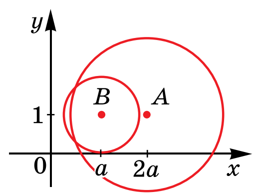
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4ax - 2y = 3 - 4a^2, \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2y = -a^2 \end{cases}$$

має рівно два розв'язки?

Р о з в ' я з а н н я. Перепишемо систему, виділивши попередньо повні квадрати у лівій частині кожного з рівнянь, у вигляді:

$$\begin{cases} (x-2a)^2 + (y-1)^2 = 4, \\ (x-a)^2 + (y-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Тоді перше рівняння системи є рівнянням кола із центром $A(2a; 1)$ радіуса 2.
Друге рівняння системи теж є рівнянням кола із центром $B(a; 1)$ радіуса 1.
Отже, задачу доцільно розв'язувати графічно.



Мал. 25.8

Щоб система мала два розв'язки, треба, щоб відстань AB між центрами кіл задовольняла нерівність: $r_1 - r_2 < AB < r_1 + r_2$, де $r_1 = 2$ і $r_2 = 1$ – радіуси кіл.
Оскільки $AB = |2a - a| = |a|$, маємо нерівність: $1 < |a| < 3$, отже, $a \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.

В і д п о в і д ь. $(-3; -1) \cup (1; 3)$.

• Що таке параметр? • Складіть таблицю розташування коренів квадратного рівняння відносно проміжка.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння (**25.1–25.2**):

25.1. 1) $2x = a$; 2) $ax = 2$; 3) $(a-1)x = a-1$; 4) $(a+1)x = a$; 5) $a^2x = a$; 6) $(a+2)x = (a+2)^2$.

25.2. 1) $4x = a$; 2) $ax = 4$; 3) $(a+2)x = a+2$; 4) $ax = a-2$; 5) $ax = x^2$; 6) $(a-1)^2x = a-1$.

Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність (**25.3–25.4**):

25.3. 1) $3x \geqslant a$; 2) $ax \geqslant 3$; 3) $ax < 0$; 4) $(a-1)x \leqslant 2$.

25.4. 1) $5x \leqslant a$; 2) $ax \leqslant 5$; 3) $ax > 0$; 4) $(a+1)x \leqslant 1$.

При яких значеннях параметра a рівняння має лише один корінь (**25.5–25.6**):

25.5. 1) $x^2 - 2x + a = 0$; 2) $x^2 + ax + 4 = 0$?

25.6. 1) $x^2 + 4x - a = 0$; 2) $x^2 - ax + 9 = 0$?

2 Розв'яжіть рівняння залежно від значень параметра a (**25.7–25.8**):

25.7. 1) $(a^2-1)x = a-1$; 2) $a^2x = 4a^2 - 3a$; 3) $(a+3)x = a^2 - 9$; 4) $(a+4)^2x = a^2 - 16$.

25.8. 1) $(a^2-4)x = a+2$; 2) $a^2x = 5a^2 + 2a$; 3) $(a-2)x = a^2 - 4$; 4) $(a-2)^2x = a^2 - 4$.

Розв'яжіть нерівність залежно від значень параметра a (**25.9–25.10**):

25.9. 1) $(a-1)x \leqslant a-1$; 2) $ax > 3a - 5a^2$.

25.10. 1) $ax \geqslant a$; 2) $(a-1)x < 3a - 3$.

При яких значеннях параметра a має рівно два корені рівняння (**25.11–25.12**):

25.11. 1) $x^2 + 4ax + 16 = 0$; 2) $ax^2 - 6x + 3 = 0$?

25.12. 1) $x^2 - 2ax + 4 = 0$; 2) $ax^2 + 4x - 1 = 0$?

Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність (**25.13–25.14**):

25.13. 1) $a \cdot 3^x \leqslant a^2$; 2) $a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > a^2$; 3) $a^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x \geqslant a$; 4) $a^2 \cdot 5^x > a$.

25.14. 1) $a \cdot 2^x \geqslant a^2$; 2) $a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x < a^2$; 3) $a^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x \leqslant a$; 4) $a^2 \cdot 7^x < a$.

Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння **(25.15–25.16)**:

25.15. 1) $\cos x = a + 2$; 2) $\operatorname{ctg} x = \frac{a-3}{2}$;

3) $a \sin x = -0{,}5a$; 4) $(a-1)\operatorname{tg} x = 2a - 2$.

25.16. 1) $\sin x = a - 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{a+3}{2}$;

3) $a \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$; 4) $(a-2)\operatorname{ctg} x = 2 - a$.

25.17. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ має два різних корені, кожний з яких більший за число -5?

25.18. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - (a+4)x + 4a = 0$ має два різних корені, кожний з яких менший за число 7?

Знайдіть усі значення параметра a, для кожного з яких числа x і y, що задовольняють систему рівнянь **(25.19–25.20)**:

25.19. $\begin{cases} x - y = a, \\ 2x + y = a + 2, \end{cases}$ задовольняють також і нерівність $x < y$.

25.20. $\begin{cases} x + 2y = 2a + 1, \\ 3x + y = a, \end{cases}$ задовольняють також і нерівність $3y < x$.

3 Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння **(25.21– 25.22)**:

25.21. $(2a - 3)x^2 + ax + 2a - 1 = 0$ має не більше ніж один корінь.

25.22. $(3a - 2)x^2 + 2ax + 3a - 1 = 0$ має два різних дійсних корені.

Залежно від значень параметра a розв'яжіть нерівність **(25.23–25.24)**:

25.23. $\sqrt{x-a}(2x-6) \geqslant 0$. **25.24.** $\sqrt{x-a}(x-4) \leqslant 0$.

25.25. Знайдіть усі значення параметра a, за яких нерівність $(3 - a)x^2 - (6 - 2a)x + 7 - 2a \geqslant 0$ є правильною для будь-якого значення x.

25.26. Знайдіть усі значення параметра a, за яких нерівність $(2 - a)x^2 + (4 - 2a)x + 5 - 3a \leqslant 0$ є правильною для будь-якого значення x.

25.27. Розв'яжіть нерівність $(5^x - a)\sqrt{x-1} \leqslant 0$.

25.28. Розв'яжіть нерівність $(3^x - a)\sqrt{x-2} \geqslant 0$.

25.29. Розв'яжіть рівняння $a\sin x = \sin 3x$.

25.30. Розв'яжіть рівняння $a\cos x = \cos 3x$.

При яких значеннях параметра a має єдиний корінь рівняння **(25.31–25.32)**:

25.31. $(x + a)\log_7(2x - 7) = 0$? **25.32.** $(x - a)\log_2(2x - 3) = 0$?

При якому значенні параметра a має єдиний розв'язок система рівнянь **(25.33–25.34)**:

25.33. $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+y^2=a? \end{cases}$ **25.34.** $\begin{cases} y-x=6, \\ x^2+y^2=a? \end{cases}$

25.35. При якому значенні параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2+(2-a)x-a-3=0$ буде найменшою?

25.36. При якому значенні параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2+(a-1)x+a^2-1,5=0$ буде найбільшою?

25.37. При яких значеннях параметра a обидва корені рівняння $ax^2-4x+3a+1=0$ менші за одиницю?

25.38. При яких значеннях параметра a обидва корені рівняння $x^2-(a+1)x+a+4=0$ більші за нуль?

25.39. При яких значеннях параметра a один з коренів рівняння $(2a+1)x^2-ax+a-2=0$ більший за 2, а другий – менший за 2?

25.40. При яких значеннях параметра a один з коренів рівняння $x^2-6ax+2-2a+9a^2=0$ більший за 3, а другий – менший за 3?

25.41. Для кожного значення параметра a знайдіть кількість коренів рівняння $\left|x^2-2x-3\right|=a$.

25.42. Для кожного невід'ємного значення параметра a знайдіть кількість коренів рівняння $\left|x^2+x-2\right|=a$.

4 **25.43.** При яких значеннях параметра a функція $f(x)$ спадає на всій числовій прямій, якщо $f(x) = -x^3 + ax^2 - 3ax + 7$?

25.44. При яких значеннях параметра a функція $f(x)$ зростає на всій числовій прямій, якщо $f(x) = x^3 - ax^2 + 2ax - 9$?

25.45. При яких значеннях a нерівність $-9 < \dfrac{3x^2+ax-6}{x^2-x+1} < 6$ є правильною для будь-якого значення x?

25.46. При яких значеннях a нерівність $-6 < \dfrac{2x^2+ax-4}{x^2-x+1} < 4$ є правильною для будь-якого значення x?

25.47. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $25x^2 + \dfrac{1}{100} \geqslant y + axy + x - 25y^2$ справджується для будь-яких пар чисел $(x; y)$, таких, що $|x| = |y|$.

25.48. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $16y^2 - axy - x \geqslant y - 16x^2 - \dfrac{1}{64}$ справджується для будь-яких пар чисел $(x; y)$, таких, що $|-x| = |y|$.

25.49. При яких значеннях a рівняння $x^3 + 7x^2 + ax + 8 = 0$ має три таких корені, які утворюють геометричну прогресію?

25.50. При яких значеннях a рівняння $x^3 - 13x^2 - ax - 27 = 0$ має три таких корені, які утворюють геометричну прогресію?

25.51. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких функція $f(x) = 7x - 8ax + a\sin 6x + \sin 5x$ спадає на всій своїй області визначення і не має критичних точок.

25.52. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких функція $f(x) = 5x - 8ax - a\sin 7x - \sin 4x$ зростає на всій своїй області визначення і не має критичних точок.

При яких значеннях параметра a рівняння **(25.53–25.54)**:

25.53. $(x - a)(\mathrm{ctg}\, x - 1) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $\left(2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?

25.54. $(x + a)(\mathrm{tg}\, x - \sqrt{3}) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$?

25.55. Знайдіть усі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння $ax^2 + (3a - 2)x + (a - 2) = 0$ менший від числа -1, а інший – більший за число 2.

25.56. При яких значеннях параметра a один з коренів рівняння $(a - 2)x^2 + 2(a + 3)x + 4a = 0$ більший за число -2, а інший – менший за число -3?

Скільки розв'язків залежно від параметра a має система рівнянь **(25.57–25.58)**:

25.57. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0, \\ |x| + |y| = a? \end{cases}$

25.58. $\begin{cases} |x - y| = a, \\ y = ||x| - 1|? \end{cases}$

Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність **(25.59–25.60)**:

25.59. $3 - x^2 > |x + a|$ має хоча б один додатний розв'язок.

25.60. $2 - x^2 > |x - a|$ має хоча б один від'ємний розв'язок.

Для кожного цілого значення параметра a розв'яжіть рівняння **(25.61–25.62)**:

25.61. $5 - 4\sin^2 x - 8\cos^2 x = 3a$.

25.62. $2 - 2\cos 2x - 4\sin x = 3a$.

Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь **(25.63–25.64)**:

25.63. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 - a), \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$ має рівно два розв'язки.

25.64. $\begin{cases}(y-x)^2=\dfrac{2}{3},\\ xy=5a-\dfrac{1}{3}\end{cases}$ має рівно два розв'язки.

Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння **(25.65–25.66)**:

25.65. $\log_3(9^x - 9a^3) = x$ має рівно два корені.

25.66. $\log_2(4^x + a) = x$ має рівно два корені.

25.67. Знайдіть найбільше ціле значення параметра a, при якому існує хоча б одна така пара чисел $(x; y)$, що задовольняє нерівність $x^2 + (y + 3)^2 < 4$ і рівняння $y = 2ax^2$.

25.68. Знайдіть найменше ціле значення параметра a, при якому існує хоча б одна така пара чисел $(x; y)$, що задовольняє нерівність $x^2 + (y - 2)^2 < 1$ і рівняння $y = ax^2$.

25.69. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких всі розв'язки рівняння $2|x-a|+a-4+x=0$ належать проміжку $[0; 4]$.

25.70. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких всі розв'язки рівняння $3|x+2a|-3a+x-15=0$ належать проміжку $[4; 9]$.

25.71. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$ має тільки один корінь.

25.72. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $|(a+1)x-2|=(a+1)x^2-2ax+2$ має тільки один корінь.

25.73. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $(x-a)^2(a(x-a)^2-a-1)+1=0$ має додатних коренів більше, ніж від'ємних.

25.74. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $(x-a)^2((x-a)^2-2a-4)+2a+3=0$ має від'ємних коренів більше, ніж додатних.

25.75. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких розв'язком хоча б однієї з нерівностей $x^2+5a^2+8s>2(3ax+2)$ або $x^2+4a^2 \geqslant a(4x+1)$ є будь-яке число.

25.76. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівності $x^2+4ax+3a^2>1+2a$ і $x^2+2ax \leqslant 3a^2-8a+4$ мають хоча б один спільний розв'язок.

25.77. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $|x+a|+x^2<2$ має хоча б один додатний розв'язок.

25.78. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $4 - |x + a| > x^2$ має хоча б один від'ємний розв'язок.

25.79. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких множина розв'язків нерівності $(a - x^2)(a + x - 2) < 0$ не містить жодного розв'язку нерівності $|x| \leqslant 1$.

25.80. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких множина розв'язків нерівності $(x^2 - a)(a + 2x - 8) > 0$ не містить жодного розв'язку нерівності $|x| \leqslant 2$.

Для кожної пари додатних значень параметрів a і b розв'яжіть нерівність **(25.81–25.82)**:

25.81. 1) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} > \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right|$; 2) $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} > \frac{1}{x} + \frac{1}{b}$.

25.82. $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} > \frac{1}{x} - \frac{1}{b}$.

При яких значеннях параметра a рівняння **(25.83–25.84)**:

25.83. $(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2)$ має тільки один корінь?

25.84. $(x+2)(x+4) + 5(x+2)\sqrt{\frac{x+4}{x+2}} - (a+2)(a-3) = 0$ має тільки один корінь?

Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких має єдиний розв'язок система **(25.85–25.86)**:

25.85. $\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

25.86. $\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| - 2 = 5y + 3x^2 - 5a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

25.87. Програміст Олександр, студент четвертого курсу, отримав свій перший гонорар у розмірі 4000 гривень за участь у розробці програмного продукту. Він вирішив на чверть отриманих на руки грошей придбати букет троянд для своєї вчительки інформатики Ірини Миколаївни. Яку найбільшу кількість троянд зможе придбати студент, якщо утриманий з його першого заробітку податок на доходи становить 18 % та 1,5 % складає військовий збір, вартість кожної троянди – 50 гривень, а в букеті має бути непарна їх кількість?

25.88. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1975 р.*) Доведіть, що для всіх $n \in Z$ число $n^n - n^2 + n - 1$ кратне числу $(n-1)^2$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 25

1. Укажіть рівняння, яке не має коренів на множині дійсних чисел.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 - 1 = 0$	$x^3 - 1 = 0$	$x^3 + 1 = 0$	$x^4 + 1 = 0$	$x^4 - 1 = 0$

2. Укажіть парну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = 2x$	$y = 2x - 3$	$y = 2x^2 - 3$	$y = 2x^3 - 3$	$y = 2x^3$

3. Обчисліть $\cos^2 22{,}5° - \sin^2 22{,}5°$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

4. У шухляді 5 білих, 3 чорні і 2 зелені кульки. Навмання вибирають одну з них. Яка ймовірність того, що вона не зелена?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

5. При якому значенні a рівняння $\arcsin x = a$ не має розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	$1{,}2$

6. Розв'яжіть нерівність $\log_4 0{,}25 \cdot \log_3 x > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(1; 3)$	$(0; 1)$	$(3; +\infty)$

7. Установіть відповідність між функцією $y = f(x)$ (1–4) та значенням інтеграла $\int_0^1 f(x)dx$ (А–Д).

Функція	*Значення інтеграла*
1 $f(x) = x$	**А** 0,5
2 $f(x) = 2x + 3$	**Б** 1
3 $f(x) = 3x^2$	**В** 2
4 $f(x) = 4x^3 + 2$	**Г** 3
	Д 4

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Обчисліть $27^{\log_3 2} - \dfrac{\log_5 9}{\log_5 3}$.

9. Знайдіть найбільше значення функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 7$ на проміжку $[-2; 0]$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 9

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 2x - 5y = 3. \end{cases}$

А. (4; –1) **Б.** (1; 4) **В.** (4; 1) **Г.** (10; –1)

2. При якому значенні параметра a рівняння $(a + 3)x = a + 3$ має безліч коренів?

А. такого значення не існує **Б.** 3 **В.** 6 **Г.** –3

3. Укажіть значення параметра a, при яких рівняння $x^2 + 4x - a = 0$ має лише один корінь.

А. –4 **Б.** 4 **В.** –16 **Г.** 0

2

4. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіків рівнянь $x + 3y = 5$ та $|x - y| = 1$.

А. (–2; –1); (0,5; 1,5) **Б.** (2; 1); (0,5; 1,5)
В. (2; 1); (–0,5; –1,5) **Г.** (2; 1)

5. Периметр прямокутника дорівнює 23 см, а його площа – 28 см². Знайдіть різницю між більшою і меншою сторонами прямокутника.

А. 3,5 см **Б.** 4 см **В.** 4,5 см **Г.** 5 см

6. Укажіть кількість значень параметра a, при яких рівняння $a(a^2 - 9)x = a - 3$ не має коренів.

А. жодного **Б.** один **В.** два **Г.** три

3

7. Знайдіть $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ – розв'язок системи $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 400, \\ 3y - x = 2. \end{cases}$

А. 2 **Б.** 4 **В.** 6 **Г.** 8

8. Серед пар (x_0; y_0) розв'язків системи $\begin{cases}(x+y)^2-4(x+y)-5=0,\\(x-y)^2+2(x-y)-3=0\end{cases}$ виберіть ту, для якої добуток x_0y_0 набуває найбільшого значення. У відповіді укажіть цей добуток.

А. 4 **Б.** 6 **В.** 8 **Г.** 10

9. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $|x^2-4x-5|=a$ має рівно два розв'язки.

А. $a = 0$; $a > 9$ **Б.** $a = 0$; $a \geqslant 9$ **В.** $a = 0$ **Г.** $a > 9$

4 **10.** Серед усіх пар (x_0; y_0), що є розв'язками системи $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=\dfrac{10}{3},\\xy^2=32,\end{cases}$ виберіть ту, для якої x_0 і y_0 – раціональні числа, та запишіть у відповідь суму $x_0 + y_0$.

А. 8 **Б.** 12 **В.** 16 **Г.** 10

11. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких усі корені рівняння $2x^2-(2a-5)x+a-3=0$ більші за 0, але менші за 1.

А. $a < 4$ **Б.** $3 < a < 4$ **В.** $a > 3$ **Г.** $0 < a < 4$

12. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $\log_{\frac{1}{3}}(9^x-2a)+x=0$ має рівно два корені.

А. $-1 < a < 0$ **Б.** $0<a<\dfrac{1}{8}$ **В.** $-\dfrac{1}{8}<a<0$ **Г.** $-\dfrac{1}{8}<a<\dfrac{1}{8}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 24–25

1 **1.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x+2y=5,\\2x-3y=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-4y=7,\\2x+4y=-2.\end{cases}$

2. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $ax = -7$; 2) $(a - 3)x = (a - 3)^2$.

3. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $7x \geqslant a$; 2) $ax > 7$.

2 **4.** Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіків рівнянь $3x - y = 7$ та $|x - y| = 1$.

5. Периметр прямокутника дорівнює 17 см, а його площа – 15 см². Знайдіть сторони прямокутника.

6. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $(a-3)^2x=a^2-9$; 2) $a\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

3 **7.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}(x+y)^2-(x+y)-2=0,\\(x-y)^2+2(x+y)-3=0.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=72,\\2x-y=1.\end{cases}$

8. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність

$$(4^x-a)\sqrt{x-1}\geqslant 0.$$

4 **9.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2{,}5,\\xy=27.\end{cases}$$

Додаткові завдання

3 **10.** Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x-y}+\sqrt[4]{x+4}=4,\\\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}=8.\end{cases}$$

4 **11.** Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких один з коренів рівняння $(a+2)x^2-2a(a-3)x+4a=0$ менший за 2, а другий більший за 3.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 22

1 Розв'яжіть рівняння (**1–16**):

1. 1) $3x=18$; 2) $-4x=\dfrac{1}{2}$; 3) $2x=-20$; 4) $-7x=-21$.

2. 1) $3(x+2)-7=2x$; 2) $7(x+1)-2x=3(x-5)$.

3. 1) $|x|=2$; 2) $|x|=-3$; 3) $\sqrt{x}=4$; 4) $\sqrt{x}=-2$.

4. 1) $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x=-1$;

3) $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}$.

5. 1) $3^x=27$; 2) $2^{x+3}=32$; 3) $8^{x-3}=1$; 4) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{2x+1}=\dfrac{1}{64}$.

6. 1) $\log_2 x=-1$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} x=2$;

3) $\log_5(x+3)=0$; 4) $\lg(x-3)=2$.

2 **7.** 1) $2x^2-10=0$; 2) $5x^2-4x=0$;
3) $2x^2+5x-7=0$; 4) $36x^2-12x+1=0$;
5) $x^2-6x+3=0$; 6) $x^2-4x+1=0$.

8. 1) $x^2+4x=-3$; 2) $8x=x^2+12$;
3) $x(x+1)=12$; 4) $(x+2)^2=7x+2$.

9. 1) $|4x + 9| = 1$; 2) $|2x - 3| = |3x - 2|$;

3) $|x + 3| = 9 - x$; 4) $|x - 8| = \frac{1}{9}x$.

10. 1) $\sqrt[9]{x+3} = \sqrt[9]{x^2+3}$; 2) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-5}$;

3) $\sqrt{3-x} = x-1$; 4) $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 3 = 0$.

11. 1) $\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{4}{2} = \frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 4) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

12. 1) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; 2) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x - 2 = 0$.

13. 1) $2 - \cos 2x = 3\sin x$; 2) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$.

14. 1) $3^{2x+3} \cdot 5^{2x+3} = 3^{5x} \cdot 5^{5x}$; 2) $2^{x-2} + 2^{x-1} = 6$.

15. 1) $16^x - 4^x - 12 = 0$; 2) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 99 = 0$.

16. 1) $\log_2 \frac{x}{1-x} = \log_2(1+x)$; 2) $\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 = 0$.

17. Периметр прямокутника дорівнює 48 см, причому його довжина вдвічі більша за ширину. Знайдіть сторони прямокутника та його площу.

3 Розв'яжіть рівняння (**18–20**):

18. 1) $\frac{x^4 + x^2 - 2}{x - 1} = 0$; 2) $\frac{6}{x^2 - 36} - \frac{3}{x^2 - 36} + \frac{x - 12}{x^2 + 6x} = 0$.

19. 1) $x|x - 1| - 2 = 0$; 2) $\frac{x+2}{|x+2|} \cdot x^2 - 4 = 0$.

20. 1) $x^2 + 6x + |x + 2| + 8 = 0$; 2) $x^2 - 6|x - 2| - 8x + 11 = 0$.

21. Знайдіть усі корені рівняння $|x^2 - x - 3| = -x - 1$, що задовольняють умову $x > -\frac{\sqrt{14}}{3}$.

22. Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій:

1) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} = 2x - 4$; 2) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1} = 2x + 3$.

23. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[6]{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$.

24. Знайдіть суму всіх коренів рівняння

$$\sqrt{-2x-1}(4x^2+5x+1) = 0.$$

Розв'яжіть рівняння (**25–30**):

25. 1) $\frac{3}{\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{3}$; 2) $\frac{15}{4 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)} = 3$.

26. 1) $\sin 8x + \sin 2x = \sqrt{2}\cos 3x$;

2) $\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{3}\sin 2x$.

27. $6\sin^2 x - 3\sin x\cos x = 2 + 5\cos^2 x$.

28. 1) $3^{x+1}\cdot 5^{x-1} = 135$; 2) $2^x + 2^{2-x} = 5$;

3) $5^{2x-3} = 2\cdot 5^{x-1} + 15$; 4) $\dfrac{3}{2^{3-x}} = 4^{x-4} - 7$.

29. 1) $2\log_3(x-1) = \log_3(3x-5)$; 2) $\lg(x-9) = 2 - \lg(2x-1)$;

3) $\log_3(4^x - 1) + \log_3(4^x - 3) = 1$;

4) $\log(3\cdot 2^x - 4) = x + 1$.

30. 1) $\log_4^2 x + \dfrac{1}{2}\log_4(16x) - 4 = 0$;

2) $\log_3(2x-1) = 3 + 4\log_{2x-1} 3$.

31. У кошику було в 4 рази менше винограду, ніж у ящику. Після того як з ящика до кошика переклали 3 кг винограду, у кошику стало втричі менше винограду, ніж у ящику. Скільки кілограмів винограду було в кошику і скільки – у ящику?

32. За 4,5 год човен за течією річки долає таку саму відстань, що й за 6 год проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна дорівнює 7 км/год.

33. З міста в село, відстань між якими 16 км, вийшов пішохід. Через 2 год 40 хв у тому самому напрямку виїхав велосипедист і прибув у село одночасно з пішоходом. Знайдіть швидкість велосипедиста, якщо вона на 8 км/год більша за швидкість пішохода.

34. Катер проплив 45 км за течією і 7 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії 2 км/год.

35. Перший оператор комп'ютерного набору набрав 120 сторінок рукопису, а другий – 144 сторінки. Перший щодня набирав на 4 сторінки більше, ніж другий, і працював на 3 дні менше, ніж другий. Скільки сторінок щодня набирав перший оператор і скільки – другий?

36. Майстер може виконати завдання на 3 год швидше, ніж його учень. Якщо майстер пропрацює 4 год, а потім його замінить учень і пропрацює 3 год, то завдання буде виконано. За скільки годин може виконати завдання майстер і за скільки – учень, працюючи самостійно?

4 Розв'яжіть рівняння (**37–38**):

37. 1) $(x^2 - 8x - 20)(x^2 - 8x + 15) = 36$;

2) $(x^2 - 6x)^2 = 81 + 2(x-3)^2$;

3) $\dfrac{x^2 + x - 5}{x} + \dfrac{3x}{x^2 + x - 5} = -4$;

4) $\frac{8}{(x-1)(x+4)}+\frac{6}{(x+1)(x+2)}=1.$

38. 1) $(\sqrt{x-3}-1)(x^2-13x^2+36)=0;$

2) $(x^2-6x+5)\sqrt{8+2x-x^2}=0.$

39. Розв’яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій:

1) $3-|x|=\sqrt{9+x^2};$ 2) $|1-x^2|+3=\sqrt{9-\sqrt{x+1}}.$

40. Розв’яжіть рівняння:

1) $|x-2|-|2x+6|=2;$ 2) $|x|+|x-6|=6.$

41. Розв’яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій:

1) $\sqrt{x}+1=\frac{6}{x+2};$ 2) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=2-x^2.$

Розв’яжіть рівняння (**42–52**):

42. $\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1.$

43. 1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12};$

2) $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}.$

44. 1) $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0;$ 2) $\sqrt[5]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[5]{\frac{x+3}{5-x}}=2;$

3) $(x+4)(x+1)=6+3\sqrt{x^2+5x+2};$

4) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$

45. $x\sqrt{36x+1261}=18x^2-17x.$

46. 1) $\sin^2 2x+\sin^2 x=\cos^2 4x+\cos^2 3x;$ 2) $1-\cos 6x=\operatorname{tg} 3x.$

47. $2^x+3^x+6^x=7^x.$

48. 1) $\sqrt{2\log_8(-x)}=\log_8\sqrt{x^2};$

2) $\frac{\log_3 x-1}{\log_3\frac{x}{3}}-2\log_3\sqrt{x}+\log_3^2 x=3;$

3) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14-\lg x;$

4) $\log_{0,5}^2 4x+\log_2\frac{x^2}{8}=8.$

49. 1) $\log_{-2x}(2x^2-x-1)=1;$ 2) $\frac{\log_7(x^2-2x-2)}{\log_{13}\frac{x+1}{4}}=0.$

50. 1) $\sin\frac{3}{4}x+\cos\frac{2}{3}x=2;$ 2) $\left|\cos\frac{2x}{3}\right|\sin\frac{x}{2}=-1.$

51. 1) $(\log_5 5x)\log_{25} x = 5 - \log_5 x$; 2) $\log_{x^2}\sqrt{2} + \log_x \dfrac{1}{16} = 7,5$.

52. $\big|x + 1 - |x + 3|\big| - 6 = x$.

До § 23

1 Розв'яжіть нерівність (**53–55**):

53. 1) $2x < 10$; 2) $-4x \geqslant 16$; 3) $2x > -8$; 4) $-x \leqslant -7$.

54. 1) $7(x - 2) + 4x > 10(x - 1)$;
2) $-(x - 1) - 2(x + 3) > 4(x + 1)$.

55. 1) $|x| \geqslant -7$; 2) $|x| > 4$; 3) $|x| < -2$; 4) $|x| \leqslant 3$.

56. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x > 5, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -2, \\ x \geqslant 1, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 1, \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 1, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$

Розв'яжіть нерівність (**57–60**):

57. 1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt{x} > 3$; 3) $\sqrt[4]{x} \leqslant 2$; 4) $\sqrt[10]{x} > 0$.

58. 1) $5^x \geqslant 25$; 2) $8^x < 1$; 3) $\left(\dfrac{1}{15}\right)^x \leqslant \dfrac{1}{15}$; 4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > \dfrac{1}{9}$.

59. 1) $\log_7 x > \log_7 9$; 2) $\log_{0,8} x \geqslant \log_{0,8} 3$;
3) $\log_5 x \leqslant \log_5 3$; 4) $\log_{\frac{1}{7}} x < \log_{\frac{1}{7}} 2$.

2 **60.** 1) $2x^2 + 3x - 5 \geqslant 0$; 2) $x^2 - x - 12 < 0$.

61. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:
1) $(x - 5) + (x + 1) > 0$; 2) $(x - 3)(x + 2) \leqslant 0$;
3) $\dfrac{x - 2}{x + 3} \geqslant 0$; 4) $\dfrac{x + 1}{x - 5} < 0$.

62. Розв'яжіть нерівність:
1) $|x + 5| < 7$; 2) $|3x + 1| \leqslant 1$;
3) $|4x - 3| \geqslant 5$; 4) $|2x - 6| > 8$.

63. Розв'яжіть систему нерівностей:
1) $\begin{cases} 5x > 20, \\ -9x > -45; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 3 < 7, \\ x - 3 > 6; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x + 6 \geqslant 3x, \\ 1,5 - 0,2x \geqslant 0,3x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4(x - 1) > 20, \\ -7(x + 1) < -21. \end{cases}$

64. Розв'яжіть подвійну нерівність:
1) $-5 < 5x < 15$; 2) $0 < x + 7 \leqslant 9$;
3) $4 \leqslant x - 5 \leqslant 7$; 4) $0 \leqslant \dfrac{x}{4} < 3$.

Розв’яжіть нерівність (65–69):

65. 1) $\sqrt{x+1} > 3$; 2) $\sqrt[4]{x-2} \leqslant 2$;
3) $\sqrt[5]{2x-3} < 1$; 4) $\sqrt[12]{3x-12} \geqslant 0$.

66. 1) $\sin x < -\frac{1}{2}$; 2) $\cos x \geqslant 0$;
3) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$.

67. 1) $\sin 2x \geqslant 0$; 2) $\cos \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

68. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 32$; 2) $5^{x-4} > 1$; 3) $5^{3x-1} \geqslant 25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} \leqslant 3$.

69. 1) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant -1$; 2) $\log_3(x+2) < 2$;
3) $\log_3(x+1) > \log_3(3-x)$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(x-1) \leqslant \log_{\frac{1}{4}}(2x-4)$.

70. Знайдіть найбільший цілий розв’язок нерівності
$$\log_2 4x + \log_{\frac{1}{8}} x < 4.$$

3 Розв’яжіть нерівність (71–74):

71. 1) $(x^2-16)(x+2) < 0$; 2) $\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geqslant 0$.

72. 1) $|x-2| \geqslant 17-3x$; 2) $|2x + 6| < x + 15$.

73. 1) $\frac{3x+2}{x-1} < 2$; 2) $\frac{1}{x-1} \geqslant -2$;
3) $\frac{1}{2-x} \leqslant 1$; 4) $\frac{3x+4}{5-8x} \leqslant -3$.

74. 1) $x^2 - 4|x| - 12 \leqslant 0$; 2) $x^2 - 4|x| - 5 > 0$;
3) $4|x+2| < 2x+10$; 4) $3|x+1| \geqslant x+5$.

75. Знайдіть усі натуральні розв’язки системи нерівностей:
1) $\begin{cases} \frac{3x+4}{8} < \frac{2x+3}{5}, \\ 5(x-5) < 3-2x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-6x-7 \leqslant 0, \\ |x| \geqslant 4. \end{cases}$

76. Знайдіть область визначення функції
$$y = \sqrt[4]{16-8x} + \sqrt[11]{3x-6} + \frac{1}{\sqrt[6]{5x-0,5}}.$$

77. Розв’яжіть нерівність:
1) $\sqrt{x+2} < \sqrt{x^2-x-6}$; 2) $\sqrt{x-2} \geqslant \frac{x}{3}$.

78. Знайдіть суму всіх цілих розв'язків нерівності $\sqrt{2x+3} \geqslant x$.

79. Розв'яжіть нерівність $3\,\mathrm{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-3 \geqslant 0$.

80. Знайдіть деякі три розв'язки нерівності:

1) $\left|\sin\frac{x}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, що належать проміжку $[0;\ 2\pi]$

2) $|\cos 4x| > \frac{1}{2}$, що належать проміжку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

81. Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x} > \frac{1}{16}$; 2) $\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{2x-6} \leqslant 27$.

82. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{4^{x+2}-2^{3x}}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{7^x+7^{x-1}-8}}$.

83. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x-1}-8\left(\frac{1}{7}\right)^{x}+1 \leqslant 0$.

Розв'яжіть нерівність **(84–88)**:

84. 1) $3^{x+2} > \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{x}}$; 2) $(3^x-9)(x^2-3x-4) > 0$.

85. 1) $3\cdot 9^x < 8\cdot 3^x+3$; 2) $5^x-5^{2-x} > 20$.

86. 1) $\log_2\left(x^2-3x\right) \leqslant 2$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{x+2} < 1$.

87. 1) $\log_2^2 x-\log_2 x-6 \leqslant 0$; 2) $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3) > -1$.

88. 1) $\log_3(5x^2+6x+1) \leqslant 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}}(4x^2-16x+15) \geqslant -2$.

89. Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності

$$\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}(x^2+2x+16-2\sqrt{55}) \leqslant 2.$$

90. Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$\log_{0,8}(4-x^2) \geqslant \log_{0,8}(6|x|-3)?$$

91. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності

$$2\log_{\sqrt{11}}2+\log_{\sqrt{11}}\left(2^{x^2-1}-\frac{1}{4}\right) \leqslant \log_{\sqrt{11}}31.$$

92. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,5}(x-0,5)+\log_{0,5}(x-1) \geqslant 1$;

2) $\log_{0,5}(4-x)+\log_{0,5}(x-1) \geqslant \log_{0,5}2$.

93. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} \log_5^2(6-x) + 2\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6-x) + 3 \geqslant 0; \\ |x+99| \leqslant 100. \end{cases}$$

4 Розв'яжіть нерівність (**94–96**):

94. 1) $|x-2| + |x+1| \geqslant 5$; 2) $|2x+6| - |x-1| < 2$.

95. 1) $x^2 - |5x-3| < 2 + x$; 2) $2x^2 - 9x + 9 \geqslant |x-2|$;

3) $\dfrac{2x+5}{|x+1|} \geqslant 1$; 4) $\dfrac{3x-4}{|x-3|} \geqslant 2$.

96. 1) $\sqrt{3x-x^2} < 4 - x$; 2) $\sqrt{x^2-4x} \geqslant x-3$;

3) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{x+3}$; 4) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} \geqslant \sqrt{2x+4}$.

97. 1) Розв'яжіть нерівність $\sin^6 x + \cos^6 x \leqslant \dfrac{7}{16}$.

2) Скільки цілих розв'язків цієї нерівності належить проміжку $[0; 2\pi]$?

Розв'яжіть нерівність (**98–101**):

98. 1) $(10^x - \sqrt{10})(x^2 + 2x - 3) < 0$; 2) $\dfrac{2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8}{3 - 2x - x^2} \geqslant 0$.

99. 1) $4^x > 5 - x$; 2) $\log_2(x-3) \leqslant 6 - x$.

100. 1) $\dfrac{\log_3(x+1)}{x^2 - x - 2} \geqslant 0$; 2) $(x^2 - 4x)\log_5(2x+1) < 0$.

101. $\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8} \leqslant \dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$.

102. Знайдіть найменший натуральний розв'язок нерівності

$$27 + x^3 \cdot 3^x > 3^{x+3} + x^3.$$

103. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 2^{4x - \frac{1}{2}x^2} < 2^{2-4x} \cdot (\sqrt{2})^{x^2} + 3; \\ x^2 - 8x \leqslant 0. \end{cases}$

До § 24

1 **104.** Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 5x - 2y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - x = 10, \\ 4x + y = -1. \end{cases}$

105. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 4x + 3y = 11, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5y = 1, \\ 3x - 10y = -1. \end{cases}$

2 Розв'яжіть систему рівнянь **(106–107)**:

106. 1) $\begin{cases} 7(x-3)=5y-4, \\ 2(x-1)=3(y+2); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x+y)-6y=3, \\ 6(3x-y)+18x=13. \end{cases}$

107. 1) $\begin{cases} y-3x=2, \\ |y|+x=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-2x=3, \\ |x-1|+y=3. \end{cases}$

108. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіків рівнянь $2x-y=5$ та $|x-y|=3$.

Розв'яжіть систему рівнянь **(109–114)**:

109. 1) $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x-y}=10, \\ x+y-\dfrac{5}{x-y}=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{3}{x-y}+\dfrac{4}{x+y}=2, \\ \dfrac{3}{x-y}-\dfrac{4}{x+y}=0. \end{cases}$

110. 1) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3\sqrt{x}+\sqrt{y}=10, \\ \sqrt{x}+3\sqrt{y}=6. \end{cases}$

111. 1) $\begin{cases} 2x-3\sin y=8,5, \\ -3x+2\sin y=-14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x+1,5y=-7, \\ -6\cos x-4y=17. \end{cases}$

112. 1) $\begin{cases} 3^x+5^y=14, \\ 3^x-5^y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7\cdot 2^x-5^y=7, \\ 2^x\cdot 5^y=14. \end{cases}$

113. 1) $\begin{cases} \log_2 x+\log_3 y=2, \\ \log_2 x-\log_3 y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x-7\log_y 2=4, \\ 4\cos x+2\log_y 2=1. \end{cases}$

114. 1) $\begin{cases} x+2y=10, \\ 3xy-x^2=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-x=4, \\ y^2+2xy=60. \end{cases}$

115. За 7 порцій млинців і 2 салати заплатили 170 грн. Скільки коштує одна порція млинців і скільки – один салат, якщо 2 порції млинців на 5 грн дешевші за 3 салати?

116. Теплохід за 3 год за течією і 2 год проти течії долає 71 км. Цей самий теплохід за 4 год проти течії долає на 7 км більше, ніж за 3 год за течією. Знайдіть власну швидкість теплохода і швидкість течії.

117. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо їх сума дорівнює 14 см, а площа трикутника дорівнює 24 см^2.

3 Розв'яжіть систему рівнянь **(118–126)**:

118. 1) $\begin{cases} |x+1|+|y|=4, \\ 3|y|+x-3=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x|+|y+1|-4=0, \\ 3|x|+y-5=0. \end{cases}$

119. $\begin{cases}(x+y)^2+4(x+y)-5=0,\\(x-y)^2-x+y-6=0.\end{cases}$

120. 1) $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt[3]{x-y}=8,\\\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[6]{x-y}=4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{y}+5\sqrt{x}=8,\\y-25x=-16;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=1,\\xy=-8;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{5x}{x+y}}-\sqrt{\dfrac{x+y}{5x}}=1,5,\\xy-x+y=1.\end{cases}$

121. 1) $\begin{cases}\sqrt{\sin x}\cos y=0,\\2\sin^2 x-\cos 2y-2=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{\cos 2x}\cos x=0,\\2\sin^2 x=\cos\left(2y-\dfrac{\pi}{3}\right).\end{cases}$

122. 1) $\begin{cases}3\sin 3x+\cos y=-4,\\x+y=\dfrac{3\pi}{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4\cos 3x-\cos 2y=-5,\\x+2y=\pi.\end{cases}$

123. 1) $\begin{cases}4^x-3^{2y}=7,\\4^{\frac{x}{2}}-3^y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2\sin x-\sin 2x=2\sin^2\dfrac{x}{2},\\4^y=x.\end{cases}$

124. 1) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=288,\\4x-y=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}16^{2x}+16^{2y}=6,\\16^{x+y}=2\sqrt{2}.\end{cases}$

125. 1) $\begin{cases}3^x\cdot 5^y=45,\\\log_3(2x-y)=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^{2y-x}=8,\\\lg xy-\lg 2=1.\end{cases}$

126. 1) $\begin{cases}\log_{36}x-\log_6 y=0,\\x^2+y^2=20;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_{\sqrt{3}}x+\log_3 y=2,\\\log_{\sqrt{5}}(2x-y)=2.\end{cases}$

127. Сума квадратів цифр двоцифрового числа дорівнює 20. Якщо до цього числа додати 18, то отримаємо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайдіть це число.

128. Площа прямокутника дорівнює 18 см^2. Якщо одну з його сторін збільшити на 2 см, а другу – на 1 см, то матимемо прямокутник з площею 35 см^2. Знайдіть периметр початкового прямокутника.

129. З міста *A* до міста *B*, відстань між якими 240 км, одночасно виїхали дві автівки. Через 2 год виявилося, що перша проїхала на 20 км більше, ніж друга. Знайдіть швидкість кожної з них, якщо на весь шлях перша витратила на 20 хв менше, ніж друга.

4 Розв’яжіть систему рівнянь (**130–135**):

130. $\begin{cases} |x+1| + y = 4, \\ x - |y-2| = 1. \end{cases}$

131. 1) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6, \\ xy + x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - \dfrac{y}{x} = 6, \\ 3xy + \dfrac{2y}{x} = 28. \end{cases}$

132. 1) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2y + xy^2 = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2 - 4xy + 3x^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 5, \\ (x+y)(x^2-y^2) = 9. \end{cases}$

133. 1) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0,5\sqrt{xy}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^4 - \sqrt{y} = 1, \\ 3x^8 + 2y - 2x^4\sqrt{y} = 3. \end{cases}$

134. 1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^5\sqrt{9x^2 - y^2} = 0, \\ 4x - y + \sqrt{9x^2 - y^2} = 1. \end{cases}$

135. $\begin{cases} \cos x \sin y = 0,75, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$

136. Знайдіть усі розв’язки системи рівнянь $\begin{cases} \sin(x + 2y) = 0, \\ \cos(x + y) = 1, \end{cases}$ що задовольняють умову $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $-\pi \leqslant y \leqslant \pi$.

Розв’яжіть систему рівнянь (**137–139**):

137. 1) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 40, \\ 5^x \cdot 2^y = 250; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x}} = 2, \\ (x+y) \cdot 3^x = 6. \end{cases}$

138. 1) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} + 2^{\frac{y-x}{2}} = \dfrac{5}{2}, \\ \lg(2x - y) + 1 = \lg(y + 2x) + \lg 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2\log_{x^2} y + \log_y x = \dfrac{5}{2}, \\ xy^2 = 32. \end{cases}$

139. 1) $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8}y^2, \\ y + \dfrac{1}{x} = 3x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$

До § 25

1

140. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $6x = a$; 2) $ax = 6$; 3) $(a - 2)x = a - 2$;
4) $(a + 3)x = a$; 5) $a^3x = a^2$; 6) $(a + 1)^2x = a + 1$.

141. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $5x \geqslant a$; 2) $ax > 5$; 3) $ax \leqslant 0$; 4) $(a+1)x \leqslant 2$

142. При яких значеннях параметра a має один корінь рівняння:

1) $x^2 + 8x - a = 0$; 2) $x^2 - ax + 25 = 0$?

2

143. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $(a^2 - 16)x = a + 4$; 2) $a^2x = 7a^2 + 5a$;
3) $(a + 1)x = a^2 - 1$; 4) $(a + 1)^2x = a^2 - 1$.

144. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $(a + 3)x < a + 3$; 2) $ax \geqslant 4a - a^2$.

145. При яких значеннях параметра a має рівно два корені рівняння:

1) $x^2 + 2ax + 1 = 0$; 2) $ax^2 - 8x + 2 = 0$?

146. Для всіх значень параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $a \cdot 5^x < a^2$; 2) $a\left(\frac{1}{7}\right)^x \geqslant a$;

3) $a^2\left(\frac{1}{2}\right)^x > a$; 4) $a^2 \cdot 7^x \geqslant a$.

147. Для всіх значень параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = a - 3$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{a+2}{5}$;

3) $a \sin x = -a$; 4) $(a+1)\operatorname{ctg} x = a + 1$.

148. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 + (a+6)x + 6a = 0$ належать проміжку $(-10; -2)$?

149. Знайдіть усі значення параметра b, для кожного з яких числа x і y, що задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 5y = 4, \\ x - 2y = 2b, \end{cases}$ задовольняють також і нерівність $x + y > 0$.

3

150. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $(a-2)x^2 - ax + 2a + 1 = 0$ має два різних дійсних корені.

151. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+a}(x+2) \geqslant 0$ залежно від значень параметра a.

152. При яких значеннях параметра a для всіх дійсних значень x справджується нерівність:

1) $ax^2 - 7x + 4a < 0$; 2) $x^2 - ax - \frac{2}{a} > 0$?

153. При яких значеннях параметра a областю визначення функції $f(x)=\sqrt[4]{(a+1)x^2+(2-2a)x+3a-3}$ є множина всіх дійсних чисел?

154. Розв'яжіть нерівність $(7^x-a)\sqrt{x+1}>0$.

155. Розв'яжіть рівняння $a\sin x=\sin 2x$.

156. При яких значеннях параметра a рівняння $(x-2a)\log_3(x-6)=0$ має єдиний корінь?

157. При яких значеннях a система має єдиний розв'язок:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ x+2y=1? \end{cases}$

158. При яких значеннях параметра a обидва корені рівняння:

1) $x^2+ax+a=0$ менші за 1;

2) $(a+1)x^2-3ax-4a=0$ більші за -1?

159. При яких значеннях параметра a один з коренів рівняння $2x^2+(2a-3)x+a-8=0$ менший за 1, а другий − більший за 1?

160. Для кожного значення параметра a знайдіть кількість коренів рівняння $\left|x^2+4x-5\right|=a$.

161. При яких значеннях a функція $f(x)=2^{ax^3+3x^2+x+1}$ зростає для всіх $x\in R$?

162. При яких значеннях a нерівність $2^{\frac{x^2+ax-1}{2x^2-2x+3}}<2$ справджується для всіх дійсних значень x?

163. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $9y^2-y+\dfrac{1}{36}\geqslant x-9x^2+axy$ справджується для будь-яких пар чисел $(x;\ y)$, таких, що $|x|=|-y|$.

164. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^4-10x^2+a=0$ утворюють арифметичну прогресію?

165. При яких значеннях a нерівність $a(4+\sin x)^4-3+\cos^2 x+a>0$ справджується для всіх значень x?

166. При яких значеннях параметра a обидва корені рівняння $4x^2+(3a+1)x-(a+2)=0$ належать проміжку $[-1;\ 2)$?

167. Скільки коренів має рівняння $\left|\dfrac{|x|-5}{|x|-3}\right|=a$ залежно від значень параметра a?

168. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $|x-a|<4-x^2$ має хоча б один додатний розв'язок.

169. Для кожного цілого значення параметра a розв'яжіть рівняння $5-2\sin^2 x-6\cos^2\dfrac{x}{2}=2a$.

170. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких система рівнянь $\begin{cases}(y-x)^2 = 6a-14,\\ x^2+y^2 = 6+3a\end{cases}$ має рівно два розв'язки.

171. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $\log_3(9^x+2a)=x$ має рівно два розв'язки.

172. Знайдіть усі цілі значення параметра a, при кожному з яких існує хоча б одна пара чисел $(x;\ y)$, що задовольняє нерівність $x^2-y^2>1$ та рівняння $y=ax^2+1$.

173. При яких значеннях параметра a будь-який розв'язок нерівності $x^2-3x+2<0$ є також і розв'язком нерівності $ax^2-(3a+1)x+3>0$?

174. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$ має рівно два корені?

175. При яких значеннях параметра a кожне значення x, що належить області визначення функції $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, є розв'язком нерівності $ax^2-2(a-3)x+a+3>0$?

176. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких усі розв'язки рівняння $4|x-3a|+6a-24+x=0$ належать проміжку $[6;\ 12]$?

177. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких будь-який розв'язок нерівності $x^2+3a^2-1\geqslant 2a(2x-1)$ є також розв'язком нерівності $x^2+(2a-1)a+a^2>0$.

178. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $\dfrac{x^2+a^2}{a(6+x)}\geqslant 1$ справджується для всіх значень x, які задовольняють умову $-1<x<1$.

179. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $x^2+|x-a|<1$ має хоча б один додатний розв'язок.

180. Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких множина розв'язків нерівності $(x^2-a)(a-x-2)>0$ не містить жодного розв'язку нерівності $|x|\leqslant 1$.

181. Для кожної пари додатних значень параметрів a і b розв'яжіть нерівність $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{b^2}}>\dfrac{1}{|x|}-\dfrac{1}{a}$.

182. При яких значеннях параметра a рівняння $(x-5)(x-1)+3(x-5)\sqrt{\dfrac{x-1}{x-5}}=(a+1)(a-2)$ має лише один корінь?

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ 1. § 1. 1.28. 1) Спадна; 2) зростаюча. **1.29.** 1) Зростаюча; 2) спадна. **1.30.** 1) 8; 2) 9. **1.31.** 1) 3; 2) 16. **1.38.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $(0; 1]$; 3) $(0; 1]$; 4) $[1; +\infty)$. **1.39.** $\frac{1}{27}$; 9. **1.40.** $\frac{1}{16}$; 2. **1.41.** 1) $7\frac{1}{8}$; 11; 2) $-2\frac{2}{3}$; -2. **1.42.** 1) -1; 25; 2) 11,5; 27. **1.43.** 1) $[-3; 0]$; 2) $[-4; 2]$. **1.44.** 1) $[-7; 2]$; 2) $[-3; 0]$. **1.47.** 1) Парна; 2) непарна; 3) ні парна; ні непарна; 4) парна. **1.48.** 1) Непарна; 2) парна. **1.49.** 1) $\frac{1}{5}$; 5; 2) $\frac{1}{4}$; 4; 3) 2; 3; 4) 0; 6. **1.50.** 1) $\frac{1}{3}$; 3; 2) 1; 5. **1.51.** 1) $((\sqrt{5})^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} = 5^{2,5}$; 2) $(2-\sqrt{3})^{-3} < (2+\sqrt{3})^{3,2}$. *Вказівка.* Оскільки $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$, то $2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1}$. **1.52.** 1) $((\sqrt{2})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} > 2^{1,48}$; 2) $(2-\sqrt{3})^{-3} < (2+\sqrt{3})^{3,2}$. **1.55.** 1) -1; 2) -2. **1.56.** 1) 1; 2) 2. **1.57.** 1) 0,4; 2,5; 2) 0; 12. **1.58.** 1) 0,2; 5; 2) 0; 18. **1.59.** 1) $(2; 4) \cup (4; +\infty)$; 2) $(5; +\infty)$. **1.60.** 1) $(-\infty; -10) \cup \cup (-10; -5)$; 2) $(-2; +\infty)$. **1.61.** 1) Парна; 2) непарна. **1.62.** 1) Непарна; 2) парна. **1.63.** 500.

§ 2. 2.23. 1) 2; 2) 3. **2.24.** 1) 2; 2) 3. **2.25.** 1) 0; -2; 2) 2. **2.26.** 1) 0; 3; 2) 1. **2.27.** 1) 3; 2) -4; 3) 2; 4) 2. **2.28.** 1) 1; 2) -6; 3) 5; 4) $-\frac{1}{4}$. **2.29.** 1) $-\frac{1}{3}$; 3; 2) $1\frac{5}{18}$; 3) -1; 4; 4) ± 2. **2.30.** 1) -6; -2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) -2; 1; 4) 3. **2.31.** 1) 1,4; 2) $\frac{2}{7}$; 3) 0,25; 4) 2; 5. **2.32.** 1) $1\frac{1}{7}$; 2) 0,6; 3) $-0{,}25$; 8. **2.33.** 1) 0,5; 2) 2. **2.34.** 1) 0,5; 2) $1\frac{1}{3}$. **2.35.** 1) 2; 2) 2. **2.36.** 1) 1; 2) 3. **2.37.** 1) 1; 2) 1; 3) -1; 4) 0,5; $-0{,}5$. **2.38.** 1) 1; 2) -1; 0; 3) -1; -2; 4) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **2.39.** 0; 1. **2.40.** 0; 1. **2.41.** 1) 1; -1; 2) 1,5; 3) ± 2; 4) $-1{,}5$; 1. **2.42.** 1) 1; -1; 2) 0,5; 3) ± 2; 4) -4; 2. **2.43.** 1) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 2) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 3) $2\pi k$, $k \in Z$; 4) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **2.44.** 1) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 3) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; 4) $2\pi k$, $k \in Z$. **2.45.** 1) 1; 2) 1. **2.46.** 1) 1; 2) 1. **2.47.** 1) 0; 2) -1. **2.48.** 1) 0; 2) 0,5. **2.49.** 1) $-0{,}25$; 2) 2; -5; $-0{,}8$. **2.50.** 1) 7; 2) -2; 3) $1\frac{1}{3}$. **2.51.** 1) 2; 2) 1; 2. **2.52.** 1) 1; 2) 1,5. **2.53.** 1) 2; 2) 1. **2.54.** 1) 1; 2) 2. **2.55.** 1) -1; 1; 2) 12; 3) -2; 2. **2.56.** 1) 1; 2) 0,25; 3) -2; 2. **2.57.** 1) 1; 2) 1. **2.58.** 1) -2; 2) 0. **2.59.** 1) 1; 2) ± 1. **2.60.** 1) 1; 2) -2. **2.61.** $\frac{1}{3}$. **2.62.** 0,5. **2.63.** 134 дні. **2.64.** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

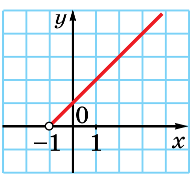
§ 3. 3.9. 1) $(-\infty; 4]$; 2) $(-\infty; 0]$. **3.10.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$. **3.11.** 1) $(-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$; 2) $(-2; 3)$. **3.12.** 1) $[-2; 2)$; 2) $(-\infty; -4) \cup [1; +\infty)$ **3.13.** 1) 5; 2) безліч. **3.14.** 1) 2; 2) безліч.

3.15. 1) 0; 2) −4. **3.16.** 1) 2; 2) 1. **3.17.** 1) $x < 2$; 2) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; 4) $[-1; 1]$. **3.18.** 1) $x \geqslant 3$; 2) $(-3; 3)$; 3) $(-1; 2)$; 4) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **3.19.** 1) $[5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 6)$. **3.20.** 1) $(-\infty; 7)$; 2) $[10; +\infty)$. **3.21.** 1) $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{7}; +\infty\right)$; 2) $[0; 4]$. **3.22.** 1) $[-1; 0]$; 2) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$. **3.23.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $x < -3$; 3) $x < 1$; 4) $x < -\frac{5}{3}$; 5) $x > -0{,}5$; 6) $x \geqslant -0{,}25$; 7) $x \leqslant 0$; 8) $x > 0{,}5$. **3.24.** 1) $x > 2$; 2) $x \geqslant -2$; 3) $x \leqslant 0{,}4$; 4) $x \leqslant \frac{1}{6}$; 5) $x \leqslant 2$; 6) $x > 0$; 7) $x > 0$; 8) $x \geqslant 1$. **3.25.** 1) $0 < x < 1$; 2) $x \geqslant 0$; 3) $x > 2$; 4) $x < 0$; 5) $-2 < x < -1$; 6) $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$. **3.26.** 1) $x > 0$; 2) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 3) $1 \leqslant x \leqslant 2$; 4) $0 < x < 1$; 5) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; 6) $x > -2$. **3.27.** 1) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; 2) $[-0{,}3; 0{,}3]$. **3.28.** 1) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; 2) $(-0{,}1; 0{,}1)$. **3.29.** 1) $x \geqslant 1{,}5$; 2) $x < 3$; 3) $0{,}25 \leqslant x \leqslant 1$; 4) $(-\infty; -1) \cup (0; 2)$. **3.30.** 1) $x \leqslant 0{,}5$; 2) $x > 2$; 3) $(-\infty; -2] \cup [0{,}5; +\infty)$; 4) $(0; 2) \cup (4; +\infty)$. **3.31.** 1) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. **3.32.** 1) $[-0{,}75; 0{,}25]$; 2) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **3.33.** 1) $x < 1$; 2) $x \leqslant 0$. **3.34.** 1) $x > 2$; 2) $x \geqslant 1$. **3.35.** 1) $[0; 1) \cup (3; +\infty)$; 2) $[-1; 3]$. **3.36.** 1) $[-4; -2) \cup (0; +\infty)$; 2) $x = 2$. **3.37.** 1) $0 \leqslant x \leqslant 1$; 2) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. **3.38.** 1) $x \leqslant -1$ або $x \geqslant 0$; 2) $0 < x < 1$. **3.39.** 1) $x \geqslant 1$; 2) $x > -2$. **3.40.** 1) $x < 1$; 2) $x \leqslant 0$. **3.41.** 1) $(-\infty; -5) \cup [-2; 5)$; 2) $[-1; 0) \cup (3; +\infty)$. **3.42.** 1) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 2) $[-2; -1) \cup [2; +\infty)$. **3.43.** 1) $\{-2\} \cup (3; +\infty)$; 2) $[-2; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty]$; 3) $[-5; 2]$; 4) $[-2; 1] \cup [2; +\infty)$. **3.44.** 1) $[3; 5) \cup (5; +\infty)$; 2) $\{-3\} \cup (2; +\infty)$; 3) $[3; 4]$; 4) $(-\infty; -7] \cup [0; 7]$. **3.45.** 1) $[0; 1]$; 2) $(0; 0{,}5)$. **3.46.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0]$. **3.47.** 1) $x \leqslant -4$; 2) $x < -1$. **3.48.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $x \geqslant 1$. **3.49.** $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. **3.50.** $(-1; 1)$. **3.51.** 44 460 грн. **3.52.** −2.

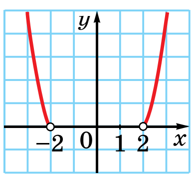
§ 4. **4.33.** 1) 3; 2) 1; 3) 1; 4) 2. **4.34.** 1) 2; 2) 1; 3) −1; 4) 3. **4.35.** 1) −0,4; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{15}$. **4.36.** 1) $-\frac{13}{7}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) 7; 4) $\frac{1}{10}$. **4.37.** 1) −2; 2) −4; 3) $\frac{5}{3}$; 4) −4. **4.38.** 1) −2; 2) −6; 3) $-\frac{8}{3}$; 4) 1,5. **4.39.** 1) 4; 2) 5. **4.40.** 1) 6; 2) 7. **4.43.** 1) 2; 2) 0,5; 3) 2. **4.44.** 1) 2; 2) −3; 3) 3. **4.45.** 1) 3; 2) $\frac{9}{25}$; 3) 25; 4) $\frac{1}{36}$. **4.46.** 1) 2; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 2; 4) 0,125. **4.47.** 1) $\frac{3}{8}$; 2) 10. **4.48.** 1) 45; 2) 12. **4.49.** 1) $m + n$; 2) $m + 1$; 3) $2m + n$; 4) $\frac{n}{m}$. **4.50.** 1) $x + y$; 2) $1 + x$; 3) $2y + x$; 4) $\frac{y}{x}$. **4.51.** 1) $\log_2 5$; 2) 0; $\log_5 4$; 3) 2; $\log_3 2 - 1$. **4.52.** 1) $\log_3 2$; 2) 0; $\log_2 3$; 3) −1; $\log_5 2$. **4.53.** 1) $(0; 1) \cup (1; 1{,}5)$; 2) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 3) $(2; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$; 4) $(1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$. **4.54.** 1) $(0{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(0; 1) \cup (1; 7)$; 3) $(3; 4) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$; 4) $(0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$. **4.59.** 1) $>$; 2) $>$; 3) $<$; 4) $<$. **4.60.** 1) $>$; 2) $<$; 3) $>$; 4) $>$. **4.64.** 1) $>$; 2) $<$. **4.65.** 1) $>$; 2) $<$.

4.66. 1) $3\frac{5}{9}$; 2) $\frac{1}{3}$. **4.67.** 1) 20,25; 2) 2. **4.68.** 1) 0; 2) −1. **4.69.** 1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$.
4.70. 1) 7; 2) 125; 3) $\frac{1}{7}$; 4) 5. **4.71.** 1) 3; 2) 49; 3) 0,25; 4) 2. **4.72.** 2.
4.73. 4. **4.74.** 1) *Вказівка*. $\lg 5 \cdot \lg 20 = \lg 5(2\lg 2 + \lg 5) = 2\lg 5 \lg 2 + \lg^2 5$.
4.77. 1) $\frac{a+b}{1-b}$; 2) $\frac{4(3-a)}{3+a}$; 3) $\frac{4}{2b-a}$; 4) 0,6; 5) −1,25; 6) 0,6. **4.78.** 1) $\frac{1+a}{b-1}$;
2) $\frac{3(2-a)}{4-a}$; 3) $\frac{2}{2b-a}$; 4) −4; 5) −2,5; 6) $\frac{1}{3}$. **4.79.** 1) 1; 2) 2. **4.80.** 1) 3;
2) 4. **4.81.** $\frac{2ab+b+1}{ab+2b+1}$. **4.82.** $\frac{5a+3b+1}{a+2}$. **4.83.** 1) $3-2\log_a b$, якщо $0 < b \leqslant a^3$; −3, якщо $b > a^3$; 2) $\log_a b - \log_b a$. **4.84.** 1) 0, якщо $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ або $a > 1$, $b > 1$; $-2(\log_b a + \log_a b)$, якщо $a > 1$, $0 < b < 1$ або $b > 1$, $0 < a < 1$; 2) $x + 1$. **4.86.** Шкіль.

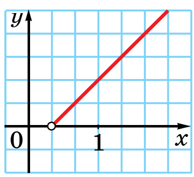
§ 5. **5.27.** 1) $a > 1$; 2) $a > 1$; 3) $a < 1$; 4) $a < 1$. **5.28.** 1) $a < 1$; 2) $a < 1$;
3) $a > 1$; 4) $a > 1$. **5.33.** −2; 1. **5.34.** −1; 2. **5.35.** 1) $\left[\frac{1}{9}; 27\right]$; 2) $\left[1; \frac{4}{3}\right]$.
5.36. 1) $[0,5; 16]$; 2) $[1; 4]$. **5.37.** 1) 4 і 5; 2) −1 і 0; 3) 1 і 2; 4) 2 і 3.
5.38. 1) 2 і 3; 2) 3 і 4; 3) −3 і −2; 4) 0 і 1. **5.41.** 1) $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; 2) $[2; 3)$. **5.42.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in Z$; 2) $(2; 4]$.
5.43. 1) $[-4; 2) \cup (3; 4]$; 2) $(-3; -2] \cup [1; 3)$; 3) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3)$; 5) $(2; +\infty)$; 6) $(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; 7) $(-\infty; -2) \cup (-2; 1)$; 8) $(-1; 0,5)$. **5.44.** 1) $(-6; -5] \cup [5; 7)$; 2) $[-4; -2) \cup (2; 3]$; 3) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2)$; 5) $(-1; +\infty)$; 6) $(-2; 0) \cup (0; 2)$; 7) $(-\infty; -2) \cup (-2; 2)$; 8) $(-0,5; 1)$. **5.49.** 1) $x \neq 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $(1; 2) \cup (2; 3)$.
5.50. 1) $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $(-1; 0) \cup (0; 2)$. **5.51.** 1) 1; 2) 2. **5.52.** 1) 4;
2) 1. **5.53.** 1) Мал. 1; 2) мал. 2. **5.54.** 1) Мал. 3; 2) мал. 4.



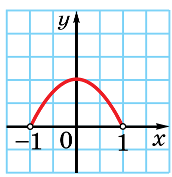
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

5.55. 1) Зростає на $(-3; +\infty)$; 2) спадає на $(-0,75; +\infty)$; 3) спадає на $(-\infty; 4)$; 4) зростає на $(-\infty; 0,5)$. **5.56.** 1) Спадає на $(5; +\infty)$; 2) зростає на $(-0,4; +\infty)$; 3) зростає на $(-\infty; 3)$; 4) спадає на $(-\infty; 28)$.
5.57. 1) $0 < a < 1$; 2) $a < 2$. **5.58.** 1) $a > 1$; 2) $3 < a < 4$. **5.59.** $\log_9 8$; $\log_3 2$; $\log_{0,3} 3$. **5.60.** $\log_{0,2} 10$; $\log_{25} 2$; $\log_5 4$. **5.61.** 1) Парна; 2) непарна.
5.62. 1) Ні парна, ні непарна; 2) непарна. **5.63.** 1) −1; 2) $\log_{0,3} 101$.
5.64. 1) $\log_{-0,5} 29$; 2) −2. **5.65.** 1) 6; 2) $\frac{2}{3}$. **5.66.** 1) 1,2; 2) −3.

5.67. $[-23; -11]$. **5.68.** $[1; 5]$. **5.71.** 1) ± 1; 2) 2. **5.72.** 1) ± 5; 2) 3. **5.73.** 2. **5.74.** 4. **5.75.** $\frac{9\pi}{13}$; $\frac{15\pi}{13}$ **5.76.** $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{12\pi}{7}$ **5.77.** На 8 год 48 хв. **5.78.** $\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$.

§ 6. **6.11.** 1; -8. **6.12.** 1; -9. **6.13.** $(2; -1)$. **6.14.** $(1; 1)$. **6.15.** 1) 9; 2) $\frac{1}{8}$. **6.16.** 1) 8; 2) $\frac{1}{81}$. **6.17.** 1) $1 \pm \sqrt{3}$; 2) $-0,5$; 2,5; 3) 0,8; 5,2; 4) 4. **6.18.** 1) $1 \pm \sqrt{7}$; 2) $-3,25$; 1,25; 3) -7; 3; 4) 2. **6.19.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2} - 1$. **6.20.** 1) 0,2; 2) $1 + \sqrt{3}$. **6.21** 1) 9; 2) 9. **6.22.** 1) 2; 2) 81. **6.23.** 1) 0; 2; 2) 1. **6.24.** 1) 2; 2) 0. **6.25.** 1) 1; 2) 3. **6.26.** 1) 2; 2) 0. **6.27.** 1) 2; 2) 5; 3) 0; 4) 3. **6.28.** 1) 5; 9; 2) 0; 3) 7; 4) 2; 3. **6.29.** 1) 5; 2) 6; 3) -9; 3; 4) -2; 5) $\frac{2}{3}$; 14; 6) -3; 7) $\frac{2\sqrt{161} - 8}{5}$; 8) 4. **6.30.** 1) 3; 2) 3; 3) -8; 4; 4) 2; 5) 3; 9; 6) -9; 7) $\frac{2\sqrt{46} - 3}{5}$; 8) 3. **6.31.** 1) $-\frac{6}{7}$; 342; 2) 0,25; 16; 3) 0; 26; 4) 2; 128. **6.32.** 1) 7; $2\frac{1}{625}$; 2) 1; 64; 3) 5; 4) 3; 81. **6.33.** 49. **6.34.** 1) 3; $\sqrt{3}$; 2) 0,0001; 3) 25; $5^{\sqrt{2}}$; 4) 7. **6.35.** 1) 4; $2\sqrt{2}$; 2) 9; 3) $10^{\sqrt{2}}$; 0,1; 4) 2. **6.36.** 1) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; 2) 4; $\sqrt{2}$; 3) 344; $1\frac{1}{49}$; 4) 511; $-0,5$. **6.37.** 1) 0,2; 125; 2) $\frac{1}{9}$; 3; 3) -1; 509; 4) 6; $\frac{4}{3}$. **6.38.** 1) 1; 2) 0; 3) 0; 4) 1. **6.39.** 1) 2; 2) 0; 1; 3) 0; 4) 1. **6.40.** 0,5. **6.41.** 0,5. **6.42.** 14. **6.43.** 5. **6.44.** Жодного. **6.45.** Один. **6.46.** 1) 2; 2) 3. **6.47.** 1) 0; 2) розв’язків немає. **6.48.** 1) 16; 2) -9. **6.49.** 1) -1; 2) 4; 3) 1,5; 4) 5. **6.50.** 1) 2; 2; 2) 4; 3; 3) 6; 4; 4) 4. **6.51.** 1) $2^{\frac{5}{2}}$; 0,5; 2) 0,01; 100; 3) 4; 0,25; 4) 7^3; 7^{-5}. **6.52.** 1) 81; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) 0,1; 3) 27; $\frac{1}{27}$; 4) 5; $\frac{1}{125}$. **6.53.** 1) $\frac{1}{9}$; 9; 2) $\frac{1}{16}$; 0,5; 3) 1; 10 000; 4) 3; 19 683; 5) 0,001; 1 000 000; 6) $\frac{1}{6}$; 6. **6.54.** 1) 0,25; 4; 2) 0,1; 1000; 3) 4; 64; 4) 10; 0,1; 100; 0,01; 5) 0,2; 25; 6) 10; 0,1. **6.55.** 1) $\frac{3}{7}$; 2) 1; 3) $\sqrt[3]{2}$. **6.56.** 1) 2; 2) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. **6.57.** 1) $\frac{1}{7}$; 8; 2) $5^{\pm 2\sqrt{3}}$. **6.58.** 1) $\frac{1}{625}$; 5; 2) 2; 0,25. **6.59.** 1) 2; 0,1; 1000; 2) 2; $\frac{9 + \sqrt{69}}{2}$. **6.60.** 1; $\frac{7 + \sqrt{41}}{4}$. **6.61.** 256; 0,5. **6.62.** 3. **6.63.** 1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **6.64.** 1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; $\frac{7\pi}{6} + 4\pi m$, $m \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; $\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$, $k \in Z$. **6.65.** 1) 0,5; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.66.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{11}}{4}$. **6.67.** 1) $\sqrt{2}$;

3; 2) $\frac{3}{2}$; $\frac{36}{25}$. **6.68.** 1) 0; $\frac{7}{4}$; $1,5+\sqrt{6}$; 2) 3; $\frac{9}{4}$. **6.69.** 1) 5; 2) 1; 2. **6.70.** 1) 20; 2) −1; −2,6. **6.71.** 1) 9522 грн; 2) 14 283 грн; 3) 19 044 грн. **6.72.** $(a^2+b^2-ac-bd)^2$.

§ 7. 7.7. 1) $1<x<3$; 2) $x>4$. **7.8.** 1) $1<x<5$; 2) $x>2$. **7.11.** 1) $x<0$; 2) $x\geqslant 1$. **7.12.** 1) $x<1$; 2) $x<0$. **7.15.** 1) $x\geqslant 2$; 2) $-1<x<0$. **7.16.** 1) $x>-2$; 2) $3<x\leqslant 4$. **7.17.** 1) $[-1;\ 0)\cup(2;\ 3]$; 2) $(-\infty;\ -1)\cup(4;\ +\infty)$. **7.18.** 1) $(-\infty;\ -1]\cup[9;\ +\infty)$; 2) $(-5;\ -4)\cup(0;\ 1)$; 3) $(-\infty;\ -0,5)\cup(3;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$. **7.19.** 1) $(0;\ 1]$; 2) $(3;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -1]\cup[4;\ +\infty)$; 4) $[-2;\ -1)\cup(6;\ 7]$. **7.20.** 1) $(3;\ +\infty)$; 2) $(0;\ 5]$. **7.21.** 1) $(0;\ 0,5]\cup[4;\ +\infty)$; 2) $(0,01;\ 100)$; 3) $(0;\ 0,04)\cup(125;\ +\infty)$; 4) $[0,25;\ 16]$. **7.22.** 1) $\left(\frac{1}{3};\ 9\right)$; 2) $(0;\ 0,5]\cup[2;\ +\infty)$; 3) $(0;\ 2]\cup[8;\ +\infty)$; 4) $(2;\ 4)$. **7.23.** $x>100$. **7.24.** $x>10$. **7.25.** 1) $(-3;\ -2)$; 2) $(-1,5;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. **7.26.** 1) $(-3;\ -1)\cup(3;\ 4)$; 2) $(2;\ +\infty)$. **7.27.** 1) $[0,1;\ 1000]$; 2) $\left(0;\ \frac{1}{16}\right)\cup(0,25;\ +\infty)$. **7.28.** 1) $[1;\ 25]$; 2) $(0;\ 0,1)\cup(100\,000;\ +\infty)$. **7.29.** 1) $(-\infty;\ 0]\cup[\log_6 5;\ 1)$; 2) $(-2;\ 2)$. **7.30.** 1) $(-\infty;\ 0)\cup(3\log_3 2;\ 2)$; 2) $[-\sqrt{6};\ -\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};\ \sqrt{6}]$. **7.31.** 1) 2; 2) 1. **7.32.** 1) 6; 2) 3. **7.33.** 1) $(0;\ 1]\cup[9;\ 10)$; 2) $(4;\ 6)$; 3) $(3;\ +\infty)$; 4) $(-2;\ 3)$. **7.34.** 1) $(0;\ 1)\cup(3;\ 4)$; 2) $(1;\ 1,5]$; 3) $(2;\ +\infty)$; 4) $(-2;\ 1)$. **7.35.** 1) $(0,25;\ 0,5)$; 2) $(3;\ 4)$; 3) $(-1;\ +\infty)$; 4) $(1;\ 2)\cup(5;\ +\infty)$. **7.36.** 1) $(-0,5;\ 0)$; 2) $(4;\ 5)$; 3) $(3;\ +\infty)$; 4) $(-1;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$. **7.37.** 1) $(-1,5;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$; 2) $[-1;\ 0)$; 3) $(-\infty;\ -15]\cup\left(-\frac{1}{7};\ +\infty\right)$; 4) $(1,75;\ +\infty)$. **7.38.** 1) $(-\infty;\ -1)\cup(0;\ 2,5)$; 2) $(-\infty;\ -9]\cup(3;\ +\infty)$; 3) $\left(-\frac{1}{3};\ 1\right]$; 4) $[3;\ 4)$. **7.39.** 1) $(0;\ 0,2)\cup[1;\ +\infty)$; 2) $(0;\ 0,1^5)\cup(0,001;\ 0,01)\cup(10;\ +\infty)$. **7.40.** 1) $[0,16;\ 1)$; 2) $(0;\ 1)\cup(10;\ +\infty)$. **7.41.** $x=4$. **7.42.** $x=5$. **7.43.** Жодного. **7.44.** Два. **7.45.** $(0;\ 3)$. **7.46.** $(0;\ 2)$. **7.47.** 1) $(0;\ +\infty)$; 2) $[-1;\ 3)$. **7.48.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $[-5;\ -1)$. **7.49.** 1) $(4;\ 6)$; 2) $[3;\ +\infty)$; 3) $(-2;\ 3]$; 4) $(13;\ +\infty)$. **7.50.** 1) $(1;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$; 2) $[44;\ +\infty)$; 3) $(2;\ 5)$; 4) $(2;\ 6]$. **7.51.** 1) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};\ 16\right)$; 2) $(5^{-5,75}-1;\ -0,96)$; 3) $[0,25;\ 1)\cup[2;\ +\infty)$; 4) $[0,25;\ 1)\cup[2;\ +\infty)$. **7.52.** 1) $(0;\ +\infty)$; 2) $\left(1\frac{1}{3};\ 1+\sqrt[4]{\frac{1}{27}}\right)$; 3) $(0;\ 1)\cup[5;\ 25]$; 4) $\left[\frac{\sqrt{5}}{5};\ 1\right)\cup[5;\ +\infty)$. **7.53.** 1) $(2;\ 3]$; 2) $(9;\ 10)$; 3) $(2;\ 3)\cup\left(3\frac{3}{8};\ 4\right)$; 4) $(1;\ 3)$. **7.54.** 1) $(-2;\ -1)\cup(1,5;\ 5)$; 2) $(1;\ 2)\cup[10;\ +\infty)$; 3) $\left(1\frac{2}{3};\ 2\right)$; 4) $(1;\ 3)$. **7.55.** 1) $(3;\ 3,5)\cup(4;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -2]\cup[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup[4;\ +\infty)$. **7.56.** 1) $(-1;\ -0,5)\cup(0;\ 2,5)$; 2) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup[3;\ +\infty)$. **7.57.** −1. *Вказівка*. Врахуйте, що $2^x+2^{3-x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot 2^{3-x}}$, тому $2^x+2^{3-x}>1$.

7.58. 4. **7.59.** 26. **7.60.** 2. **7.61.** 1) $(0; 2^{-2\sqrt{2}}] \cup [2^{2\sqrt{2}}; +\infty)$; 2) $(0; 7^{-2\sqrt{7}}] \cup [7^{2\sqrt{7}}; +\infty)$. **7.62.** $(0; 3^{-2\sqrt{3}}] \cup [3^{2\sqrt{3}}; +\infty)$. **7.63.** 1) $(-3; -2] \cup [2; 3)$; 2) $[-1; 0,5) \cup (0,5; 1]$; 3) $(1,5; 2) \cup (3; 4)$; 4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right) \cup \{1,5\}$; 5) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2) \cup (3; 6)$; 6) $(\log_9 7; 1) \cup (1; +\infty)$. **7.64.** 1) $(-2; -1] \cup [1; 2)$; 2) $(-3; -2] \cup [2; 3)$; 3) $(0,25; 1) \cup (2,5; 3)$; 4) $(\sqrt{2,5}; 2) \cup \{2,5\}$; 5) $(-3; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; 3)$; 6) $(\log_4 7; \log_2 3]$. **7.65.** 1) 3600 л; 2) *Вказівка*. Врахуйте, що 1 м^3 = 1000 л. **7.66.** 0.

§ 8. **8.9.** 1) (3; 1), (1; 3); 2) (1; 0). **8.10.** 1) (2; 1), (1; 2); 2) (2; 2). **8.11.** 1) (25; 36); 2) (−2; 7). **8.12.** 1) (1; 2), (16; −28); 2) (5; 2). **8.13.** 1) (1; 2); 2) (2; 2). **8.14.** 1) (2; 1); 2) (1; 3). **8.15.** 1) $x > 2$; 2) $\frac{1}{2} < x \leqslant 2$. **8.16.** 1) $0,25 < x < 0,8$; 2) $x > 4$. **8.17.** 1) (2; 4), $\left(6; \frac{4}{3}\right)$; 2) (1; 25), $\left(50; \frac{1}{2}\right)$. **8.18.** 1) (9; 3), (1; 27); 2) (10; 6,4), (16; 4). **8.19.** 1) (1; 1), $(\log_5 2; \log_2 5)$; 2) (1; 1), $(\log_3 2; 0)$; 3) (3; 2); 4) (1; 2). **8.20.** 1) (1; 1), $(\log_3 4; \log_4 3)$; 2) $(\log_3 4; 1)$; 3) (2; 1); 4) (0; 2). **8.21.** 1) (4; 4); 2) $(1; \sqrt{5})$, $(\sqrt{5}; 1)$. **8.22.** 1) $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$; 2) (2; 4), (4; 2). **8.23.** 1) (100; 10), (0,1; 0,01); 2) (0; −1); 3) $\left(3; \frac{1}{3}\right)$; 4) (5; 5). **8.24.** 1) (1; 1); 2) (0,5; 0,25). **8.25.** 1) (1; 4), $\left(\frac{49}{9}; \frac{16}{9}\right)$; 2) $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$; 3) (1; −4); 4) $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{1}{3}\right)$, $n \in Z$. **8.26.** 1) (4; 1); 2) (2; 6), (−2; 10); 3) (3; 1); 4) $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{1}{9}\right)$, $n \in Z$. **8.27.** (3; 2). **8.28.** (2; 3). **8.29.** Розв'язків немає. **8.30.** [1; 3]. **8.31.** 1) (16; 3), $\left(\frac{1}{64}; -2\right)$; 2) (1,5; 0,5), (−0,25; 0,75); 3) (2; −3); 4) (1; 1), $\left(2; \frac{1}{8}\right)$. **8.32.** 1) (81; 6), $\left(\frac{1}{729}; -4\right)$; 2) (2; −1), $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 3) (3; −1); 4) $\left(\frac{2}{3}; \frac{9}{4}\right)$, (1; 1). **8.33.** 1) $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{81}\right)$; 3) (4; 9); 4) (3; 9), $(9\sqrt{3}; 3\sqrt[4]{3})$. **8.34.** 1) $(3; \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; 3)$; 2) $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) (2; 0,5); 4) (3; 9), (9; 3). **8.35.** (1,5; 0,5). **8.36.** (0,5; 0,5), (0,5; 4). **8.37.** $\left(3; \frac{1}{3}\right)$, (3; 9). **8.38.** $1,5 < x < 2$; $1 < y < 2$. **8.39.** $1 < x < 2$; $1 < y < 2$. **8.40.** (2; 2), (2; −2). **8.41.** (3; 3), (3; −3). **8.42.** 1) $\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}; \frac{3-2\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2\log_2 3 - 1}; \frac{2}{2\log_2 3 - 1}\right)$.

8.43. 1) $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2-\log_2 3}; \frac{2}{2-\log_2 3}\right)$. **8.44.** 500. **8.45.** $(-\infty; -2,5] \cup [-1; 0] \cup [1; 2]$.

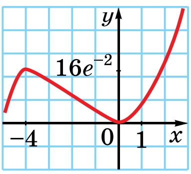
§ 9. **9.7.** $a < 7$. **9.8.** $a > -2$. **9.9.** $a > 3$. **9.10.** $0 < a \leqslant 16$. **9.11.** 1) $a \geqslant 2$; 2) $-2 < a < 2$. **9.12.** $-2 < a < 2$. **9.13.** $a \leqslant 3$; $a \geqslant 27$. **9.14.** $a > -1$. **9.15.** 1) $\pm 0,5$, 0; 2) $(-\infty; 5] \cup \{30\}$. **9.16.** 1) 0, 2; 2) $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{4}{3}\right\}$. **9.17.** Якщо $a \leqslant 0$, то $x \in R$; якщо $a > 0$, то $x \leqslant \log_2 a$. **9.18.** Якщо $a < 0$, то $x \in R$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x > -\log_2 a$. **9.19.** Якщо $a < 1$, то $x = 2$; якщо $a \geqslant 1$, то розв'язків немає. **9.20.** Якщо $a \leqslant -1$, то розв'язків немає; якщо $-1 < a \leqslant 0$, то $x = \log_2(a+1)$; якщо $a > 0$, то $x_1 = \log_2 a$; $x_2 = \log_2(a+1)$. **9.21.** Якщо $a \leqslant -2$, то розв'язків немає; якщо $-2 < a \leqslant 0$, то $x = \log_3(a+2)$; якщо $a > 0$, то $x_1 = \log_3 a$; $x_2 = \log_3(a+2)$. **9.22.** 1) Якщо $a \leqslant -2$, розв'язків немає; якщо $-2 < a \leqslant 2$, то $x \in R$; якщо $a > 2$, то $x < -\log_3(a-2)$; 2) якщо $a < 0$, то $x < \log_2(-a)$, якщо $a = 0$, то розв'язків немає, якщо $a > 0$, то $x < \log_2 \frac{a}{5}$. **9.23.** 1) Якщо $a < -1$, розв'язків немає; якщо $-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $x \in R$; якщо $a > -1$, то $x \geqslant \log_2(a-1)$; 2) якщо $a < 0$, то $x > \log_2(-a)$, якщо $a = 0$, то розв'язків немає, якщо $a > 0$, то $x > \log_2(2a)$. **9.24.** 1) Якщо $0 < a < 1$, то $x = \frac{2}{1-a}$; якщо $a > 1$, то немає розв'язків; 2) якщо $0 < a < 1$ або $1 < a \leqslant 3$, то $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-a^2}$, якщо $a > 3$, то розв'язків немає. **9.25.** 1) Якщо $0 < a < 1$, то розв'язків немає; якщо $a > 1$, то $x = \frac{6}{a-1}$; 2) якщо $0 < a < 1$ або $1 < a \leqslant 4$, то $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-a}$; якщо $a > 4$, то розв'язків немає. **9.26.** $a \neq -3$. **9.27.** $a \neq -1$. **9.28.** 1) Якщо $0 < a < 1$, то $0 < x < a$ або $x > \frac{1}{a^2}$; якщо $a > 1$, то $\frac{1}{a^2} < x < a$; 2) якщо $0 < a < 1$, то $-1 < x \leqslant -\sqrt{1-a}$ або $\sqrt{1-a} \leqslant x < 1$; якщо $a > 1$, то розв'язків немає. **9.29.** 1) Якщо $0 < a < 1$, то $a < x < \frac{1}{a}$; якщо $a > 1$, то $0 < x < \frac{1}{a}$ або $x > a$; 2) якщо $0 < a < 1$, то $a + 3 < x < 4$; якщо $a > 1$, то $4 < x < a + 3$. **9.30.** $a < 0,5$ або $a > 2,5$. **9.31.** $a < 1$, або $a = 2,5$, або $a \geqslant 4$. **9.32.** 1) $a = 1$ або $-0,5 \leqslant a \leqslant -\frac{3}{22}$; 2) $a = 1$. **9.33.** 1) $a = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$; 2) $a < 0$ або $a = 4$. **9.34.** 1) $a > 1$; $a = 0,75$; 2) $(6; 14) \cup (14; +\infty)$. **9.35.** $a < 0$; $a = 1$. **9.36.** $a \geqslant 2$. **9.37.** $a \geqslant 1$. **9.38.** Якщо $a = 2^{-\frac{2}{3}}$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 2^{-\frac{2}{3}}$, то $x = a^{\frac{2}{3\log_2 a + 2}}$. **9.39.** Якщо $a = 5^{-\frac{1}{3}}$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 5^{-\frac{1}{3}}$, то $x = 5^{\frac{a}{3+\log_a 5}}$. **9.40.** Якщо $0 < a < 1$, то $0 < x < \frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}$; якщо $a > 1$, то $x > \frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}$. **9.41.** Якщо $0 < a < 1$, то $1 < x < \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$; якщо $a > 1$, то $x > \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$. **9.42.** Якщо $a < -2$, то $x \in (4a;\ 4a+1)$; якщо $a = -2$, то $x \in (-8;\ +\infty)$, $a > -2$, то $x \in [1+4a;\ +\infty)$. **9.43.** Якщо $a < 1$, то $x \in (1-a;\ +\infty)$; якщо $a = 1$, то розв'язків немає; якщо $a > 1$, то $x \in (-a;\ 1-a)$. **9.44.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \{1\}$. **9.45.** $(1;\ 2)$. **9.46.** $2\sqrt{2}$. **9.47.** $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ -0,5) \cup (0,5;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. **9.48.** $\left(\frac{5}{6};\ 1\right) \cup \left(1;\ \frac{5}{3}\right) \cup (2,5;\ +\infty)$. **9.49.** $(3;\ +\infty)$. **9.50.** $(-\infty;\ 1{,}5)$. **9.51.** $2 < a \leqslant 3$. **9.52.** $0 < a \leqslant 8$. **9.53.** Якщо $0 < a < 1$, то $x \in (0;\ a) \cup \left(1;\ \frac{1}{a}\right)$; якщо $a > 1$, $x \in \left(\frac{1}{a};\ 1\right) \cup (a;\ +\infty)$. **9.54.** Якщо $0 < a < 1$, то $x \in \left(a^4;\ \frac{1}{a}\right)$; якщо $a > 1$, $x \in \left(\frac{1}{a};\ a^4\right)$. **9.55.** 1) 450 г; 2) 350 г.

§ 10. **10.19.** 1) $x = -2$; 2) $x = e^{-\frac{1}{3}}$. **10.20.** 1) $x = -1$; 2) $x = e^{-\frac{1}{2}}$. **10.21.** 1) $\frac{2^x((x+1)\ln x - 1)}{(x+1)^2}$; 2) $-\frac{7e^x}{(e^x-2)^2}$; 3) $\frac{x^2(3\ln x - 1)}{\ln^2 x}$; 4) $\frac{1-\ln x}{\ln 5 \cdot x^2}$.

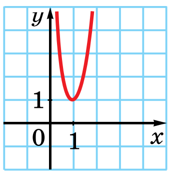
10.22. 1) $\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$; 2) $\frac{3 \cdot 3^x \ln 3}{(3^x+1)^2}$; 3) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 4) $\frac{x(2\ln x - 1)}{\ln 3 \cdot \log_3^2 x}$. **10.23.** 1) $f'(2) = 9$; 2) $f'(1) = \frac{1}{3}$. **10.24.** 1) $f'(-1) = 3$; 2) $f'(1) = \frac{1}{3}$. **10.25.** $-e^{-x}(\cos 4x + 4\sin 4x)$. **10.26.** $e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$. **10.31.** 1) $-9{,}9$; 2) $-\frac{1}{2e}$. **10.32.** 1) $\frac{4}{e^2}$; 2) $\frac{4e}{3}$. **10.33.** 1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{6}$. **10.34.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$. **10.35.** 1) 2; 2) -3; 5; 3) 7; 4) коренів немає. **10.36.** 1) 4; 2) 1; 4; 3) 8; 4) коренів немає. **10.37.** 1) 0; 2) $-2e^2$. **10.38.** 1) $-3e$; 2) 0. **10.39.** 1) $y = x$; 2) $y = 3x + 3$. **10.40.** 1) $y = 0$; 2) $y = 5x - 5$. **10.41.** 1) $f'(81) = 3$; 2) $f'(32) = \frac{1}{2}$. **10.42.** 1) $f'(8) = -1$; 2) $f'(16) = 5$. **10.43.** 1) Зростає на $(-\infty;\ 0{,}2]$, спадає на $[0{,}2;\ +\infty)$, $x_{max} = 0{,}2$; $y_{max} = y(0{,}2) = \frac{1}{5e}$; 2) спадає на $(0;\ e^{-0,5}]$, зростає на $[e^{-0,5};\ +\infty)$, $x_{min} = e^{-0,5}$; $y_{max} = y(e^{-0,5}) = -\frac{1}{2e}$. **10.44.** 1) Зростає на $(+\infty;\ 0{,}5]$, спадає на $[0{,}5;\ +\infty)$, $x_{max} = 0{,}5$; $y_{max} = y(0{,}5) = \frac{1}{2e}$;

2) спадає на $\left(0;\, e^{-\frac{1}{3}}\right]$, зростає на $\left[e^{-\frac{1}{3}};\, +\infty\right)$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{3}}$; $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3e}$.

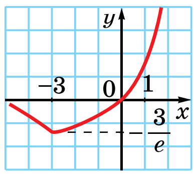
10.45. 1) $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = f(1) = \frac{1}{e}$; $\min\limits_{[0;\,2]} f(x) = f(0) = 0$; 2) $\max\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f(-2) = f(0) = 1$; $\max\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f(-2) = f(0) = 1$; $\min\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f(-1) = \frac{1}{3}$. **10.46.** 1) $\max\limits_{[-3;\,0]} f(x) = f(0) = 0$; $\min\limits_{[-3;\,0]} f(x) = f(-1) = -\frac{1}{e}$; $\min\limits_{[-3;\,0]} f(x) = f(-1) = -\frac{1}{e}$; 2) $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = f(0) = f(2) = 1$; $\min\limits_{[0;\,2]} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$. **10.47.** $x_1 = 0$; $x_2 = 4$. **10.48.** $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. **10.49.** 1) $(-\infty;\, -5]$; 2) $(-\infty;\, 0{,}75]$. **10.50.** 1) $(0;\, +\infty)$; 2) $(-0{,}5;\, +\infty)$. **10.53.** $y = 2x - 2$. **10.54.** $y = 3 - x$. **10.55.** $y = 1{,}5x + \ln 2 - 1{,}5$. **10.56.** $y = x + \ln 3 - \frac{1}{3}$. **10.57.** $f'(1) = 0{,}5$. **10.58.** $f'(1) = 0{,}25$. **10.59.** 1) Мал. 5; 2) мал. 6. **10.60.** 1) Мал. 7; 2) мал. 8. **10.61.** $x > 1$.



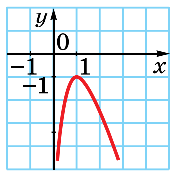
Мал. 5



Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8

10.62. $\frac{\sqrt{5}}{25}$. **10.63.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **10.64.** 1) $(-3{,}5;\, 4) \cup (9;\, +\infty)$; 2) $\left(-1;\, \frac{1-2\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2};\, +\infty\right)$. **10.65.** 1) $(-6;\, -2) \cup (10;\, +\infty)$; 2) $(-5;\, 3)$. **10.66.** 1) 3; 2) 1. **10.67.** 1) 2; 2) 1. **10.68.** 4. **10.69.** $\frac{1}{e}$. **10.70.** $y = x + 4$. **10.71.** $y = x - 3$. **10.72.** $21 + 3\ln 2$. **10.73.** $-\ln 2 - 4$. **10.76.** 1) $(-7; -1] \cup [0; 6)$; 2) $(-1;\, 0)$; 3) $(-\infty;\, -7] \cup [6;\, +\infty)$; 4) таких значень a немає. **10.77.** -5. **10.78.** 2. **10.79.** $x_0 = 0{,}8$; $S_\triangle = \frac{48}{25}\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$. **10.80.** $x_0 = \frac{1}{6}$; $S = \frac{5}{3\sqrt[5]{6}}$. **10.81.** 1) 72 млн м^3; 2) 5400 млн м^3. **10.82.** 90 мл.

Вправи для повторення розділу 1

11. **1)** Спадна; 2) зростаюча. **12.** 1) 0,2; 2) 4. **15.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[-3; +\infty)$. **16.** 0,25. 64. **17.** 1) $[0{,}5;\, 2]$; 2) $[1;\, 2{,}5]$; 3) $\left[4\frac{1}{7};\, 5\right]$; 4) $\left[2\frac{1}{3};\, 3\right]$.

18. 1) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}=7^{1,5}$; 2) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^{7}>\left(3+2\sqrt{2}\right)^{-7,1}$. **20.** 1) −1; 2) 1. **21.** 1) 3; 2) 2. **31.** 1) 2; 2) 3. **32.** 1) 0; 2) 0,2. **33.** 1) 3; 2) 2. **34.** 1) 2; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) −2; 4) 4. **35.** 1) 0; 4; 2) 3. **36.** 1) 3; 2) 3. **37.** 1) 1; 2) 0; 1; 3) −1; −2; 4) 2. **38.** 0; −1. **39.** 1) 2; 2) 0. **40.** 1) 1; −1; 2) 0; 1. **45.** 1) $(5; +\infty)$; 2) $[2; +\infty)$. **46.** 1) $(-6; +\infty)$; 2) $(-3; 3)$; 3) $[-1; 4]$; 4) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **47.** 1) $[20; +\infty)$; 2) $(14; +\infty)$. **48.** 1) $x \leqslant 2$; 2) $x < -1$. **49.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[-1; 0]$. **50.** 1) $x > 0$; 2) $x \leqslant 0,5$. **51.** $x \leqslant 2$. **52.** $x < 0$. **53.** $x \geqslant 2$. **66.** 1) 6; 2) 3. **68.** 1) 1; 2) 1,5; 3) −4; 4) 4. **69.** 1) −0,4; 2) −0,2; 3) 3,5; 4) $\frac{1}{6}$. **71.** 1) 1,5; 2) 0,5. **72.** 1) 5; 2) $\frac{4}{49}$; 3) 6,25; 4) 12. **73.** 1) 0,25; 2) 1,8. **74.** 1) $a + b$; 2) $1 + a$; 3) $2b + a$; 4) $\frac{b}{a}$. **75.** 1) $\log_3 2$; 2) 0; $\log_2 5$. **77.** 1) 5; 2) 0,5. **78.** 1) 0; 2) −0,5. **79.** 1) 3; 2) 9; 3) 0,2; 4) 2. **80.** 4. **81.** $\frac{2+m}{2(2-m)}$. **82.** $\log_n m$. **96.** 3; −5. **98.** 1) $\left(\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$; 2) $(-2; 5]$. **100.** 1) $x \neq \pi + 2\pi k$; $k \in Z$; 2) $(2; 3) \cup (3; 4)$. **101.** 1) 4; 2) 2. **109.** 1) Так; 2) (7; 1). **110.** 1) 8; 2) 16. **111.** 1) 2; −2; 2) 25. **112.** 1) 4; 2) 3. **113.** 1) 2; 2) 1. **114.** 1) −1; 2) 1; 3) 1; 4) 9. **115.** 1) 13; 3,001; 2) 3; $\frac{1}{243}$; 3) 3; $1\frac{1}{16}$; 4) 0,01; 0,001. **116.** 3; 81. **117.** 1) 0; 3; 2) 3,5. **118.** 3. **119.** 31; 1. **120.** 1) 8; 0,125; 2) 5. **121.** Один. **122.** 1) 5; 2) 2. **123.** 1) 9; 2) −8. **124.** 1; 0,125. **125.** 8. **126.** $\frac{1}{625}$; 5. **131.** 1) $x \geqslant -6$; 2) $5 < x < 6$. **132.** 1) $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; 2) $[-1; 0) \cup (2; 3]$. **133.** 1) $(-1; 2)$; 2) $(2,5; 3]$. **134.** 1) $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (27; +\infty)$; 2) $\left(0; \frac{1}{25}\right) \cup (25; +\infty)$. **135.** $0 < x < 10$. **136.** 1) $(-5; -4)$; 2) $(9; +\infty)$. **137.** 1) $(0,25; 16)$; 2) $(0; 0,001] \cup [0,1; +\infty)$. **138.** −2. **139.** 2. **140.** $(0; 3]$. **141.** $[3; 4) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$. **142.** 6. **144.** 1) (2; 0); (0; 2); 2) (1; 2). **145.** 1) (3; −3); (1; 3). **146.** 1) (3; 1); 2) (7; 10); (10; 7). **147.** $\left(\frac{1}{3}; 0,25\right)$. **148.** Якщо $a < 0$, то розв'язків немає; якщо $a = 0$, то $x \in R$, якщо $a > 0$, то $x \leqslant -\log_3 a$. **149.** Якщо $a \leqslant -1$, то $x = \log_5(-a)$, якщо $-1 < a < 0$, то $x_1 = \log_5(a + 1)$, $x_2 = \log_5(-a)$, якщо $a \geqslant 0$, то $x = \log_5(a + 1)$. **150.** 1) Якщо $a < 0$, то $x<\log_2\left(-\frac{a}{2}\right)$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x<\log_2 \frac{a}{4}$; 2) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то нерівність не має змісту; якщо $0 < a < 1$, то $1<x<\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$; якщо $a > 1$, то $x>\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$. **151.** $0<a<\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$.

152. 1) $a = 12$ або $a < 0$; 2) $a < -1$ або $a = -0{,}75$. **159.** 1) 0; -3; 2) $e^{-\frac{1}{4}}$. **161.** 1) 7; 2) 0,25. **163.** 1) $y = 0$; 2) $y = 3x - 3$. **164.** 1) 6; 2) 24. **166.** 1) $\max\limits_{[0;\,3]} f(x) = f(2) = \frac{4}{e^2}$; $\min\limits_{[0;\,3]} f(x) = f(0) = 0$; 2) $\max\limits_{[3;\,0]} f(x) = f(0) = 1$; $\max\limits_{[3;\,0]} f(x) = f(0) = 1$; $\min\limits_{[3;\,0]} f(x) = f(-2) = \frac{1}{e^4}$. **167.** 0; -4. **168.** $y = 5 - 2x$. **169.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) -1.

Розділ 2. § 11. **11.21.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **11.22.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так. **11.27.** 1) Так; 2) ні. **11.28.** 1) Ні; 2) так. **11.33.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так. **11.34.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **11.43.** 18 000 кг. **11.44.** $\left(1; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; $\left(-1; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. *Вказівка*. Запишіть рівняння у вигляді $(x + \sin xy)^2 + \cos^2 xy = 0$.

§ 12. **12.21.** 1) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - 13$; 2) $5\sqrt[5]{x} - 2$. **12.22.** 1) $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + 1$; 2) $3\sqrt[3]{x} - 8$. **12.23.** $F(x) = \frac{1}{\ln 5}(5^x - 2)$. **12.24.** $F(x) = \frac{1}{\ln 4}(4^x + 1)$. **12.25.** 1) $3x^3 - x^2 - 22$; 2) $3x + 8\sqrt{x} - 11$. **12.26.** 1) $x^4 + 3x^2 - 2$; 2) $4\sqrt{x} - 5x$. **12.27.** 1) $\frac{(3x-2)^7}{21} + C$; 2) $3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{9}\right) + C$; 3) $\frac{1}{4}e^{4x+7} + C$; 4) $-2\operatorname{ctg} 3x + C$. **12.28.** 1) $\frac{(4x+1)^6}{24} + C$; 2) $-2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + C$; 3) $\frac{1}{5}e^{5x-11} + C$; 4) $4\operatorname{ctg} 2x + C$. **12.33.** 1) $\frac{1}{4}\ln|4x - 5| + C$; 2) $\frac{3^{4+2x}}{2\ln 3} + C$. **12.34.** 1) $\frac{1}{8}\ln|8x + 2| + C$; 2) $\frac{5^{3x-9}}{3\ln 5} + C$. **12.35.** 1) $-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$; 2) $2\ln|3x + 4| + 3$. **12.36.** 1) $\frac{1}{4}\sin\left(4x - \frac{\pi}{12}\right)$; 2) $2\ln|4x + 5| + 9$. **12.37.** $s(t) = 3t + t^2 - 20$. **12.38.** $v(t) = 7t - t^2 - 1$. **12.39.** 1) $\frac{21^x}{\ln 21} + C$; 2) $\frac{5^x}{\ln 5} - x + C$. **12.40.** 1) $\frac{3^x}{\ln 3} + C$; 2) $x + \frac{7^x}{\ln 7} + C$. **12.41.** 1) $2e^{5x-4} + 3$; 2) $1 - \frac{1}{3}\ln|2 - 3x|$. **12.42.** 1) $2e^{2x+3} + 5$; 2) $5 - \frac{1}{2}\ln|1 - 2x|$. **12.43.** 1) $0{,}5\sqrt{4x-1} - 8\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$; 2) $\frac{1}{9}(6x+2)\sqrt{6x+2} + e^{4-x} + C$. **12.44.** 1) $\sqrt{2x+3} - 12\operatorname{tg}\frac{x}{4} + C$; 2) $\frac{2}{9}(3x-4)\sqrt{3x-4} - e^{1-x} + C$. **12.45.** $\frac{1}{8}(6x+1)\sqrt[3]{6x+1} + 3$. **12.46.** $0{,}1(8x+1)\sqrt[4]{8x+1} + 2$. **12.47.** 1) $-\frac{1}{4}\cos 4x + C$; 2) $\frac{1}{5}\sin\left(5x + \frac{\pi}{8}\right) + C$;

3) $\frac{x^7}{7}-x^4+\frac{4}{3}x^3+C$; $\frac{x^7}{7}-x^4+\frac{4}{3}x^3+C$; 4) $\frac{x^4}{4}-3x+2\ln|x|+C$.

12.48. 1) $4\sin\frac{x}{4}+C$; 2) $-\frac{1}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)+C$; 3) $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+C$; 4) $\frac{x^7}{7}-5x+3\ln|x|+C$. **12.49.** x^3-3x^2+8x-6. **12.50.** x^4-x^2+3x+3. **12.51.** -15 м/с. **12.52.** 62 м. **12.53.** 1) $x-\cos x+C$; 2) $6x-31\ln|x+5|+C$; 3) $-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$; 4) $0,5e^{2x}-0,5e^{-2x}+C$.

12.54. 1) $x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$; 2) $x-7\ln|x+4|+C$; 3) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$; 4) $0,5e^{2x}+0,5e^{-2x}+C$. **12.55.** 1) -5; 1; 5; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

12.56. 1) -2; -1; 1; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. **12.57.** $-3x^2+7x-\frac{1}{12}$.

12.58. $2x^2-2x+3,5$. **12.59.** 1) $\sin x+13$; 2) $\sin x+9$; 3) $\operatorname{tg} x-\sqrt{3}$; 4) $-\operatorname{ctg} x-10x-2,5\pi$; 5) $-\cos x+7-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\sin x-2-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12.60. 1) $\sin x+12$; 2) $-4\cos x-1$; 3) $-\operatorname{ctg} x+4$; 4) $2x+\operatorname{tg} x+1+\frac{\pi+\sqrt{3}}{3}$; 5) $\sin x-2,5$; 6) $-\cos x+3-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **12.61.** 1) $-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{4}\cos 2x+1\frac{23}{48}$; 2) $-\frac{6}{5}\sqrt{5x+4}-8x+11,6$. **12.62.** 1) $\sin 2x+2\sin x-1$; 2) $8\sqrt{3x-6}+x-29$.

12.63. $x^2+3x+2,25$. **12.64.** $x^2-5x+6,25$. **12.65.** $0,75x^4+7,25$.

12.66. $x^2+2,25$. **12.67.** 1) $\frac{2}{27}((x+10)\sqrt{x+10}+(x+1)\sqrt{x+1})+C$. *Вказівка*. Домножте чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}$; 2) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^5}+\sqrt[3]{(3x+1)^2}\right)+C$. *Вказівка* $\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3x+3}{\sqrt[3]{3x+1}}=$
$=\frac{1}{3}\left(\frac{3x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}+\frac{2}{\sqrt[3]{3x+1}}\right)=\frac{1}{3}\left((3x+1)^{\frac{2}{3}}+2(3x+1)^{-\frac{1}{3}}\right)$.

12.68. 1) $\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$; 2) $\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+C$.

12.69. 1) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. *Вказівка*. Використайте формулу пониження степеня; 2) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 3) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 4) $-2\operatorname{ctg} 2x+C$. *Вказівка*. $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+$ $+\frac{1}{\sin^2 x}$. **12.70.** 1) $0,5x+0,25\sin 2x+C$; 2) $0,5x-0,05\sin 10x+C$;

3) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 4) $-\frac{2}{\sin 2x}+C$. **12.71.** Більше 3,5 кг. **12.72.** *Вказівка.* Доведіть, що куб натурального числа при діленні на 9 в остачі дає тільки 0; 1 і 8.

§ 13. **13.15.** 1) $6\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) $5\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$. **13.16.** 1) $2\frac{1}{3}$; 2) $6\frac{2}{3}$; 3) 18; 4) $5\frac{1}{3}$. **13.17.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{3}(e^3-1)$; 4) ln2. **13.18.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) 4; 3) $\frac{1}{5}(e^{11}-e)$; 4) ln3. **13.19.** 1) 19,5; 2) $\frac{41}{6}$. **13.20.** 1) 12; 2) $\frac{16}{3}$. **13.21.** 20. **13.22.** 18. **13.23.** 18,5. **13.24.** 20. **13.25.** 1) $\pi+4$; 2) $2\pi-2$. **13.26.** 1) $\frac{\pi}{2}+2$; 2) $\frac{3\pi}{2}-\sqrt{2}$. **13.27.** ln 3. **13.28.** $\frac{1}{3}\ln 10$. **13.29.** 340 м. **13.30.** 135 м. **13.31.** 1) $520\frac{5}{6}$ м; 2) 1 м/с^2. **13.32.** 1) $66\frac{2}{3}$ м; 2) 0 м/с^2. **13.33.** 4 с. **13.34.** 3 с. **13.35.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{9\pi}{4}$. **13.36.** 1) 2π; 2) 9π. **13.37.** 1) $4\frac{2}{3}$; 2) 0,5. **13.38.** 1) $17\frac{1}{3}$; 2) 2,5. **13.39.** 7. **13.40.** $1{,}5+\frac{\pi}{4}$. **13.41.** 8,25 м. **13.42.** 64,5 м. **13.43.** -11; $-\frac{11}{21}$. **13.44.** 8; $\frac{8}{15}$. **13.45.** 1) 2π. *Вказівка.* $\sqrt{4x-x^2}=\sqrt{4-(x-2)^2}$; 2) 24. **13.46.** 1) $\frac{\pi}{2}$. *Вказівка.* $\sqrt{-x^2-2x}=\sqrt{1-(x+1)^2}$; 2) 21. **13.47.** 1) 4000; 2) на 40 днів. **13.48.** -1. *Вказівка.* $y=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$; $y=t^2-1$, де $t=x^2+5x+5$.

§ 14. **14.10.** 1) 12; 2) 24,8. **14.11.** 1) 8; 2) 18,6. **14.12.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $-0{,}75$. **14.13.** 1) $-1{,}5$; 2) $\frac{59}{12}$. **14.14.** 1) $\frac{56}{3}$; 2) 56; 3) 180; 4) 67,5. **14.15.** 1) $-31{,}5$; 2) 34; 3) 4,75; 4) 4,5. **14.16.** 1) 12; 2) 8. **14.17.** 1) 2; 2) $1\frac{1}{3}$. **14.18.** 1) 0,5; 2) 3; 3) 3; 4) 4. **14.19.** 1) 1; 2) 6; 3) $3\sqrt{3}$; 4) 1. **14.20.** 1) 0,2; 2) $-1{,}5$; 3) 0; 4) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; 5) $4\frac{2}{3}$; 6) 2,25. **14.21.** 1) 4; 2) 4; 3) 0,2; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 5) $12\frac{2}{3}$; 6) $1\frac{13}{15}$. **14.22.** 1) $\frac{1}{2}(1-e^{-6})$; 2) $5\left(1-e^{-\frac{1}{5}}\right)$; 3) 0,4; 4) $0{,}2\ln 45$. **14.23.** 1) $\frac{1}{3}(1-e^{-6})$; 2) $2\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)$; 3) 13; 4) $\frac{1}{4}\ln 13$. **14.24.** 1) 37,5 + ln0,5; 2) $\frac{4}{\ln 2}$. **14.25.** 1) 3 + ln2,5; 2) $\frac{3}{\ln 2}$. **14.26.** 1) π; 2) $4{,}5\pi$. **14.27.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 8π. **14.28.** 1) 1,75; 2) $1\frac{1}{15}$. **14.29.** 1) 3,1; 2) 79,2. **14.30.** 1) -4; 2) $\frac{4}{3}$. **14.31.** 1) 2,5; 2) $17\frac{2}{3}$. **14.32.** 1) $33\frac{1}{6}$; 2) $1\frac{15}{16}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{4}{3\ln 2}$. **14.33.** 1) 0;

2) 9,75; 3) π; 4) $\frac{1}{2\ln 2}$. **14.34.** 1) −0,4; 2) $\frac{3\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}$; 3) 9; 4) −2; 5) $3-\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}$; 6) $\frac{\pi}{3}+1$. **14.35.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; 2) π; 3) 0,25; 4) −1,5; 5) $2-\frac{\pi}{12}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 6) $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **14.36.** $8\frac{1}{3}$. **14.37.** $24\frac{2}{3}$. **14.38.** 2,5. **14.39.** 12,5. **14.40.** $4+2\pi$. **14.41.** $6+\frac{\pi}{2}$. **14.42.** 1) $3-\ln 4$; 2) $2-\ln 5$. **14.43.** 1) $2-\ln 4$; 2) $5-0{,}5\ln 21$. **14.44.** 1) 4,3; 2) $13{,}5+6\ln 2$. **14.45.** 1) 2,45; 2) $4\ln 3$. **14.46.** $8\ln 2-\frac{37}{6}$. **14.47.** $2\ln 2-\frac{5}{3}$. **14.48.** 1) $\frac{35}{6}$; 2) 12. **14.49.** 1) $\frac{29}{6}$; 2) 18. **14.50.** $a=-\frac{2}{\pi}$; $b=2$. **14.51.** 1) 25; 2) $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2. **14.52.** 1) 6; 2) −2; 2. **14.53.** 1) $(-\infty;-6)\cup(1;+\infty)$; 2) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **14.54.** 1) [−3; 4]; 2) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **14.55.** 1) 171 кг; 5130 кг; 2) 4617 м^2.

§ 15. **15.10.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $8-\frac{3}{\ln 2}$. **15.11.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $3-\frac{2}{\ln 3}$. **15.12.** 36 Дж. **15.13.** 22 Дж. **15.14.** 1) 12; 2) $\frac{128}{3}$. **15.15.** 1) 28; 2) 18. **15.16.** 1) $10{,}5\pi$; 2) 625π. **15.17.** 1) 10 π; 2) 9 π. **15.18.** 1) 4,5; 2) 4,5; 3) $10\frac{2}{3}$; 4) $1\frac{5}{27}$; 5) $5\frac{1}{3}$; 6) $1\frac{2}{3}$. **15.19.** 1) 4,5; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{1}{8}$; 5) $21\frac{1}{3}$; 6) $2\frac{1}{6}$. **15.20.** 1) 4,5; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 4,5; 4) $1\frac{1}{3}$; 5) 9; 6) $\frac{1}{6}$. **15.21.** 1) 4,5; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $10\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$. **15.22.** 1) 18; 2) $2\frac{2}{3}$; 3) $21\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 0,25; 6) 16; 7) 12; 8) $\frac{1}{6}$. **15.23.** 1) 2; 2) $2\frac{2}{3}$; 3) 9; 4) 54; 5) 0,75; 6) $\frac{1}{6}$. **15.24.** 1) $\frac{1}{2\ln 2}$, 2) $e-2$; 3) $3-6\ln 1{,}5$; 4) $7{,}5-4\ln 4$. **15.25.** 1) $\frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{2\ln 2}-1$; 3) $8-8\ln 2$; 4) $17{,}5-6\ln 6$. **15.26.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 31 π. **15.27.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 56 π. **15.28.** 0,375 Дж. **15.29.** 0,45 Дж. **15.30.** 1) 2; 2) 4,5. **15.31.** 1) 1,5; 2) $10\frac{2}{3}$. **15.32.** 1) $1+\frac{\pi^2}{8}$; 2) $2+\frac{\pi^2}{2}$. **15.33.** 1) $1+\frac{\pi^2}{8}$; 2) $1+\frac{\pi^2}{8}$. **15.34.** $\pi+\frac{1}{3}$. **15.35.** $\frac{5\pi}{2}-1$. **15.36.** $12-\frac{9}{2\ln 2}$. **15.37.** $27-\frac{12}{\ln 3}$.

15.38. $\frac{1}{3}$. **15.39.** $\frac{1}{3}$. **15.40.** 2π. **15.41.** 33π. **15.42.** 0,09 м. **15.43.** 0,1 м. **15.44.** $20\frac{5}{6}$. **15.45.** $14\frac{7}{24}$. **15.46.** 1) $\frac{2}{\ln 2}-1,5$; 2) $\frac{2}{3}\left(7-\frac{4}{3\ln 3}\right)$. **15.47.** 1) $\frac{7}{\ln 2}-2$; 2) $2e-1$. **15.48.** $\frac{2}{\pi}+\frac{2}{3}$. **15.49.** $2+\frac{\pi^3}{6}$. **15.50.** 1) $2+\frac{1}{\ln 2}$; 2) $\frac{8}{3}\sqrt{3}-4$. **15.51.** 1) $\frac{2}{\ln 3}+\frac{9}{4}$; 2) $2\sqrt{2}-2$. **15.52.** 1) $2\frac{3}{4}$; 2) $\frac{3}{8}$. **15.53.** 1) 14; 2) 36. **15.54.** 10. **15.55.** $30\frac{2}{3}$. **15.56.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $2\frac{1}{3}$. **15.57.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $2\frac{1}{3}$. **15.58.** $6\frac{6}{7}$. **15.59.** $\frac{5}{72}$. **15.60.** 2,25. **15.61.** 18. **15.62.** 8,5. **15.63.** $12\frac{2}{3}$. **15.64.** $\frac{1}{3}$. **15.65.** $\frac{1}{3}$. **15.66.** 2,25. **15.67.** 2,25. **15.68.** $\frac{9}{32}$. **15.69.** $\frac{2}{3}$. **15.70.** 1) $a=-2$; $b=-\frac{21}{4}$; 2) $\left(-\frac{7}{2};\ \frac{7}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{17}{4}\right)$; 3) $\frac{9}{4}$. **15.71.** 1) $a=-0,5$; $b=1,5$; 2) $(-1;\ 0)$, $(2;\ 1,5)$; 3) $\frac{9}{8}$. **15.72.** $a=2$; $S=3,5$. **15.73.** $a=5$; $S=\frac{19}{12}$. **15.74.** $b=\frac{16}{9S^2}-1$; $0<S<\frac{4}{3}$. **15.75.** $p=\frac{128}{9S^2}-1$; $0<S<\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **15.76.** 1) 36 000 Вт. **15.77.** $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$.

Вправи для повторення розділу 2

9. **1),** 4) Так; 2), 3) ні. **11.** 1), 3) Так; 2), 4) ні. **13.** Ні. **22.** 1) $\frac{9}{10}x\sqrt[9]{x}+3$; 2) $4\sqrt[4]{x}-4$. **23.** 1) x^5-3x^2+4; 2) $6\sqrt{x}-2x$. **24.** 1) $\frac{(2x+3)^5}{10}+C$; 2) $\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)+C$; $\frac{1}{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)+C$; 3) $2e^{\frac{1}{2}x-3}+C$; 4) $-12\operatorname{ctg}\frac{x}{4}+C$. **25.** 1) $\frac{1}{3}\ln|3x+7|+C$; 2) $\frac{3\cdot 5^{\frac{1}{3}x-7}}{\ln 5}+C$. **26.** 1) $-\frac{1}{4}\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $5\ln|7x-6|+2$. **27.** $s(t)=5t+2t^2+3$. **28.** 1) $\frac{1}{3}\sqrt{6x-5}+12\operatorname{tg}\frac{x}{5}+C$; 2) $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+e^{7-x}+C$. **29.** $\frac{1}{12}(10x+1)\sqrt[5]{10x+1}-1$. **30.** 1) $-\frac{1}{6}\cos 6x+C$; 2) $0,5\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)+C$; 3) $\frac{4}{5}x^5+x^4+\frac{x^3}{3}+C$; 4) $\frac{x^4}{4}-4x+\ln|x|+C$. **31.** $x^5+x^2-7x-22$. **32.** 10 м/с. **33.** Ні, наприклад, первісною для періодичної функції $f(x)=\sin x+1$ є функція $F(x)=-\cos x+x+C$, яка неперіодична. **37.** 1) 30,9 м; 2) 130 м. **38.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 22,5; 3) $\frac{128}{3}$;

4) 18. **39.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 4; 3) $\frac{1}{3}(e^4 - e)$; 4) ln4. **40.** 1) 400 м; 2) 3 м/с^2. **41.** 1) $12\frac{2}{3}$; 2) 1. **42.** 0,5 + π. **43.** $23\frac{1}{3}$м. **47.** 1) 6; 2) $\frac{15}{16}$; 3) e; 4) 18. **48.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 315. **49.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) 4; 3) −1,25; 4) 3; 5) $12\frac{2}{3}$; 6) 50. **50.** 1) $1 - e^{-2}$; 2) $4(1 - e^{-1})$; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{1}{5}\ln 11$. **51.** 1) 999 − ln0,1; 2) $\frac{12}{\ln 3}$. **52.** 1) $\frac{9\pi}{4}$; 2) 2π. **53.** 1) $3\frac{8}{15}$; 2) −2,49; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{6}{\ln 3}$. **54.** 5,5. **55.** 2,5. **56.** 20 − 2π. **57.** a = 2. **61.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) $10\frac{2}{3}$; 4) $1\frac{5}{27}$; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) $2\frac{2}{3}$. **62.** 1) $\frac{2}{\ln 3}$; 2) $e^2 - 3$; 3) 8ln2; 4) 31,5 − 24 ln2. **63.** 1) π; 2) 57π. **64.** 2 Дж. **65.** 1) 4,5; 2) $1\frac{1}{3}$. **66.** $32 - \frac{28}{3\ln 2}$. **67.** 8π. **68.** $\frac{19\pi}{24}$.

Розділ 3. § 16. **16.21.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **16.22.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **16.23.** 11 200 грн. **16.24.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. *Вказівка*. Оскільки $x^2 + y^2 = 1$, то існує таке значення α, що $x = \cos\alpha$; $y = \sin\alpha$.

§ 17. **17.15.** 720. **17.16.** 120. **17.17.** 20. **17.18.** 1680. **17.19.** 560. **17.20.** 4845. **17.21.** 120. **17.22.** 105. **17.23.** 36. **17.24.** 8. **17.25.** 1) 60; 2) 125. **17.26.** 1) 20; 2) 25. **17.27.** 1) 120; 2) 24; 3) 48. **17.28.** 1) 24; 2) 6; 3) 12. **17.29.** 1) 132; 2) 110. **17.30.** 1) 336; 2) 42. **17.31.** 1) $-\frac{1}{144}$; 2) $\frac{1}{6720}$. **17.32.** 1) $-\frac{1}{30}$; 2) $\frac{1}{1260}$. **17.33.** 1) 5; 2) 10. **17.34.** 1) 4; 2) 12. **17.35.** 24. **17.36.** 120. **17.37.** 600. **17.38.** 18. **17.39.** 8. **17.40.** 210. **17.41.** 70. **17.42.** 560. **17.43.** 1050. **17.44.** 45. **17.45.** 240. **17.46.** 1) 1; 2; 3; 4; 5; 2) 11; 12; 13... **17.47.** 1) 4; 5; 6; 7...; 2) 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. **17.48.** 1) 5; 2) 4; 3) 6; 4) 17. **17.49.** 1) 10; 2) 9; 3) 9; 10; 4) 8. **17.50.** $(8!)^2$. **17.51.** $(5!)^2$. **17.52.** 10^{80}. **17.53.** $7^3 = 343$. **17.54.** 1) 3; 4; 5; 6; 2) 4; 5; ...; 14; 15. **17.55.** 1) 3; 4; 2) 2; 3; 4; 5; 6; 7. **17.56.** 1) 35; 2) 210; 3) 15; 4) $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$; 5) 20; 6) 120. **17.58.** 1) 60; 2) 1260. **17.59.** 1) 360; 2) 120. **17.60.** 21. **17.61.** 720. **17.62.** 48. **17.63.** 2520. **17.64.** 90. **17.65.** 10. **17.66.** 72. **17.67.** 1) 560; 2) 140; 3) 420. **17.68.** 1) 165; 2) 30; 3) 135. **17.69.** 1) 5; 2) 4. **17.70.** 7. **17.71.** 1) 4; 5; 2) 3; 4; ...; 13; 14. **17.72.** 1) 3; 4; 5; 2) 3; 4; 5; 6; 7; 8. **17.73.** 1) (5; 3); 2) (8; 3). **17.74.** 1) (18; 8); 2) (3; 6). **17.75.** 48. **17.76.** 10 080. **17.77.** $7! - 2 \cdot 6! = 3600$. **17.78.** $6! - 2 \cdot 5! = 480$. **17.79.** 9. **17.80.** 22. **17.83.** 1) $9 \cdot 10^3 - 8 \cdot 9^3 = 3168$; 2) $9 \cdot 10^5 - 6 \cdot 7^5 = 799\,158$. **17.84.** 1) $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4 = 37\,512$; 2) $9 \cdot 10^4 - 7 \cdot 8^4 = 61\,328$. **17.85.** $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 10^3 = 4\,536\,000$. **17.86.** 5040. **17.87.** 12. **17.88.** 8. **17.90.** 12 білих і 10 чорних. **17.91.** 6 синіх; 5 червоних. **17.92.** 14 км/год.

§ 18. **18.24.** $\frac{3}{4}$. **18.27.** $\frac{1}{66}$. **18.28.** $\frac{1}{120}$. **18.29.** $\frac{2}{3}$. **18.30.** $\frac{1}{2}$. **18.31.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{5}{12}$. **18.32.** 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{7}{12}$. **18.33.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{7}{90}$; 5) $\frac{8}{90}$; 6) $\frac{87}{90}$. **18.34.** 1) $\frac{1}{10}$; 2) $\frac{9}{10}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{11}{90}$; 6) $\frac{43}{45}$. **18.35.** 1) $\frac{11}{45}$; 2) $\frac{1}{15}$; 3) $\frac{2}{45}$; 4) $\frac{4}{45}$. **18.36.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{4}{45}$. **18.37.** 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{72}$; 3) $\frac{1}{36}$; 4) $\frac{1}{8}$. **18.38.** 1) $\frac{35}{36}$; 2) $\frac{1}{36}$; 3) $\frac{1}{72}$; 4) $\frac{1}{8}$. **18.39.** 1) 12; 2) 6; 3) менше від 6; 4) більше за 7. **18.40.** 1) 5; 2) 15; 3) більше за 15; 4) менше від 5. **18.41.** $\frac{1}{10}$. **18.42.** $\frac{2}{5}$. **18.43.** $\frac{1}{720}$. **18.44.** $\frac{1}{120}$. **18.45.** $\frac{7}{190}$. **18.46.** $\frac{13}{105}$. **18.47.** $\frac{1}{5}$. **18.48.** $\frac{2}{15}$. **18.49.** $\frac{2}{7}$. **18.50.** $\frac{11}{15}$. **18.51.** 1) 0,1512; 2) $0{,}9^6$. **18.52.** 1) 0,504; 2) $0{,}09^4$. **18.53.** 1) $\frac{1}{90}$; 2) 0,01; 3) $\frac{1}{540}$; 4) $\frac{44}{2025}$. **18.54.** 1) $\frac{89}{90}$; 2) $\frac{71}{8100}$; 3) $\frac{1}{225}$; 4) $\frac{89}{4050}$. **18.55.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{2}{9}$. **18.56.** 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{36}$; 4) $\frac{7}{9}$. **18.57.** $\frac{156}{245}$. **18.58.** $\frac{357}{494}$. **18.59.** 1) $\frac{2}{13}$; 2) $\frac{6}{13}$; 3) $\frac{72}{91}$. **18.60.** 1) $\frac{7}{15}$; 2) $\frac{7}{15}$. **18.61.** $\frac{1}{42}$. **18.62.** $\frac{2}{5}$. **18.63.** $\frac{1}{360}$. **18.64.** $\frac{1}{168}$. **18.65.** 1) $\frac{1}{15}$; 2) $\frac{7}{15}$; 3) $\frac{7}{15}$. **18.66.** 1) $\frac{3}{190}$; 2) $\frac{68}{95}$; 3) $\frac{51}{190}$. **18.67.** 1) $\frac{5}{42}$; 2) $\frac{10}{21}$; 3) $\frac{5}{14}$; 4) $\frac{1}{21}$. **18.68.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{10}$; 4) $\frac{1}{30}$. **18.69.** 1) $\frac{1}{120}$; 2) $\frac{2}{5}$. **18.70.** 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{2}$.

18.71.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{5}$	0

18.72.

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$	0

18.73. 1) $p(n) = \frac{5n^2 - 7n}{4(2n-1)(2n-3)}$; 3) $\frac{5}{16}$; 4) 6. **18.74.** 1) $p(n) = \frac{3n}{4(2n-1)}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) 9. **18.75.** 250 мг.

§ 19. **19.21.** 1) {11; 12; 13; 21; 22; 23; 31; 32; 33}; 2) A = {12; 22; 32}; B = {12; 13; 21; 23; 31; 32}; $\overline{A}$ = {11; 13; 21; 23; 31; 33}; $\overline{B}$ = {11; 22; 33};

$AB = \{12;\ 32\}$; $A + B = \{12;\ 13;\ 21;\ 22;\ 23;\ 31;\ 32\}$; $A\overline{B} = \{22\}$; **3)** A і $\overline{A}$; B і $\overline{B}$; B і $A\overline{B}$; $\overline{A}$ і AB; $\overline{A}$ і $A\overline{B}$; $\overline{B}$ і AB; AB і $A\overline{B}$. **19.22.** **1)** $\{44;\ 45;\ 46;\ 54;\ 55;\ 56;\ 64;\ 65;\ 66\}$; **2)** $A = \{45;\ 55;\ 65\}$; $B = \{44;\ 55;\ 66\}$; $\overline{A} = \{44;\ 46;\ 54;\ 56;\ 64;\ 66\}$; $\overline{B} = \{45;\ 46;\ 54;\ 56;\ 64;\ 65\}$; $AB = \{55\}$; $A + B = \{44;\ 45;\ 55;\ 65;\ 66\}$; $A\overline{B} = \{45;\ 65\}$; **3)** A і $\overline{A}$; B і $\overline{B}$; B і $A\overline{B}$; $\overline{A}$ і AB; $\overline{A}$ і $A\overline{B}$; $\overline{B}$ і AB; AB і $A\overline{B}$. **19.23.** **1)** $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$; **2)** $\overline{B} = \{2;\ 4;\ 6\}$; $\overline{C} = \{1;\ 2;\ 3\}$; $AB = \{3\}$; $A + B = \{1;\ 3;\ 5;\ 6\}$; $A\overline{C} = \{3\}$; $E + D = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$; $EF = \varnothing$. **19.24.** **1)** $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$; **2)** $\overline{B} = \{1;\ 3;\ 5\}$; $\overline{C} = \{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$; $AB = \{2;\ 4\}$; $A + B = \{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 6\}$; $A\overline{C} = \{4;\ 5\}$; $D + F = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$; $EF = \varnothing$. **19.25.** **1)** Поява рівно одного герба; **2)** поява рівно двох гербів. **19.26.** $C = \overline{A} \cdot \overline{B}$; $D = A\overline{B} + \overline{A}B$; $E = AB$; $F = A + B$. **19.27.** $A = A_1A_2A_3$; $B = A_1A_2A_3$; $C = A_1A_2A_3$; $\overline{D} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$; $E = \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2$; $F = \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2$; $G = \overline{A}_1\overline{A}_2$. **19.28.** $D_1 = ABC$; $D_2 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$; $D_3 = A\overline{B}\overline{C}$; $D_4 = A + B + C$; $D_5 = A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$; $D_6 = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$. **19.29.** **1)** $A + B = B$; $AB = A$; $D + B = B$; $DB = D$; $C + E + D$; $BF = F$; **2)** так; **3)** ні. **19.30.** $\frac{3767}{6468} \approx 0{,}582$. **19.31.** $\frac{169}{330} \approx 0{,}512$. **19.32.** **1)** $\frac{5}{6}$; **2)** $\frac{29}{30}$. **19.33.** **1)** $\frac{986}{1001}$; **2)** $\frac{133}{143}$. **19.34.** 0,6976. **19.35.** 0,496. **19.36.** $\frac{47}{95}$. **19.37.** $\frac{17}{35}$. **19.38.** $\frac{154}{435} \approx 0{,}354$. **19.39.** $\frac{61}{190} \approx 0{,}321$. **19.41.** $\frac{43}{143}$. **19.42.** $\frac{23}{42}$. **19.43.** **1)** 54 000 осіб. **19.44.** Рівняння не має розв'язків. *Вказівка.* Розгляньте остачі від ділення лівої і правої частин рівняння на 8.

§ 20. **20.21.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$. **20.22.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$. **20.23.** 0,666. **20.24.** 0,33. **20.25.** 1) 0,081; 2) 0,009. **20.26.** 1) 0,032; 2) 0,128. **20.27.** Ні. **20.28.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **20.29.** $\frac{1}{9}$. **20.30.** $\frac{1}{3}$. **20.31.** 0,94. **20.32.** 0,91. **20.33.** $1-0{,}998^6 \cdot 0{,}998^4 \approx 0{,}0198$. **20.34.** $1-0{,}99^{100} \approx 0{,}634$. **20.35.** 1) 0,86526; 2) 0,13474. **20.36.** 1) 0,504; 2) 0,496. **20.37.** $\frac{1}{3}$. **20.38.** $\frac{2}{3}$. **20.39.** 1) 0,0196; 2) 0,9996. **20.40.** $\frac{91}{216}$. **20.41.** У 1,5 рази. **20.42.** $\frac{5}{1764}$. **20.43.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 0,216. **20.44.** 17. **20.45.** 8. **20.46.** $\frac{98}{125}$. **20.47.** $\frac{21}{25}$. **20.48.** $\frac{31}{96}$. **20.49.** 0,31. **20.50.** 1) 0,015; 2) 0,985; 3) 0,14; 4) 0,425; 5) 0,42. **20.51.** 0,488. **20.52.** 1) $\frac{1}{(N!)^2}$; 2) $\frac{1}{N!}$.

20.53. $\frac{C_{15}^2}{C_{30}^2} + \frac{C_{15}^1 \cdot C_{15}^1}{C_{30}^2} \cdot \frac{C_{14}^1}{C_{28}^1} = \frac{1}{2}$. **20.54.** 12 %. **20.55.** 0. *Вказівка.* Використати, що функції $f(x) = e^x - 1$ і $g(x) = \ln(x + 1)$ є взаємно оберненими.

§ 21. **21.9.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = 0{,}09$; $x_2 = 1$, $p_2 = 0{,}42$; $x_3 = 2$, $p_3 = 0{,}49$; 2) 0,51; 3) 0,49; 4) 1,4. **21.10.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = 0{,}25$; $x_2 = 1$, $p_2 = 0{,}5$; $x_3 = 2$, $p_3 = 0{,}25$; 2) 0,25; 3) 0,75; 4) 1. **21.11.** 40 грн. **21.12.** 17 грн. **21.13.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = \frac{3}{28}$; $x_2 = 1$, $p_2 = \frac{15}{28}$; $x_3 = 2$, $p_3 = \frac{5}{14}$; 2) $\frac{3}{28}$; 3) $\frac{9}{14}$; 4) $\frac{5}{4}$. **21.14.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = \frac{28}{45}$; $x_2 = 1$, $p_2 = \frac{16}{45}$; $x_3 = 2$, $p_3 = \frac{1}{45}$; 2) 1; 3) 0; 4) 0,4. **21.15.** 1) $x_1 = 1$, $p_1 = 0{,}25$; $x_2 = 2$, $p_2 = 0{,}25$; $x_3 = 3$, $p_3 = 0{,}25$; $x_4 = 4$, $p_4 = 0{,}25$; 2) 2,5. **21.16.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = 0{,}08$; $x_2 = 1$, $p_2 = 0{,}44$; $x_3 = 2$, $p_3 = 0{,}48$; 2) 1,4. **21.17.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = 0{,}09$; $x_2 = 1$, $p_2 = 0{,}42$; $x_3 = 2$, $p_3 = 0{,}49$; 2) 1,4. **21.18.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = \frac{1}{81}$; $x_2 = 1$, $p_2 = \frac{8}{81}$; $x_3 = 2$, $p_3 = \frac{24}{81}$; $x_4 = 3$, $p_4 = \frac{32}{81}$; $x_5 = 4$, $p_5 = \frac{16}{81}$; 2) $\frac{8}{3}$. **21.19.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = 0{,}216$; $x_2 = 1$, $p_2 = 0{,}432$; $x_3 = 2$, $p_3 = 0{,}288$; $x_4 = 3$, $p_4 = 0{,}064$; 2) 1,2. **21.20.** 1) 20 % за сніданок; 40 % за обід; 12 % за полуденок; 2) 700 ккал. **21.21.** Ні.

Вправи для повторення розділу 3

9. **1)** Так; 2) ні; 3) ні. **17.** 24. **18.** 132. **19.** 84. **20.** 220. **21.** 216. **22.** 1) 24; 2) 64. **23.** 1) $-\frac{1}{840}$; 2) $\frac{1}{30}$. **24.** 1) 2; 2) 8. **25.** 24. **26.** 96. **27.** 15. **28.** 350. **29.** 132. **30.** 20. **31.** 1) 5; 6; 7; ...; 2) 2; 3; 4; 5; 6; 7. **32.** 1) 2520; 2) 420. **33.** 100. **34.** 1680. **35.** 48. **36.** 1) 126; 2) 6; 3) 120. **37.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **38.** 32. **39.** 480. **40.** 420. **51.** $\frac{1}{15}$. **52.** 0,3. **53.** Рівноймовірні. **54.** $\frac{11}{20}$. **55.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{1}{6}$. **56.** 1) 3; 2) 4; 3) менше від 4; 4) 1 або 2. **57.** 0,4. **58.** $\frac{1}{5040}$. **59.** $\frac{1}{40}$. **60.** $\frac{1}{3}$. **61.** $\frac{9}{245}$. **62.** 1) $\frac{7}{24}$; 2) $\frac{21}{40}$; 3) $\frac{7}{10}$. **63.** 1) $\frac{5}{36}$; 2) $\frac{1}{6}$. **64.** 0,7. **65.** $\frac{1}{63}$. **66.** $\frac{1}{420}$. **77.** {77; 78; 79; 87; 88; 89; 97; 98; 99}; 2) $A = \{78; 88; 98\}$; $B = \{87; 97; 98\}$; $\overline{A} = \{77; 79; 87; 89; 97; 99\}$; $\overline{B} = \{77; 78; 79; 88; 89; 99\}$; $AB = \{98\}$; $A + B = \{78; 87; 88; 97; 98\}$; $A\overline{B} = \{78; 88\}$; 3) A і $\overline{A}$; B і $\overline{B}$; B і $A\overline{B}$; $\overline{A}$ і AB; $\overline{A}$ і $A\overline{B}$; $\overline{B}$ і AB; AB і $A\overline{B}$. **78.** $A = A_1A_2A_3$; $B = \overline{A_1}A_2A_3 + A_1\overline{A_2}A_3 + A_1A_2\overline{A_3} + \underline{A_1A_2A_3}$; $C = A_1$; $D = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. **79.** $\frac{181}{385} \approx 0{,}470$. **80.** 0,8488. **81.** $\frac{11}{21}$. **82.** $\frac{47}{150} \approx 0{,}313$. **93.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$. **94.** 0,747. **95.** 1) 0,147; 2) 0,063. **96.** $\frac{1}{6}$. **97.** 0,973.

98. 1) 0,126; 2) 0,874. **99.** $\frac{7}{9}$. **100.** $\frac{15}{16}$. **101.** 13. **102.** $\frac{9}{25}$. **103.** 1) 0,31; 2) 0,69. **108.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = \frac{25}{36}$; $x_2 = 1$, $p_2 = \frac{5}{18}$; $x_3 = 2$, $p_3 = \frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{36}$; 3) $\frac{35}{36}$; 4) $\frac{1}{3}$. **109.** 32,5 грн. **110.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = \frac{5}{14}$; $x_2 = 1$, $p_2 = \frac{15}{28}$; $x_3 = 2$, $p_3 = \frac{3}{28}$; 2) $\frac{25}{28}$; 3) $\frac{9}{14}$; 4) 1; 5) 0; 6) 0,75. **111.** 1) $x_1 = 0$, $p_1 = 0{,}12$; $x_2 = 1$, $p_2 = 0{,}46$; $x_3 = 2$, $p_3 = 0{,}42$; 2) 1,3.

Розділ 4. **§ 22.** **22.25.** 1) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $2\pi k$, $k \in Z$. **22.26.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$. **22.27.** 2) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. **22.28.** 2) πn, $n \in Z$. **22.33.** 1) −2; 3; 2) 1. **22.34.** 1) −1; 7; 2) 1. **22.35.** 1) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 2) 0,5; 32. **22.36.** 1) $\sqrt{3}-1$; 2) $\frac{1}{27}$; 9. **22.43.** 1) −2; 2) 7; 3) −5; 4; 4) $\varnothing$. **22.44.** 1) 1; 2) 1; 3) −4; 3; 4) $\varnothing$. **22.45.** 1) $\frac{\sqrt{41}-5}{2}$; 2) $1-\sqrt{2}$. **22.46.** 1) $\sqrt{7}-2$; 2) $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$. **22.47.** 1) 2; 3; 2) $\frac{5+\sqrt{53}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$. **22.48.** 1) −2; −1; 2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\frac{-9-\sqrt{53}}{2}$. **22.49.** $\frac{\sqrt{113}-5}{4}$. **22.50.** $\frac{\sqrt{17}-3}{2}$. **22.51.** 1) $\varnothing$; 2) −2. **22.52.** 1) 0; 2) 3. **22.53.** 1) 1; 2) 1. **22.54.** 1) 256; 2) −1. **22.55.** −2. **22.56.** 0,4. **22.57.** 1) $\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; 2) $\frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in Z$. **22.58.** 1) $-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 2) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **22.59.** 1) πn, $n \in Z$; $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 2) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **22.60.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **22.61.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$. **22.62.** $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi m}{4}$, $m \in Z$. **22.63.** $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $-\operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $n \in Z$. **22.64.** $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$. **22.65.** 1) 2; 2) $\frac{1}{8}$. **22.66.** 1) 4; 2) −0,125. **22.67.** 1) 2; 2) $2 - 2\log_2 3$; 3) 3; 4) $\log_{0,3} 3$. **22.68.** 1) 2; 2) $2 - \log_6 2$; 3) 2; 4) $\log_{0,4} 4$. **22.69.** 1) 2; 2) 0. **22.70.** 1) 2; 2) 3. **22.71.** 1) −2; 2) 4; 3) 3; 4) 1,5. **22.72.** 1) 0; 2) 3; 3) 9; 4) 0,5. **22.73.** 1) $2^{\frac{5}{2}}$; 0,5; 2) $-\frac{1}{3}$; 4. **22.74.** 1) 81; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$. **22.75.** Ні. **22.76.** Ні.

22.77. 54 кущі; 18 кущів. **22.78.** 36 кг. **22.79.** 0,9. **22.80.** $\frac{1}{6}$. **22.81.** 12 км/год; 16 км/год. **22.82.** 80 км/год; 70 км/год. **22.83.** 2 км/год. **22.84.** 14 км/год. **22.85.** 60 м^2; 50 м^2. **22.86.** 10 вантажівок. **22.87.** 24 год; 48 год. **22.88.** 36 год; 45 год; **22.89.** 1) 0; 2; $1 \pm \sqrt{7}$; 2) 0; 1; 3. **22.90.** 1) 0; −2; $-1 \pm \sqrt{5}$; 2) 0; −1; 2; −3. **22.91.** 5; 3; 1. **22.92.** 2; 3. **22.93.** 1) 0; 2) 1. **22.94.** 1) 0; 2) −1. **22.95.** 1) 2; 6; 2) [−3; 1]. **22.96.** 1) $-3; -\frac{1}{3}$; 2) [−3; 2]. **22.97.** 1) 4; 2) 2. **22.98.** 1) 1; 2) 3. **22.99.** $(3; +\infty)$. **22.100.** $(-\infty; -3)$. **22.101.** 1) 0,5; 2) −1. **22.102.** 1) 3; 2) 2; −1. **22.103.** −1; 4. **22.104.** −2; 3. **22.105.** 1. **22.106.** 1. **22.107.** 1) 2; 2) −1. **22.108.** 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$. **22.109.** 1) 1; 2) $4\pi m,\ m \in Z$; 3) $\pi + 4\pi m,\ m \in Z$; 4) $\frac{7\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z$. **22.110.** 1) $8\pi n,\ n \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. **22.111.** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$. **22.112.** $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. **22.113.** 1) 3; $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{25}$. **22.114.** 1) 7; $\frac{1}{343}$; 2) $\frac{1}{9}$. **22.115.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; $\operatorname{arcctg} 3 + 2\pi k,\ k \in Z$. **22.116.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; $\operatorname{arctg} 3 + 2\pi k,\ k \in Z$. **22.117.** −2; 4. **22.118.** −1; 5. **22.119.** −1. **22.120.** −3. **22.121.** $\pm\arccos\frac{1}{(-1)^k\frac{\pi}{2} + 2\pi k} + 2\pi n$, $n \in Z,\ k \in Z$. **22.122.** $\pm\arccos\frac{3}{(-1)^k\pi + 3\pi k} + 2\pi n$, $n \in Z,\ k \in Z$. **22.123.** $\frac{\pi}{6} + 4\pi m,\ m \in Z$. **22.124.** $\frac{5\pi}{6} + 4\pi n,\ n \in Z$. **22.125.** 1) 20 дерев; 2) 30 000 зошитів; 3) 240 м^3. **22.126.** $n \geqslant 2,\ n \neq 3,\ n \in N$. *Вказівка.* Врахуйте, що $\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$, а тому $\sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt{2}$ або $\frac{2^n}{n^2} \geqslant 1$. Далі дослідіть функцію $y(x) = \frac{2^x}{x^2}$, якщо $x \in [2; +\infty)$.

§ 23. **23.35.** 8. **23.36.** 624. **23.37.** 1) $[-4; -3] \cup [3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -5) \cup (3; 4)$. **23.38.** 1) $(-4; 1) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -7) \cup [-3; 4)$. **23.39.** 1) $(2; +\infty)$; 2) [1; 5]. **23.40.** 1) $(-\infty; 3)$; 2) $(-\infty; -1] \cup [9; +\infty)$. **23.41.** 1) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup [2; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; -\frac{2}{17}\right] \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **23.42.** 1) $(-1; 1)$; 2) $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{5}{3}; +\infty\right)$; 4) $(-\infty; 3) \cup [14; +\infty)$. **23.43.** 1) $(-2; 2)$;

2) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **23.44.** 1) $[-5; 5]$; 2) $(0; 3)$. **23.45.** 1) -6; -7; 2) -1; 0; 1. **23.46.** 1) 1; 2; 3; 4; 5; 2) -2; -1; 0; 1. **23.47.** $(0{,}3; 5]$. **23.48.** $[0{,}4; 4]$. **23.49.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $[1; 2]$. **23.50.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $[-12; 4)$. **23.51.** 9. **23.52.** -15. **23.53.** $\left(2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

23.54. $\left[\pi + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. **23.57.** 1) $[-3; 1]$; 2) $(4; +\infty)$.

23.58. 1) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$; 2) $(-0{,}5; +\infty)$. **23.59.** 1) $[7; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$. **23.60.** 1) $(-\infty; 3)$; 2) $[2; +\infty)$. **23.61.** 1. **23.62.** 2. **23.63.** 1) $x > 0$; 2) $(-\infty; -0{,}5] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **23.64.** 1) $x < 0$; 2) $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. **23.65.** 2.

23.66. 3. **23.67.** 1) $(-\infty; 1)$; 2) $(-\infty; -1)$; 3) $(-\infty; \log_2 3)$; 4) $(\log_5 2; +\infty)$. **23.68.** 1) $(-\infty; -1)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 2)$; 4) $(-\infty; \log_2 3)$. **23.69.** 1) $(-3; -2) \cup (0; 1)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$. **23.70.** 1) $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$; 2) $(-4; -3] \cup (0; 1]$. **23.71.** 1) $[0{,}2; 25]$; 2) $(2; +\infty)$. **23.72.** 1) $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup (4; +\infty)$; 2) $[3; +\infty)$. **23.73.** 1) $[-3; -1) \cup (5; 7]$; 2) $[-1; 1) \cup (3; 5]$. **23.74.** 1) $[-3; -1) \cup (9; 11]$; 2) $[0{,}5; 1) \cup (2; 2{,}5]$. **23.75.** 1) $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right]$; 2) $\left(-1; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$. **23.76.** 1) $[-1; 0) \cup (3; 4]$; 2) $(-0{,}5; 0) \cup (1{,}5; 2]$. **23.77.** -6. **23.78.** 6. **23.79.** 2. **23.80.** 2. **23.81.** 1) $(-\infty; \log_5 2) \cup (\log_5 3; 1)$; 2) $(-1; 1)$. **23.82.** 1) $(-\infty; 0) \cup (\log_5 3; 2)$; 2) $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. **23.83.** 0,5. **23.84.** 3. **23.85.** $\{0\} \cup \left[1\frac{31}{32}; 2\right)$.

23.86. $\{0\} \cup \left[2\frac{15}{16}; 3\right)$. **23.87.** 1) $[1; 2]$; 2) $[-2; 3]$. **23.88.** 1) $[0{,}2; 1]$; 2) $[-0{,}25; 3]$. **23.89.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2{,}5] \cup [-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2{,}6] \cup [3; +\infty)$; 4) $\left[-3\frac{2}{9}; 0{,}2\right]$. **23.90.** 1) $(-\infty; 2]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -1\frac{2}{3}\right] \cup [-1; +\infty)$; 4) $[-1; 0]$.

23.91. 1) $\left(-\infty; \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; 1) \cup (1; 4]$.

23.92. 1) $(-\infty; -5-\sqrt{13}) \cup [\sqrt{2}-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3) \cup (-3; 2]$. **23.93.** 1) $[-1; 0{,}5]$; 2) $[0; 1)$. **23.94.** 1) $(-\infty; 7)$; 2) $[1; +\infty)$. **23.95.** 1) $[-2; -1{,}6) \cup (0; 2]$; 2) $\{1\} \cup [2; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup (8; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right] \cup (3; +\infty)$. **23.96.** 1) $\left[-3; -\frac{18}{7}\right) \cup (0; 2]$; 2) $\{2\} \cup [3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -16)$; 4) $\left(-\infty; 1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right] \cup (4; +\infty)$. **23.97.** 6. **23.98.** -6.

23.99. 1) $(-\infty;\ 7)\cup\{10\}$; 2) $[1;\ 1,5]\cup\{2\}$. **23.100.** 1) $\{1,5\}\cup[8;\ +\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right]\cup\left\{\frac{2}{5}\right\}$. **23.101.** $\frac{\pi}{4}$. **23.102.** $-\frac{\pi}{4}$. **23.103.** 1) $(-1;\ 0)\cup[1,5;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -1)\cup(2;\ 3)$. **23.104.** 1) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 3)$; 2) $\left[-5;\ -\frac{3}{4}\right]\cup[4;\ +\infty)$. **23.105.** $(-\infty;\ 1)$. **23.106.** $[1;\ +\infty)$. **23.107.** 1) $(1;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$; 2) $(-1;\ 0)\cup(0;\ 3)$. **23.108.** 1) $[0;\ 3)$; 2) $(0;\ +\infty)$. **23.109.** $(0;\ 3]$. **23.110.** $(0;\ 4)$. **23.111.** $\{-2\}\cup(-1;\ 3]$. **23.112.** $[-4;\ 2]\cup\{3\}$. **23.113.** 3. **23.114.** 2. **23.115.** $[0;\ 4-2\sqrt{2})\cup(4+2\sqrt{2};\ 7]$. **23.116.** $[0;\ 3-\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{3};\ 6]$. **23.117.** $(0;\ 2^{-2\sqrt{2}}]\cup[2^{2\sqrt{2}};\ +\infty)$. **23.118.** $(0;\ 3^{-2\sqrt{3}}]\cup[3^{2\sqrt{3}};\ +\infty)$. **23.119.** 1) $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 2)\cup\{3\}\cup(4;\ +\infty)$. **23.120.** 1) $(-\infty;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -4)\cup\{-3\}\cup(-2;\ +\infty)$. **23.121.** $(-\infty;\ -6)\cup(-4;\ -2)\cup(3;\ +\infty)$. **23.122.** $(-\infty;\ 0)\cup(5;\ 7)\cup(9;\ +\infty)$. **23.123.** 1) $(-2;\ -1)\cup(-1;\ -0,5)\cup(0;\ 4]$; 2) $\left(0;\ \frac{23}{25}\right)$. **23.124.** 1) $(-1;\ 0)\cup(0;\ 0,5)\cup(1;\ 5]$; 2) $\left(0;\frac{2}{7}\right)$. **23.125.** Через 5 місяців.

§ 24. **24.7.** 1) (4; −1); 2) (0; 3), (−2; −3). **24.8.** 1) (0; 2), (−1; −3); 2) (−3; −3). **24.9.** (2; 1), (4; 5). **24.10.** (2; 1), (8; −11). **24.11.** 1) (4; −1); 2) (2,5; 0,5). **24.12.** 1) (4; −2); 2) (4; −1). **24.17.** 1) (2; 1); 2); 2) $(1;\ \log_3 2)$; 3) (−4,5; −3); 4) (2; −8). **24.18.** 1) (1; 2); 2) $(\log_7 5;\ 1)$; 3) (3; −9); 4) (−9; −3). **24.19.** 1) (27; 0,2); 2) $\left(\pi+2\pi n;\ \frac{1}{9}\right)$, $n\in Z$. **24.20.** 1) (4; 7); 2) $\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{1}{3}\right)$, $n\in Z$. **24.21.** 1) (2; 6); (−10; 18); 2) (3; −2); $\left(\frac{17}{6};\ -\frac{4}{3}\right)$. **24.22.** 1) (4; 2); (20; −14); 2) (2; 4); $\left(\frac{23}{6};\ -\frac{3}{2}\right)$. **24.23.** 3 грн; 8 грн. **24.24.** 4 км/год; 12 км/год. **24.25.** 114 грн; 82 грн. **24.26.** 60 грн; 5 грн. **24.27.** 27 км/год; 3 км/год. **24.28.** 18 км/год; 2 км/год. **24.29.** 36 і 57. **24.30.** 48 і 60. **24.31.** 20 м і 80 м. **24.32.** 10 см і 12 см. **24.33.** 1) (−1; 0,5); (1; 0,5); 2) (−3; 2); (−3; −2); $\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$. **24.34.** 1) (1; 3); (−1; 3); $\left(\frac{7}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{7}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; 2) (2; 2); (2; −2). **24.35.** 1) (1; 1); (0; 2); 2) (0; 1); (1; 0), (2; −1). **24.36.** 1) (1; 1); (−1; 1); 2) (1; 2); (−1; 2), $(\sqrt{5};\ -2)$, $(-\sqrt{5};\ -2)$. **24.37.** (0; 1), (−1,5; −0,5); (0,5; −2,5), (2; −1). **24.38.** (0; 1), (−2; −1); (−0,5; −2,5); (1,5; −0,5). **24.39.** 1) (40; 41); 2) (25; 4); 3) (1; 27), (27; 1); 4) (−3; −1,5), (6; 3); $\left(\frac{12+3\sqrt{39}}{23};\ 12-3\sqrt{39}\right)$;

$\left(\dfrac{12-3\sqrt{39}}{23}; 12-3\sqrt{39}\right)$. **24.40.** 1) (120; 136); 2) (4; 1); 3) (8; 1), (−1; −8); 4) (4; 2), (−7; −3,5). **24.41.** 1) $\left(\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n; (-1)^m\dfrac{\pi}{6}+\pi m\right)$, $n \in Z$; $m \in Z$; 2) $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k; \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi m\right)$, $k \in Z$; $m \in Z$. **24.42.** 1) $\left((-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n; \pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi m\right)$, $n \in Z$; $m \in Z$; 2) $\left((-1)^k\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi k}{3}; \dfrac{\pi}{4}+\pi m\right)$, $k \in Z$; $m \in Z$.
24.43. 1) $\left(\dfrac{5\pi}{24}+\pi n; \dfrac{\pi}{24}-\pi n\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{24}+\pi m; \dfrac{5\pi}{24}-\pi m\right)$, $n \in Z$; $m \in Z$; 2) $\left(\dfrac{3\pi}{4}+\pi k; -\dfrac{\pi k}{2}\right)$, $k \in Z$. **24.44.** 1) $\left(\dfrac{7\pi}{24}+\pi n; -\dfrac{\pi}{24}+\pi n\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{24}+\pi k; -\dfrac{7\pi}{24}-\pi k\right)$, $n \in Z$; $k \in Z$; 2) $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k; -\dfrac{3\pi}{2}-2\pi k\right)$, $k \in Z$.
24.45. 1) (2; 4); 2) $(\pi n; \log_2(\pi n))$, $n \in N$; $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi m; \log_2\left(\pi m-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, $m \in N$. **24.46.** 1) (2; 4); 2) $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n; \log_2\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi m\right)\right)$, $n = 0; 1; 2; \ldots$; $\left(\pi k-\dfrac{\pi}{4}; \log_5\left(\dfrac{\pi}{4}-\pi k\right)\right)$, $k \in N$. **24.47.** 1) (2; 3); 2) $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{6}\right)$, $\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{4}\right)$.
24.48. 1) (2; 4); 2) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$. **24.49.** 1) (6; 2); 2) (6; 5), (−10; −3).
24.50. 1) (1; 10); 2) (1; 3), $\left(\dfrac{2}{3}; 3\right)$. **24.51.** 1) (1; 1), (4; 2); 2) (9; 3).
24.52. 1) (1; 1), (3; 9); 2) (4; 8). **24.53.** 25. **24.54.** 48. **24.55.** 60 км/год; 90 км/год. **24.56.** 12 км/год; 18 км/год. **24.57.** 34 см. **24.58.** 24 см^2.
24.59. 4 км/год; 5 км/год. **24.60.** 12 км/год; 18 км/год. **24.61.** $(x; 7-x)$, де $x \geqslant 4$. **24.62.** $(x; 1-x)$, де $x \leqslant 2$. **24.63.** 1) (1; 4), (4; 1); (−5; 1), (1; −5); 2) $\left(\dfrac{13}{3}; \dfrac{13}{9}\right)$, (1; −3). **24.64.** 1) (3; 2), (2; 3); (1; 5), (5; 1); 2) (3; 6), $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{4}\right)$. **24.65.** 1) (2; −1), (−1; 2); 2) (−5; −2), $\left(2\dfrac{3}{4}; 29\right)$, $\left(-2\dfrac{3}{4}; -29\right)$, (5; 2). **24.66.** 1) (3; −1), (1; 3); 2) (4; −2), $\left(-\dfrac{8}{7}; \dfrac{94}{7}\right)$, $\left(\dfrac{8}{7}; -\dfrac{94}{7}\right)$, (−4; 2).

24.67. 1) (1; 2), (2; 1). *Вказівка*. Врахуйте, що $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, та зробіть заміну $x+y=u$, $xy=v$. 2) (1; 1). **24.68.** 1) (6; 7), (7; 6); 2) (1; 1). **24.69.** 1) $\left(\dfrac{12+3\sqrt{15}}{2}; \dfrac{12-3\sqrt{15}}{2}\right)$; 2) $(\sqrt[3]{4}; 9)$. **24.70.** 1) (4; 1), (1; 4);

2) (9; 2), (9; −2). **24.71.** 1) (0; 1); 2) (8; −4), $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$. **24.72.** 1) (0,5; 1,5); 2) (4; 2), $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. **24.73.** $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k+\frac{\pi m}{2};\ -\frac{\pi}{4}+\pi k-\frac{\pi m}{2}\right)$, $k \in Z$; $m \in Z$. **24.74.** $\left(-\frac{\pi}{12}-\pi l-\frac{\pi k}{2};\ \frac{7\pi}{12}+\pi l+\frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in Z$; $l \in Z$; $\left(\frac{7\pi}{12}-\pi m+\frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{12}+\pi m+\frac{\pi n}{2}\right)$, $m \in Z$; $n \in Z$. **24.75.** (π; π), (π; $-\pi$), (2π; 0). **24.76.** ($-\pi$; π), (0; 2π), (π; π). **24.77.** 1) (3; 1); 2) (1; 8). *Вказівка.* З першого рівняння маємо: $x + y = 9^x$. Далі почленно поділіть це рівняння на друге рівняння початкової системи. **24.78.** 1) (1; 2); 2) (2; −2). **24.79.** 1) (1; 5); 2) (2; 8), (8; 2). **24.80.** 1) (2; 2); 2) (2; 4), (4; 2). **24.81.** 1) (1; 1); 2) (16; 4). **24.82.** 1) (1; 1), (0,5; 4); 2) (4; 16). **24.83.** 20 км/год; 2 км/год. **24.84.** 18 км/год; 12 км/год. **24.85.** 1) (1; 0,5), (0,5; 1); 2) (5; 2), $\left(\frac{93}{2}; \frac{33}{2}\right)$. **24.86.** (3; 10), (−20; 36). **24.87.** Не пізніше ніж о 20 год 30 хв.

§ 25. **25.19.** $a < 0$. **25.20.** $a < -\frac{2}{3}$. **25.21.** $a \leqslant \frac{16-2\sqrt{19}}{15}$, або $a = \frac{3}{2}$, або $a \geqslant \frac{16+2\sqrt{19}}{15}$. **25.22.** $a \in \left(\frac{9-\sqrt{17}}{16};\ \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\ \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$. **25.23.** Якщо $a < 3$, то $x \geqslant 3$ або $x = a$; якщо $a \geqslant 3$, то $x \geqslant a$. **25.24.** Якщо $a < 4$, то $a \leqslant x \leqslant 4$; якщо $a \geqslant 4$, то $x = a$. **25.25.** $a \leqslant 3$. **25.26.** $a \geqslant 2$. **25.27.** Якщо $a \leqslant 5$, то $x = 1$; якщо $a > 5$, то $1 \leqslant x \leqslant \log_5 a$. **25.28.** Якщо $a \leqslant 9$, то $x \geqslant 2$; якщо $a > 9$, то $x = 2$ або $x > \log_3 a$. **25.29.** Якщо $a < -1$ або $a > 3$, то $x = \pi k$, $k \in Z$; якщо $-1 \leqslant a \leqslant 3$, то $x = \pi k$, $k \in Z$; $x = \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2}$, $n \in Z$. **25.30.** Якщо $a < -3$ або $a > 1$, то $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$; якщо $-3 \leqslant a \leqslant 1$, то $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$; $x = \pi n \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2}$, $n \in Z$. **25.31.** $a = -4$ або $a \geqslant -3{,}5$. **25.32.** $a \leqslant \frac{3}{2}$ або $a = 2$. **25.33.** 8. **25.34.** $a = 18$. **25.35.** 1. **25.36.** −1. **25.37.** $-\frac{4}{3} \leqslant a < 0$. **25.38.** $a \geqslant 5$. **25.39.** $-\frac{1}{2} < a < -\frac{2}{7}$. **25.40.** $1 < a < \frac{11}{9}$. **25.41.** Якщо $a < 0$, коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 4$, то 2 корені; якщо $0 < a < 4$, то 4 корені, якщо $a = 4$, то 3 корені. **25.42.** Якщо $a = 0$ або $a > 2{,}25$, то 2 корені; $0 < a < 2{,}25$, то 4 корені; якщо $a = 2{,}25$, то 3 корені. **25.43.** $0 \leqslant a \leqslant 9$. **25.44.** $0 \leqslant a \leqslant 6$. **25.45.** $-3 < a < 6$. **25.46.** $-2 < a < 4$. **25.47.** −50. **25.48.** −32. **25.49.** 14. **25.50.** −39. **25.51.** $a > 6$.

25.52. $a < \frac{1}{15}$. **25.53.** $a = \frac{9\pi}{4}$; $a \leqslant 2\pi$; $a > \frac{5\pi}{2}$. **25.54.** $a = -\frac{4\pi}{3}$; $a \leqslant -\frac{3\pi}{2}$, $a > -\pi$. **25.55.** $0 < a < \frac{6}{11}$. **25.56.** $2 < a < 5$. **25.57.** Якщо $a < 2-\sqrt{2}$ або $a > 2+\sqrt{2}$, то розв'язків немає; якщо $a = 2\pm\sqrt{2}$, то єдиний розв'язок; якщо $2-\sqrt{2} < a < 2+\sqrt{2}$, то 2 розв'язки. **25.58.** Якщо $a < 0$, то розв'язків немає; якщо $a = 0$ або $a > 1$, то один розв'язок; якщо $0 < a < 1$, то 2 розв'язки; якщо $a = 1$, то безліч розв'язків. **25.59.** $-\frac{13}{4} < a < 3$. **25.60.** $-\frac{9}{4} < a < 2$. **25.61.** Якщо $a = -1$, то $x = 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$; якщо $a = 0$, то $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in Z$; якщо $a = 1$, то $x = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; якщо a – будь-яке інше ціле число, то розв'язків немає. **25.62.** Якщо $a = 0$, то $x = \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in Z$; якщо $a = 1$, то $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; якщо $a = 2$, то $x = (-1)^{l+1}\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{2} + \pi l$, $l \in Z$; якщо a – будь-яке інше ціле число, то розв'язків немає. **25.63.** $-2{,}5$. **25.64.** $\frac{1}{30}$. **25.65.** $-\frac{1}{\sqrt[3]{36}} < a < 0$. **25.66.** $0 < a < \frac{1}{4}$. **25.67.** -1. **25.68.** 2. **25.69.** $\frac{4}{3} \leqslant a \leqslant 2$. **25.70.** $-3 \leqslant a \leqslant -\frac{23}{9}$. **25.71.** 0; 1. **25.72.** -1; 1. **25.73.** $a \geqslant 1$. **25.74.** $a < -1$. **25.75.** $a \leqslant 0$; $a = 1$. **25.76.** $a < \frac{1}{2}$; $a > \frac{3}{2}$. **25.77.** $-\frac{9}{4} < a < 2$. **25.78.** $-4 < a < \frac{17}{4}$. **25.79.** $a \leqslant 0$, $a \geqslant 3$. **25.80.** $a \leqslant 0$, $a \geqslant 12$. **25.81.** 1) Для всіх значень $a > 0$ і $b > 0$: $0 < x < \frac{2a^2b}{a^2+b^2}$; 2) якщо $0 < a < b$, то $-a \leqslant x < 0$; якщо $a \geqslant b > 0$, то $-\frac{2a^2b}{a^2+b^2} < x < 0$. **25.82.** Якщо $0 < a \leqslant b$, то $-a \leqslant x < 0$ або $0 < x < \frac{2a^2b}{a^2+b^2}$; якщо $a > b > 0$, то $-a \leqslant x < 0$ або $0 < x \leqslant a$. **25.83.** $-0{,}5$. **25.84.** 0,5. **25.85.** $\frac{4}{3}$. **25.86.** 0,4. **25.87.** 15 троянд.

Вправи для повторення розділу 4

13. 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **16.** 1) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 2) $\frac{1}{8}$; 2. **18.** 1) -1; 2) 9. **19.** 1) 2;

2) 2. **20.** 1) −6; −2; 2) $\frac{7+\sqrt{26}}{2}$. **21.** $1-\sqrt{5}$. **22.** 1) 2; 2) ∅. **23.** 1) 729; 2) 3. **24.** −1,5. **25.** 1) $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 2) $\frac{\pi}{16}+\pi k$, $k \in Z$. **26.** 1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; $(-1)^n\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7}$, $n \in Z$. **27.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$; $\operatorname{arctg} 1{,}75+\pi k$, $k \in Z$. **28.** 1) 2; 2) 0,2; 3) $2+\log_5 3$; 4) $4+\log_2 7$. **29.** 1) 2; 3; 2) 13; 3) 1; 4) 2. **30.** 1) 8; $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{2}{3}$; 41. **31.** 12 кг; 48 кг. **32.** 1 км/год. **33.** 12 км/год. **34.** 16 км/год. **35.** 20 с; 16 с. **36.** 6 год; 9 год. **37.** 1) 4; $4\pm\sqrt{37}$; 2) 3; $3\pm2\sqrt{5}$; 3) $-1\pm\sqrt{6}$; 1; −5; 4) 0; −3; $\frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$. **38.** 1) 3; 4; 2) −2; 1; 4. **39.** 1) 0; 2) −1. **40.** 1) −6; −2; 2) [0; 6]. **41.** 1) 1; 2) 1. **42.** (2; +∞). **43.** 1) −1; 2) −1; 1. **44.** 1) 2; −5; 2) 1; 3) −7; 4) 0; −1. **45.** 0; 3. **46.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$; 2) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; $\frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **47.** 2. **48.** 1) −4; −64; 2) $\frac{1}{3}$; 9; 3) 10; $10^{-4,5}$; 4) 2; $\frac{1}{128}$. **49.** 1) −1; 2) ∅. **50.** 1) $6\pi+24\pi m$, $m \in Z$; 2) $3\pi+12\pi k$, $k \in Z$. **51.** 1) 25; 5^{-5}; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **52.** −4; 2. **70.** 7. **71.** 1) $(-\infty;-4]\cup(-2;4)$; 2) $[-1;2)\cup(3;+\infty)$. **72.** 1) $[5;+\infty)$; 2) $(-7;9)$. **73.** 1) $(-4;1)$; 2) $(-\infty;-0{,}5]\cup(1;+\infty)$; 3) $(-\infty;1]\cup(2;+\infty)$; 4) $\left(-\infty;\frac{5}{8}\right)\cup\left[\frac{19}{21};+\infty\right)$. **74.** 1) $[-6;6]$; 2) $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$; 3) $(-3;1)$; 4) $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$. **75.** 1) 1; 2; 3) 4; 5; 6; 7. **76.** (0,1; 2]. **77.** 1) (4; +∞); 2) [3; 6]. **78.** 5. **79.** $\frac{\pi k}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **81.** 1) (−4; 1); 2) (−∞; 6]. **82.** 1) (−∞; 4]; 2) (1; +∞). **83.** 0; 1. **84.** 1) $x>0$; 2) $(-1;2)\cup(4;+\infty)$. **85.** 1) (−∞; 1); 2) (2; +∞). **86.** 1) $[-1;0)\cup(3;4]$; 2) $(-\infty;-2)\cup\left(\frac{5}{8};+\infty\right)$. **87.** 1) [0,25; 8]; 2) (1; 2). **88.** 1) $[-1{,}2;-1)\cup(-0{,}2;0]$; 2) $[-0{,}5;1{,}5)\cup(2{,}5;3{,}5]$. **89.** −3. **90.** 2. **91.** −2. **92.** 1) (1; 1,5]; 2) $(1;2]\cup[3;4)$. **93.** $[-199;-119]\cup\{1\}$. **94.** 1) $(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$; 2) (−9; −1). **95.** 1) $(-5;3+2\sqrt{2})$; 2) $\left(-\infty;\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$; 3) $[-2;-1)\cup(-1;+\infty)$; 4) $[2;3)\cup(3;+\infty)$. **96.** 1) [0; 3]; 2) $(-\infty;0]\cup[4{,}5;+\infty)$; 3) $\left(\frac{3\sqrt{21}}{3};+\infty\right)$; 4) $\left[\frac{\sqrt{34}-1}{2};+\infty\right)$.

97. 1) $\left[\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n \in Z$; 2) 2. **98.** 1) $(-\infty;\ -3) \cup (0,5;\ 1)$; 2) $(-3;\ 1) \cup (1;\ 2]$. **99.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $(3;\ 5]$. **100.** 1) $(-1;\ 0] \cup (2;\ +\infty)$; 2) $(-0,5;\ 0) \cup (0;\ 4)$. **101.** $(-0,5;\ 1] \cup \{-3\}$. **102.** 4. **103.** $[0;\ 4-2\sqrt{3}) \cup (4+2\sqrt{3};\ 8]$. **107.** 1) (0; 2), (−2; −4); 2) (−1; 1). **108.** (2; −1), (8; 11). **109.** 1) (5; 4); 2) (3,5; 0,5). **112.** 1) (2; 1); 2) $(1;\ \log_5 7)$. **113.** 1) $\left(8;\ \frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{1}{4}\right)$, $n \in Z$. **114.** 1) (4; 3), (2; 4); 2) (2; 6), $\left(-\frac{22}{3};\ -\frac{10}{3}\right)$. **115.** Порція млинців – 20 грн; салат – 15 грн. **116.** 14 км/год; 1 км/год. **117.** 6 см і 8 см. **118.** 1) (3; 0), (−3; 2), (−3; −2); 2) (−1; 2), (1; 2), (2,5; −2,5); (−2,5; −2,5). **119.** (−0,5; 1,5); (−3,5; −1,5); (−1; −4), (2; −1). **120.** 1) (41; 40); 2) (1; 9); 3) (8; −1), (−1; 8); 4) (4; 1), $\left(-1;-\frac{1}{4}\right)$. **121.** 1) $\left((-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi m\right)$, $k \in Z$, $m \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{6}+\pi m\right)$, $k \in Z$, $m \in Z$. **122.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pi-2\pi k\right)$, $k \in Z$; 2) $(\pi+2\pi k; -\pi k)$, $k \in Z$. **123.** 1) (2; 1); 2) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \log_4\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\right)$, $n = 0;\ 1;\ 2\ \ldots$; $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi m;\ \log_4\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi m\right)\right)$ $m = 0;\ 1;\ 2\ \ldots$ **124.** 1) (2; 5); 2) $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{8};\ \frac{1}{4}\right)$. **125.** 1) (2; 1); 2) (5; 4), (−8; −2,5). **126.** 1) (4; 2); 2) (3; 1). **127.** 24. **128.** 18 см або 27 см. **129.** 90 км/год; 80 км/год. **130.** $(x;\ 3-x)$, де $x \geqslant 1$. **131.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (2; 4), (−2; −4). **132.** 1) (3; 1), (1; 3); 2) (2; 1), (1; 2); 3) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ -\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$, (2; 2), (−2; −2); 4) (2; 1), (−1; −2). **133.** 1) (4; 1); 2) (1; 0), (−1; 0). **134.** 1) (2; 1); 2) (1; 3), $\left(\frac{1}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$. **135.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k-\pi l;\ \frac{\pi}{3}+\pi k+\pi l\right)$, $k \in Z$, $l \in Z$. **136.** (π; −π), (π; π), (2π; 0). **137.** 1) (3; 1); 2) (1; 1). **138.** 1) (4; 2); 2) $(4\sqrt{2};\ 2\sqrt[4]{2})$, (2; 4). **139.** 1) (1; 2); 2) (−2; 3), (3; −2). **149.** $b > -3$. **150.** $\left(\frac{6-2\sqrt{33}}{7};\ 2\right) \cup \left(2;\ \frac{6+2\sqrt{33}}{7}\right)$. **152.** 1) $a < -\frac{7}{4}$; 2) $-2 < a < 0$. **153.** $a \geqslant 1$. **156.** $a \leqslant 3$ або $a = 3,5$. **157.** 1) $\pm\sqrt{2}$; 2) $-\frac{1}{3}$. **158.** 1) $-0,5 < a \leqslant 0$ або $a \geqslant 4$; 2) $a \geqslant 0$. **159.** $a < 3$. **160.** Якщо $a < 0$, коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 0$, то 2 корені; якщо $0 < a < 9$, то 4 корені; якщо $a = 9$, то 3 корені. **161.** $a \geqslant 3$. **162.** $-6 < a < 2$. **163.** −18. **164.** $a = 0$

або $a = 9$. **165.** $a > \frac{3}{82}$. **166.** $-\frac{3}{2} \leqslant a < \frac{12}{7}$. **167.** Якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $1 \leqslant a < \frac{5}{3}$, то 2 корені; якщо $a = \frac{5}{3}$, то 3 корені; якщо $0 < a < 1$ або $a > \frac{5}{3}$, то 4 корені. **168.** $-4 < a < \frac{17}{4}$. **169.** Якщо $a = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; якщо $a = 1$, то $x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$; якщо $a = 2$, то $x = \pi \pm \arccos\frac{\sqrt{41}-3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; якщо a – будь-яке інше ціле число, то коренів немає. **170.** $\frac{7}{3}$. **171.** $0 < a < \frac{1}{8}$. **172.** -1; 0. **173.** $a \leqslant \frac{1}{2}$. **174.** $a < -\frac{7}{3}$ або $a > -2$. **175.** $a > 1$. **176.** $\frac{7}{3} \leqslant a \leqslant \frac{8}{3}$. **177.** $a < \frac{9-\sqrt{17}}{32}$. **178.** $a \geqslant \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. **179.** $-1 < a < \frac{5}{4}$. **180.** $a \leqslant 0$; $a \geqslant 3$. **181.** Якщо $0 < b \leqslant a$, то $-\frac{2b^2a}{a^2b^2} < x < 0$ або $0 < x < \frac{2b^2a}{a^2b^2}$; якщо $b > a > 0$, то $-b < x < 0$ або $0 < x < b$. **182.** 0,5.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	Б	А	Г	В	А	Б	А	Г	Б	В	Б
2	Б	В	Г	Г	А	Г	В	Г	Г	А	Б	В
3	А	В	Б	Г	Б	Б	А	Г	В	В	Г	Б
4	В	Г	Б	А	В	Б	Б	Б	Г	В	А	Б
5	Г	В	Б	Г	А	В	Б	А	Г	Г	Б	А
6	В	Г	Б	А	В	Б	А	В	А	Г	В	Г
7	Г	Б	В	Б	А	Б	А	Г	В	Б	В	Б
8	Г	Б	В	Б	В	А	В	В	Б	Г	А	Б
9	В	Г	А	Б	В	В	В	Б	А	Г	Б	В

Відповіді до завдань «Перевірте свою компетентність»

№ вправи / № завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	А	В	В	Г	Д	Г	1 – Д; 2 – В; 3 – Г; 4 – Б	–0,96	–2
2	Г	Д	Г	В	В	А	1 – Д; 2 – Б; 3 – Г; 4 – А	20	–2
3	Б	В	Г	Г	Б	А	1 – Г; 2 – Б; 3 – В; 4 – А	3	195
4	В	Г	А	В	Д	Б	1 – В; 2 – Г; 3 – А; 4 – Б	12	–4
5	Г	Д	Г	Б	А	Г	1 – Б; 2 – А; 3 – Д; 4 – В	0,5	1
6	Г	В	Б	Г	Г	Б	1 – Д; 2 – Г; 3 – В; 4 – Б	50	120
7	Б	В	Г	А	Б	Г	1 – А; 2 – В; 3 – Д; 4 – Б	0,25	0,5
8	Б	Д	Г	А	В	Г	1 – Д; 2 – А; 3 – Б; 4 – В	–60	3
9	В	А	Г	Б	Б	Б	1 – В; 2 – Г; 3 – Б; 4 – А	–2	0,28
10	Б	А	В	Д	В	Г	1 – В; 2 – Д; 3 – А; 4 – Г	1	7
11	Б	Г	В	В	Д	Г	1 – Б; 2 – Д; 3 – А; 4 – В	4	–0,25
12	В	Б	В	Д	Г	В	1 – Б; 2 – А; 3 – В; 4 – Д	–25	8,75
13	Г	Г	В	Б	Б	В	1 – В; 2 – Д; 3 – Г; 4 – Б	400	–1
14	А	Д	Б	Г	В	Б	1 – Г; 2 – А; 3 – Б; 4 – Д	–0,5	0,25
15	Б	В	Г	В	А	В	1 – Б; 2 – Д; 3 – В; 4 – А	1	16
16	Г	Д	А	В	Г	Б	1 – Б; 2 – Д; 3 – А; 4 – В	1	10
17	Д	В	В	А	А	Б	1 – А; 2 – В; 3 – Г; 4 – Д	224	8
18	Б	В	Д	Д	Д	Г	1 – А; 2 – Г; 3 – Д; 4 – В	6	0,25
19	А	В	Б	Г	А	Д	1 – Г; 2 – Б; 3 – Д; 4 – В	1	2
20	Б	В	В	Г	Г	Б	1 – Д; 2 – В; 3 – Г; 4 – Б	0,125	14
21	В	В	Г	Б	Д	Д	1 – Г; 2 – А; 3 – Д; 4 – В	0,1	5
22	В	Г	Б	Г	Б	А	1 – Д; 2 – В; 3 – Б; 4 – А	0,8	15
23	Б	Г	В	В	В	Г	1 – В; 2 – Б; 3 – Д; 4 – А	36	2
24	В	Б	Г	А	Г	Д	1 – Д; 2 – А; 3 – Б; 4 – Г	1	2
25	Г	В	Б	Д	Д	Г	1 – А; 2 – Д; 3 – Б; 4 – Г	6	–2

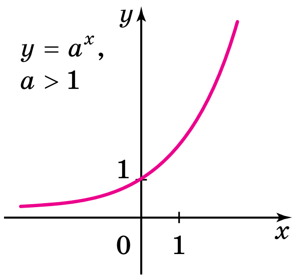
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

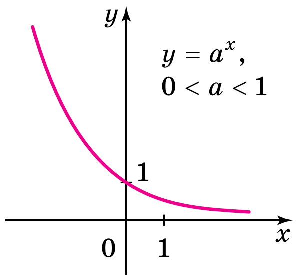
ЗМІСТ

Розділ 3. Елементи комбінаторики та теорії ймовірностей

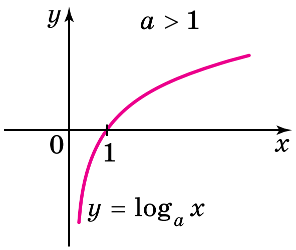
Розділ 4. Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація навчального матеріалу

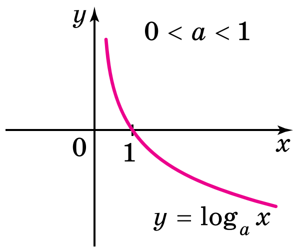
ГРАФІК ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ





ГРАФІК ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЇ





ОСНОВНА ЛОГАРИФМІЧНА ТОТОЖНІСТЬ

$$a^{\log_a b} = b$$

ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

$a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0$

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
$\log_a x^p = p\log_a x,\ p \in R$	
$\log_{a^q} x^p = \dfrac{p}{q}\log_a x,\ p \in R,\ q \in R,\ q \neq 0$	
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$	$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},\ b > 0,\ b \neq 1$

ПОХІДНІ ПОКАЗНИКОВОЇ, ЛОГАРИФМІЧНОЇ ТА СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЙ

$(e^x)' = e^x$ $\qquad (a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, де $\alpha \in R,\ x > 0$

ТАБЛИЦЯ ПЕРВІСНИХ

Функція $f(x)$	**Загальний вигляд первісних $F(x) + C$, де C – довільна стала**
0	C
1	$x + C$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x\ (a > 0,\ a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$

ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРВІСНИХ

1. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ – первісна для $f(x) + g(x)$.
2. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, k – стала, то $kF(x)$ – первісна для $kf(x)$.
3. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, k і b – деякі сталі, $k \neq 0$. Тоді $\dfrac{1}{k}F(kx + b)$ – первісна для функції $f(kx + b)$.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНІЦА

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

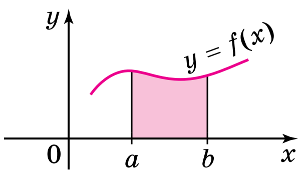
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ k \in R$$

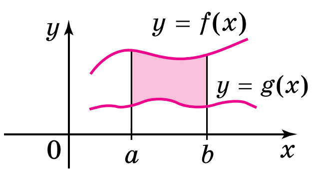
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ де } c \in [a;\ b]$$

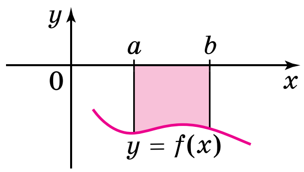
ПЛОЩА КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР





$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, де $n \in N$, $n > 1$, причому $0! = 1! = 1$.

Сполуки		
Розміщення	**Перестановки**	**Комбінації**
$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$P_n = n!$	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

$p(A) = \dfrac{m}{n}$, де A – випадкова подія, m – кількість випадків, що сприяють події A, n – кількість усіх можливих випадків.

$p(V) = 0$, де V – неможлива подія.

АКСІОМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Аксіома 1. $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$, де A – випадкова подія.

Аксіома 2. $p(U) = 1$, де U – вірогідна подія.

Аксіома 3. $p(A + B) = p(A) + p(B)$, де A і B – несумісні в даному досліді події.

ЙМОВІРНІСТЬ ДОБУТКУ ДВОХ НЕЗАЛЕЖНИХ ПОДІЙ

$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$, де A і B – незалежні події.

ТЕОРЕМА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

$$p(AB) = p(A/B) \cdot p(B) = p(B/A) \cdot p(A).$$