Генеза

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРОВАНИЙ КУРС

ЧАСТИНА 2

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

(інтегрований курс у 2 частинах)

Навчальний посібник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти, які беруть участь
в інноваційному освітньому проєкті всеукраїнського
рівня за темою «Розроблення і впровадження
навчально-методичного забезпечення для закладів
загальної середньої освіти в умовах реалізації
Державного стандарту базової середньої
освіти» у 2024/2025 навчальному році

Частина 2

Схвалено для використання в освітньому процесі

Київ
«ГЕНЕЗА»
2024

УДК 512(075.3)

І-89

Схвалено для використання в освітньому процесі
(рішення експертної комісії з математики
від 03.10.2024, протокол № 8;
№ 3.0723-2024 у Каталозі надання грифів
навчальній літературі та навчальним програмам)

Відповідає модельній навчальній програмі
«Математика (інтегрований курс). 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)

Е-додаток до посібника можна знайти за адресою https://sites.google.com/view/matematika-8-klas-2024?usp=sharing або QR-кодом

Істер О. С.

І-89 Математика (інтегрований курс) : навч. посіб. для 8-го кл. закл. заг. серед. освіти, які беруть участь в інновац. освіт. проєкті всеукр. рівня за темою «Розроблення і впровадження навчально-методичного забезпечення для закладів загальної середньої освіти в умовах реалізації Державного стандарту базової середньої освіти» у 2024/2025 навч. р. У 2 ч. Ч. 2 / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2024. — 224 с. : іл.

ISBN 978-___-_____-__-_.

Посібник підготовлено для забезпечення пілотних 8-х класів навчально-методичними матеріалами з математики (інтегрований курс) для продовження реалізації реформи «Нова українська школа».

Частина 2 призначена для організації роботи з вивчення курсу «Математика (інтегрований курс)» у другому семестрі.

УДК 512(075.3)

ISBN 978-____-_____-___-_

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

МАТЕМАТИКА

(інтегрований курс у 2 частинах)

Навчальний посібник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти, які беруть участь
в інноваційному освітньому проєкті всеукраїнського рівня
за темою «Розроблення і впровадження навчально-методичного
забезпечення для закладів загальної середньої освіти в умовах
реалізації Державного стандарту базової середньої освіти»
у 2024/2025 навчальному році

Частина 2

Схвалено для використання в освітньому процесі

Редактор *Наталія Дашко*
Обкладинка *Олександра Павленка*
Макет, художнє оформлення *Василя Марущинця*
Комп’ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректор *Інна Борік*

Відомості про користування посібником

№ з/п	**Прізвище та ім'я учня / учениці**	**Клас**	**Навчальний рік**	**Оцінка**	
				на початку року	**у кінці року**
1					
2					
3					
4					
5					

Формат 70×100/16.
Ум. друк. арк. __,__. Обл.-вид. арк. __,__.
Тираж ________ пр. Вид. № ________.
Зам. № __________

ТОВ «Генеза», 01133, Україна, місто Київ,
вул. Генерала Алмазова, 18/7 (літ. В), офіс 404.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК
№ 7692 від 24.10.2022.

Виготовлено

.

Шановні восьмикласниці та восьмикласники!

Продовжуємо вивчати курс математики, який міститиме дві складові частини – *алгебру* і *геометрію*. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

У підручнику використано такі умовні позначення:

– пригадай (раніше вивчене);

– зверни особливу увагу;

– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

1.13 – завдання для класної та 1.15 – домашньої роботи;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв'язування інших задач);

– рубрика «Україна – це ми»;

– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;

– рубрика «Життєва математика»;

– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

– вправи для повторення;

– рубрика «Головне в темі».

Текст, надрукований **жирним** шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня;

з позначки * починаються вправи підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*.

Після кожної теми наведено вправи для її повторення, основний теоретичний матеріал (рубрика *«Головне в темі»*), а в кінці підручника – *«Завдання для перевірки знань за курс математики 8 класу»*. *«Задачі підвищеної складності»* допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики.

Автор намагався подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів та розвитку математики як науки ви знайдете в рубриці *«А ще раніше...»*.

Бажаємо успіхів в опануванні математики!

Шановні вчительки та вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів/учениць, диференціації навчання тощо.

Додаткові вправи в *«Завданнях для перевірки знань»* призначено для учнів/учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Чи правильно їх розв'язано, учитель/учителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення тем можна запропонувати учням/ученицям, наприклад, під час узагальнювальних уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці *«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»* – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці підручника, допоможуть підготувати учнів/учениць до різноманітних математичних змагань і підвищити їхню цікавість до математики.

«Завдання для перевірки знань за курс математики 8 класу», які також розміщено в кінці навчального посібника, можна запропонувати учням/ученицям для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього потрібно розв'язати вправи, що посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж курсу математики 8 класу, який опрацьовує дитина, ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на *«Задачі підвищеної складності»*, які розміщено в кінці підручника.

ТЕМА 7

КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **ознайомитеся** з поняттями арифметичного квадратного кореня, множини та підмножини; функціями $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$;
- **навчитеся** застосовувати означення та властивості арифметичного квадратного кореня для спрощення виразів та обчислення їх значень, розв'язування рівнянь тощо; будувати графіки функцій $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

§ 29. Функція $y = x^2$, її графік і властивості

1. Функція $y = x^2$, її графік

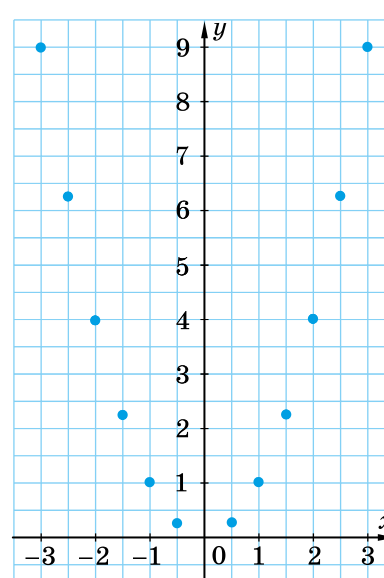
Приклад 1. Нехай сторона квадрата дорівнює a см. Тоді його площу (у см^2) можна знайти за формулою $S = a^2$. У цій формулі кожному додатному значенню змінної a відповідає єдине значення змінної S.

Якщо в цьому прикладі незалежну змінну позначити через x, а залежну – через y, то отримаємо функцію $y = x^2$. У цій формулі змінна x може набувати будь-яких значень (додатних, від'ємних, значення нуль).

Складемо таблицю значень функції $y = x^2$ для кількох значень аргументу:

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0

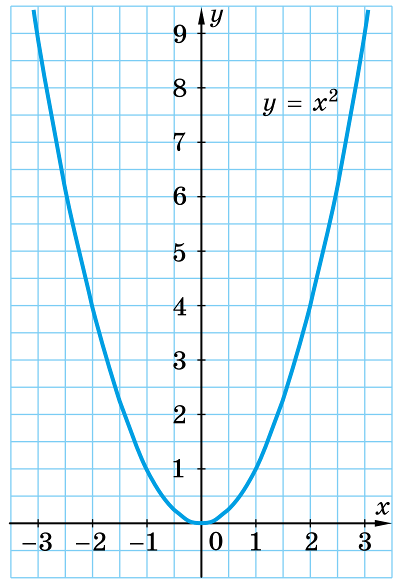
x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0,25	1	2,25	4	6,25	9



Мал. 29.1

Позначимо на координатній площині точки $(x; y)$, координати яких отримали в таблиці (мал. 29.1).

Якби на цій самій площині позначили більшу кількість точок, координати яких задовольняють формулу $y = x^2$, а потім сполучили їх плавною лінією, то одержали б графік функції $y = x^2$ (мал. 29.2). Графік цієї функції називають ***параболою***, точку $(0; 0)$ – ***вершиною параболи***. Вершина ділить параболу на дві частини, кожну з яких називають ***гілкою параболи***.



Мал. 29.2

2. Властивості функції $y = x^2$

Сформулюємо деякі *властивості функції* $y = x^2$.

1. Область визначення функції складається з усіх чисел.
2. Область значень функції складається з усіх невід'ємних чисел, тобто $y \geqslant 0$.

Справді, оскільки $x^2 \geqslant 0$ для всіх значень x, то $y \geqslant 0$.

3. Графіком функції є парабола з вершиною в точці (0; 0), гілки якої напрямлені вгору. Усі точки графіка, крім вершини параболи, лежать вище від осі абсцис.
4. Протилежним значенням аргументу відповідає одне й те саме значення функції.

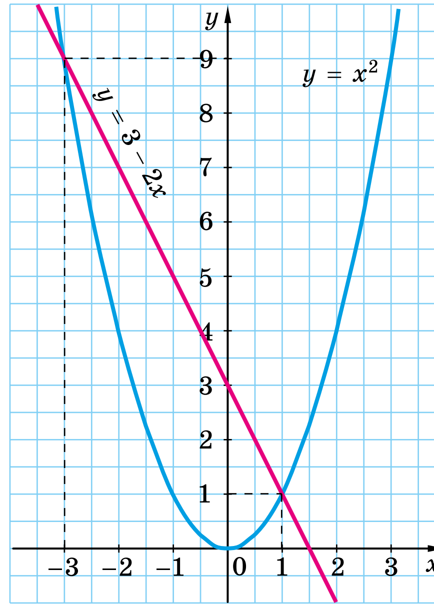
Дійсно, це слідує з того, що $(-x)^2 = x^2$ для будь-якого значення x.

3. Використання графіка функції $y = x^2$ під час розв'язування рівнянь

Приклад 2. Розв'язати графічно рівняння $x^2 = 3 - 2x$.

Розв'язання. Графік функції $y = x^2$ – парабола, а функції $y = 3 - 2x$ – пряма, що проходить через точки (0; 3) і (2; –1). Побудуємо графіки цих функцій в одній системі координат (мал. 29.3). Вони перетинаються у двох точках, абсциси яких $x = -3$ і $x = 1$.
Пересвідчимося, що числа –3 і 1 дійсно є коренями рівняння:

1) якщо $x = -3$, то $x^2 = (-3)^2 = 9$ і $3 - 2x = 3 - 2 \cdot (-3) = 9$;
2) якщо $x = 1$, то $x^2 = 1^2 = 1$ і $3 - 2x = 3 - 2 \cdot 1 = 1$.
Отже, -3 і 1 – корені рівняння $x^2 = 3 - 2x$.
Відповідь: -3; 1.

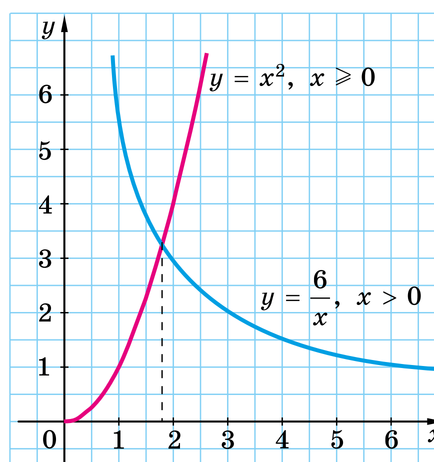


Мал. 29.3

Приклад 3. Між якими послідовними цілими числами міститься корінь рівняння $\frac{6}{x} = x^2$?

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння графічно, побудувавши графіки функцій $y = \frac{6}{x}$ і $y = x^2$ в одній системі координат. Оскільки $x^2 \geqslant 0$ для всіх значень x, то і $\frac{6}{x} \geqslant 0$. Звідки отримаємо, що $x > 0$. Тому графіки цих функцій розглянемо тільки для $x > 0$. Це гілка гіперболи й гілка параболи, що лежать у першій координатній чверті (мал. 29.4). Графіки перетинаються в одній точці, абсциса якої лежить між числами 1 і 2 та є коренем рівняння.

Отже, корінь рівняння $\frac{6}{x} = x^2$ міститься між числами 1 і 2.
Відповідь: між числами 1 і 2.



Мал. 29.4

- Як називають графік функції $y = x^2$?
- Сформулюйте властивості функції $y = x^2$.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

29.1. (*Усно.*) Гіперболою, параболою чи прямою є графік функції:

1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = 8x$; 3) $y = 8$;
4) $y = x^2$; 5) $y = 5x - 4$; 6) $y = -\frac{6}{x}$?

29.2. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y, що відповідає значенню $x = -3$; 0; 5.

29.3. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y, що відповідає значенню $x = -2;\ 1;\ 6$.

2

29.4. За графіком функції $y = x^2$ (мал. 29.2) знайдіть:
1) значення y, що відповідає значенню $x = -2{,}5;\ -1;\ 1{,}5;\ 3$;
2) значення x, якому відповідає значення $y = 1;\ 3{,}5;\ 9$;
3) кілька значень x, для яких значення функції більші за 2; менші від 2.

29.5. Використовуючи графік функції $y = x^2$ (мал. 29.2), знайдіть:
1) значення y, що відповідає значенню $x = -3;\ -0{,}5;\ 2{,}5$;
2) значення x, для якого значення $y = 4;\ 5$;
3) кілька значень x, для яких значення функції менші від 1; більші за 1.

29.6. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-1 \leqslant x \leqslant 4$.

29.7. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

29.8. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку:
1) $A(-1;\ -1)$; 2) $B(-5;\ 25)$;
3) $C(0;\ 0)$; 4) $D(25;\ 5)$?

29.9. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:
1) $A(-4;\ 16)$; 2) $B(16;\ -4)$; 3) $C\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$; 4) $D(0;\ 2)$?

3

29.10. Знайдіть область значень функції $y = x^2$, якщо:
1) $-3 \leqslant x \leqslant 0$;
2) $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

29.11. Порівняйте значення функції $y = x^2$, якщо:
1) $x = 2{,}6$ і $x = -2{,}6$; 2) $x = -1{,}9$ і $x = 1{,}8$;
3) $x = 0$ і $x = -3{,}5$; 4) $x = -1{,}1$ і $x = 1{,}2$.

29.12. Розв'яжіть графічно рівняння:
1) $x^2 = 3x$; 2) $x^2 = -\frac{8}{x}$.

29.13. Розв'яжіть графічно рівняння:
1) $x^2 = 4$; 2) $x^2 = -2x$.

4

29.14. Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{x^3 + x^2}{x + 1}$; 2) $y = \frac{4x^2 - x^4}{4 - x^2}$.

29.15. Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{x^3}{x}$; 2) $y = \frac{x^2 - x^4}{1 - x^2}$.

Вправи для повторення

29.16. Для яких значень a справджується рівність:
1) $a^2 = (-a)^2$; 2) $a^2 = |a|^2$; 3) $a^2 = -a^2$; 4) $(-a)^2 = -a^2$?

29.17. Знайдіть:
1) найменше значення виразу $x^2 - 19$; $18 + (x - 3)^2$;
2) найбільше значення виразу $17 - x^2$; $-9 - (x + 7)^2$.
Для яких значень x досягається це значення?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

29.18. Обчисліть:

1) $25^2 + (-6)^2$;
2) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(1\frac{3}{5}\right)^2$;
3) $0,01^2 : (-0,1)^2$;
4) $(-4)^2 \cdot (-0,5)^2$.

29.19. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:
1) 9 см^2;
2) 0,25 м^2.

29.20. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 16 = 0$;
2) $x^2 = \frac{4}{9}$.

29.21. 1) Побудуйте графіки функцій $y = x^2$ і $y = 9$ та знайдіть координати точок їх перетину.
2) Скільки точок перетину мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = 0$?
3) Скільки точок перетину мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$, де $a > 0$?
4) Скільки точок перетину мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$, де $a < 0$?

Життєва математика

29.22. Автомобільний двигун за одну годину роботи спалює 200 л кисню. Добова норма для дихання однієї людини становить 80 л кисню. Скільки добових норм кисню спалюють щоденно 200 автомобілів, якими мешканці деякого населеного пункту їздять на роботу в сусідній населений пункт, за умови, що шлях в один бік займає чверть години?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

29.23. Один годинник зі стрілками поспішає на 1 хв за добу, а другий – відстає на 30 с за добу. Зараз обидва годинники показують однаковий час. Через скільки діб вони знову покажуть однаковий час?

§ 30. Арифметичний квадратний корінь

1. Квадратні корені

Якщо відомо сторону квадрата, то легко можна знайти його площу. Водночас часто доводиться розв'язувати й обернену задачу: за відомою площею квадрата знаходити його сторону.

Приклад 1. Площа квадрата дорівнює 16 см^2. Знайти сторону квадрата.

Розв'язання. Нехай сторона квадрата дорівнює x см, тоді його площа дорівнює x^2 см^2. Маємо рівняння: $x^2 = 16$. У нього два корені: числа 4 і -4. Справді, $4^2 = 16$ і $(-4)^2 = 16$. Оскільки довжина сторони квадрата не може бути від'ємним числом, то умову задачі задовольняє лише один з коренів рівняння – число 4. Отже, довжина сторони квадрата дорівнює 4 см.

Корені рівняння $x^2 = 16$, тобто числа, квадрати яких дорівнюють 16, називають ***квадратними коренями*** із числа 16.

Квадратним коренем із числа a **називають число, квадрат якого дорівнює *a*.**

Наприклад, квадратними коренями із числа 100 є числа 10 і -10, бо $10^2 = 100$ і $(-10)^2 = 100$. Квадратним коренем із числа 0 є число 0, бо $0^2 = 0$. Квадратного кореня із числа -16 ми не знайдемо, оскільки серед відомих нам чисел не існує такого числа, квадрат якого дорівнював би -16.

2. Арифметичний квадратний корінь

Число 4, що є невід'ємним коренем рівняння $x^2 = 16$, називають ***арифметичним квадратним коренем*** із числа 16.

Арифметичним квадратним коренем із числа a **називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює *a*.**

Арифметичний квадратний корінь із числа a позначають $\sqrt{a}$, де $\sqrt{}$ – знак арифметичного квадратного кореня, або радикал. Вираз, що стоїть під знаком кореня, називають ***підкореневим виразом***. Запис $\sqrt{a}$ читають так: *квадратний корінь із числа a* (слово *арифметичний* під час читання домовилися не вживати, оскільки **в школі розглядають лише арифметичні корені**).

Приклад 2. 1) $\sqrt{81} = 9$, оскільки $9 \geqslant 0$ і $9^2 = 81$;

2) $\sqrt{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^2 = 0$;

3) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, оскільки $\frac{2}{3} \geqslant 0$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$;

4) $\sqrt{1\frac{24}{25}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$, оскільки $\frac{7}{5} \geqslant 0$ і $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = 1\frac{24}{25}$.

Узагалі рівність $\sqrt{a} = x$ є правильною, якщо виконуються дві умови: 1) $x \geqslant 0$; 2) $x^2 = a$.

Оскільки $x^2 \geqslant 0$ для всіх значень змінної x, то $a \geqslant 0$.

Вираз $\sqrt{a}$ не має змісту, якщо $a < 0$.

Наприклад, не мають змісту вирази $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-2,9}$.

3. Добування квадратного кореня

Дію знаходження арифметичного значення квадратного кореня називають ***добуванням квадратного кореня***. З невеликих чисел квадратний корінь бажано добувати усно. Добувати квадратний корінь з більших чисел допоможе таблиця квадратів двоцифрових натуральних чисел на форзаці підручника або калькулятор.

Приклад 3. Знайти значення кореня $\sqrt{4096}$.

Розв'язання. За таблицею квадратів двоцифрових натуральних чисел маємо $64^2 = 4096$. Тому $\sqrt{4096} = 64$.

Відповідь: 64.

Приклад 4. Обчислити $\sqrt{37^2 - 12^2}$.

Розв'язання. Спочатку треба знайти значення виразу $37^2 - 12^2$, а потім добути з нього корінь:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1369 - 144} = \sqrt{1225} = 35.$$

Відповідь: 35.

4. Рівняння $\sqrt{x} = m$

Розглянемо рівняння $\sqrt{x} = m$, де m – деяке число. Якщо $m \geqslant 0$, то з означення квадратного кореня слідує, що $x = m^2$. Якщо $m < 0$, то рівняння не має розв'язків, оскільки за означенням число $\sqrt{x}$ – невід'ємне.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $\sqrt{x} = m$ за допомогою схеми:

$\boldsymbol{\sqrt{x} = m}$, m – число

Якщо $m \geqslant 0$, то $x = m^2$

Якщо $m < 0$,
то коренів немає

Приклад 5. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{x} = 7$; 2) $\sqrt{x} = -3$; 3) $\sqrt{2x - 1} = 5$.

Розв'язання.

1) $x = 7^2$; $x = 49$; 2) розв'язків немає; 3) $2x - 1 = 5^2$; $2x = 26$; $x = 13$.

Відповідь: 1) 49; 2) розв'язків немає; 3) 13.

Що називають квадратним коренем із числа a? Що називають арифметичним квадратним коренем із числа a? Для яких значень a вираз $\sqrt{a}$ не має змісту? Чи має розв'язки рівняння $\sqrt{x} = m$, якщо $m \geqslant 0$, $m < 0$, і якщо має, то які?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

30.1. (*Усно.*) Чи існує квадратний корінь із числа:
1) 9; 2) 16; 3) –4; 4) 0?

30.2. Знайдіть значення квадратного кореня із числа:
1) 4; 2) 25.

30.3. Знайдіть значення квадратного кореня із числа:
1) 0; 2) 1; 3) 36.

30.4. (*Усно.*) Чи має зміст вираз:
1) $\sqrt{1}$; 2) $\sqrt{0}$; 3) $\sqrt{-9}$?

30.5. Чи має зміст вираз: 1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{-49}$?

30.6. Доведіть, що число:
1) 2 є арифметичним квадратним коренем із числа 4;
2) –2 не є арифметичним квадратним коренем із числа 4;
3) 0,1 є арифметичним квадратним коренем із числа 0,01;
4) 0,2 не є арифметичним квадратним коренем із числа 0,4.

30.7. Доведіть, що:
1) $\sqrt{169} = 13$; 2) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.

2

30.8. Обчисліть:
1) $\sqrt{16}$; 2) $\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{0{,}25}$; 4) $\sqrt{6400}$;
5) $\sqrt{0{,}09}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{121}}$; 7) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 8) $\sqrt{20\frac{1}{4}}$.

30.9. Обчисліть:
1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{36}$; 3) $\sqrt{0{,}16}$; 4) $\sqrt{4900}$;
5) $\sqrt{0{,}04}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 7) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 8) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

30.10. Чи правильна рівність:

1) $\sqrt{900} = 30$; 2) $\sqrt{4} = -2$;
3) $\sqrt{0,9} = 0,3$; 4) $\sqrt{0,64} = 0,8$?

30.11. За допомогою таблиці квадратів двоцифрових натуральних чисел або калькулятора знайдіть:

1) $\sqrt{1296}$; 2) $\sqrt{9409}$; 3) $\sqrt{2916}$; 4) $\sqrt{30,25}$.

30.12. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{64} + \sqrt{25}$; 2) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{0,36}$; 3) $2\sqrt{100} - \sqrt{144}$;
4) $\sqrt{81} : \sqrt{0,01}$; 5) $-5\sqrt{0,64} + 3,9$; 6) $\sqrt{5^2 - 25}$;
7) $\sqrt{6^2 + 8^2}$; 8) $\sqrt{0,25 - 0,4^2}$; 9) $\sqrt{2(0,2^2 + 0,46)}$.

30.13. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{49} + \sqrt{9}$; 2) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{100}$; 3) $2\sqrt{121} - \sqrt{81}$;
4) $\sqrt{64} : \sqrt{0,25}$; 5) $-5\sqrt{0,36} + 2,8$; 6) $\sqrt{10^2 - 8^2}$;
7) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; 8) $\sqrt{0,3^2 - 0,09}$; 9) $\sqrt{5(0,4^2 + 0,64)}$.

30.14. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{12 + a}$, якщо $a = 4; -8; -12$;
2) $\sqrt{m + n}$, якщо $m = 0{,}09$, $n = 0{,}07$;
3) $x + 4\sqrt{x}$, якщо $x = 49; 121$;
4) $3\sqrt{b} - b$, якщо $b = 1{,}96; 0{,}04$.

30.15. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{16 - b}$, якщо $b = -9; 15$;
2) $2\sqrt{m} - m$, якщо $m = 1{,}69; 0{,}49$.

30.16. Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 0$; 3) $\sqrt{x} = -2$;
4) $\sqrt{x} - 3 = 0$; 5) $2\sqrt{x} = 8$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{x} = 2$.

30.17. Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 1$; 2) $\sqrt{x} = -3$; 3) $\sqrt{x} - 5 = 0$; 4) $3\sqrt{x} = 21$.

3

30.18. Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{12 \cdot 14 - 13^2}$; 2) $\sqrt{2009^2 - 2008^2}$; 3) $\sqrt{1000^2 - 1001^2}$?

30.19. Для яких значень x має зміст вираз:

1) $\frac{5}{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\sqrt{x^5}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{-x}}$?

30.20. Для яких значень y має зміст вираз:

1) $\sqrt{2y}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{y^3}}$; 3) $\sqrt{y^6}$; 4) $\sqrt{-y}$?

30.21. Розв'яжіть рівняння:

1) $3\sqrt{x} + 7 = 0$; 2) $2\sqrt{\dfrac{x}{8}} - 4 = 0$;

3) $\dfrac{16}{\sqrt{x+3}} = 4$; 4) $7\sqrt{2x-5} - 14 = 0$.

30.22. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{3x} - 3 = 0$; 2) $2\sqrt{\dfrac{x}{3}} + 6 = 0$;

3) $\dfrac{14}{\sqrt{2x}} = 28$; 4) $2\sqrt{2x+7} - 6 = 0$.

4 **30.23.** Для яких значень a має зміст вираз:

1) $\sqrt{-a^2}$; 2) $\sqrt{-(a+3)^2}$; 3) $\sqrt{a^{10}+1}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a}}{a-3}$?

30.24. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{|2x-1|} = 3$; 2) $\sqrt{5+\sqrt{x}} = 3$; 3) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}} = 2$.

30.25. Розв'яжіть рівняння: 1) $\sqrt{|2x+3|} = 5$; 2) $\sqrt{9+\sqrt{x}} = 4$.

Вправи для повторення

30.26. Спростіть вираз $\dfrac{4a}{a+2} - (a-2)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{(a-2)^2} + \dfrac{2}{a^2-4}\right)$.

30.27. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

1) $x^2 - 6x + 9 + y^2 = 0$; 2) $|x+2| + y^2 + 2y + 1 = 0$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

30.28. Подайте у вигляді звичайного дробу або мішаного числа:
1) 0,3; 2) 0,25; 3) 1,2; 4) 2,5.

30.29. Подайте десятковим дробом:

1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{3}{4}$; 3) $2\dfrac{1}{5}$; 4) $3\dfrac{1}{4}$.

30.30. Запишіть звичайний дріб у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу:

1) $\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{3}{11}$; 3) $\dfrac{7}{9}$; 4) $\dfrac{5}{6}$.

Життєва математика

30.31. Пуд – старовинна одиниця маси, яка вживалася в Україні з княжих часів і аж до впровадження метричної системи мір. Її використовували для визначення врожайності або під час заготівлі сільськогосподарських продуктів: для вимірювання збіжжя, борошна, солі, меду тощо. Знайдіть в інтернеті, скільком кілограмам дорівнює 1 пуд. З'ясуйте, скільки тонн картоплі зібрала родина зі своєї земельної ділянки, якщо, за словами найстаршого члена родини, урожай картоплі склав 150 пудів?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

30.32. Чи існують такі прості числа x, y, z і t, для яких має місце рівність $xyzt + 4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$?

§ 31. Множина. Числові множини

1. Множина та її елементи

Поняття множини є одним з основних понять математики. Під поняттям ***множини*** будемо розуміти сукупність об'єктів, що мають спільну природу (або об'єднаних за спільною ознакою), самі об'єкти при цьому будемо називати ***елементами множини***.

Зазвичай множини позначають великими латинськими літерами. Якщо, наприклад, множина A складається із чисел 1, 2, 3, а множина B – зі знаків @ і !, то це записують так: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{@; !\}$. Числа 1, 2, 3 – елементи множини A, а знаки @ і ! – елементи множини B. Той факт, що число 1 належить множині A, записують за допомогою вже відомого нам символа $\in$, а саме: $1 \in A$. Той факт, що число 1 не належить множині B, записують так: $1 \notin B$.

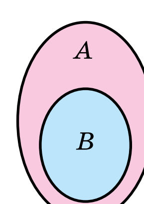
Множини, кількість елементів яких можна виразити натуральним числом, називають ***скінченними***.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають ***порожньою множиною***. Її позначають символом $\varnothing$. Так, наприклад, порожньою множиною є множина коренів рівняння $|x| = -1$. Це можна записати так: $x \in \varnothing$.

Множини, кількість елементів яких не можна виразити натуральним числом і які не є порожніми, називають ***нескінченними***.

2. Підмножина

Якщо кожен елемент множини B є елементом множини A, то кажуть, що множина B є підмножиною множини A.



Мал. 31.1

Записують це так: $B \subset A$. Схематичну ілюстрацію цього факту подано на малюнку 31.1.

Приклад 1. Нехай $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{4; 5\}$. Тоді множина B є підмножиною множини A, тобто $B \subset A$. Множина C не є підмножиною множини A, оскільки множина C містить елемент – число 5, що не є елементом множини A.

Вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, тобто $\varnothing \subset A$.

3. Раціональні числа

Цілі числа і дробові числа утворюють множину *раціональних чисел*.

Множину натуральних чисел позначають літерою $\boldsymbol{N}$, множину цілих чисел – літерою $\boldsymbol{Z}$, множину раціональних чисел – літерою $\boldsymbol{Q}$.

Можна стверджувати, що $5 \in N$, $\frac{2}{3} \notin Z$, $-7 \in Z$, $@ \notin \boldsymbol{Q}$.

$\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ і $\boldsymbol{Q}$ є нескінченними множинами.

Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, n – натуральне число.

Наприклад, $9 = \frac{9}{1}$; $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$; $-5 = \frac{-5}{1}$; $-0,2 = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$.

Раціональні числа можна також подати у вигляді десяткового дробу. Для цього достатньо чисельник дробу поділити на його знаменник. Наприклад,

$$\frac{3}{8} = 0,375; \qquad \frac{-5}{4} = -1,25; \qquad \frac{8}{33} = 0,242424\ldots = 0,(24).$$

В останньому випадку ми отримали нескінченний десятковий періодичний дріб. Дроби $\frac{3}{8}$ і $\frac{-5}{4}$ також можна подати у вигляді нескінченних десяткових періодичних дробів, дописавши праворуч як десяткові знаки нескінченну кількість нулів:

$$\frac{3}{8} = 0,375 = 0,375000\ldots;$$

$$\frac{-5}{4} = -1,25 = -1,25000\ldots$$

Отже,

кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу.

Справджується й обернене твердження:

кожний нескінченний десятковий періодичний дріб є записом деякого раціонального числа.

Наприклад,

$$1,2000\ldots = 1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}; \qquad 0,(3) = \frac{1}{3}; \qquad -1,(15) = -1\frac{5}{33}.$$

У правильності цих рівностей легко переконатися, виконавши відповідне ділення.

4. Ірраціональні числа

Але в математиці існують числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне.

Числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне, називають *ірраціональними числами*.

Префікс *ір-* означає заперечення, тобто *ірраціональні* – означає *не* раціональні.

Наприклад, ірраціональними є числа π, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{7}$ тощо. Наближені значення таких чисел можна знаходити з певною точністю (тобто округленими до певного розряду) за допомогою калькулятора або комп'ютера:

$$\pi \approx 3{,}1415926; \qquad \sqrt{2} \approx 1,4142135; \qquad -\sqrt{7} \approx -2,6457513.$$

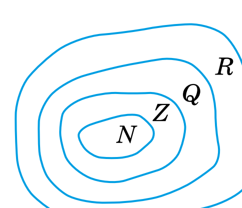
Кожне ірраціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового неперіодичного дробу.

5. Дійсні числа

Раціональні числа разом з ірраціональними числами утворюють множину *дійсних чисел*.

Множину дійсних чисел позначають літерою $\boldsymbol{R}$.

Оскільки кожне натуральне число є цілим числом, то множина $\boldsymbol{N}$ є підмножиною множини $\boldsymbol{Z}$. Аналогічно множина $\boldsymbol{Z}$ є підмножиною множини $\boldsymbol{Q}$, а множина $\boldsymbol{Q}$ – підмножиною множини $\boldsymbol{R}$ (мал. 31.2).



Мал. 31.2

Ірраціональні числа, які записано у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів, порівнюють між собою за тими самими правилами, що й скінченні десяткові дроби. Наприклад,

$\sqrt{2} > 1,4$ (бо $\sqrt{2} \approx 1,41$); $\quad -\sqrt{7} < -2,6$ (бо $-\sqrt{7} \approx -2,63$).

6. Обчислення значень виразів з дійсними числами

У задачах практичного змісту дійсні числа (для виконання арифметичних дій над ними) замінюють на їх наближені значення, округлені до певного розряду.

Приклад 2. Обчислити $\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{3} + \sqrt{3}$ з точністю до тисячних.

Розв'язання.

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} + \sqrt{3} \approx 2,3562 + 0,3333 + 1,7321 = 4,4218 \approx 4,422.$$

Зауважимо, що для додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня дійсних чисел діють усі властивості та обмеження, що й для дій над раціональними числами.

Вирази, що містять змінну під знаком арифметичного квадратного кореня, називають *ірраціональними виразами*.

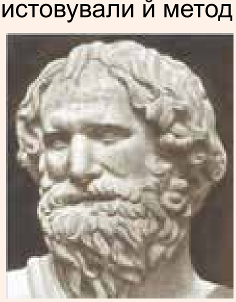
А ще раніше...

Поняття числа з'явилося дуже давно. Воно є одним з найзагальніших понять математики. Потреба у вимірюваннях та підрахунках зумовила появу додатних раціональних чисел. Саме тоді виникли і використовувалися натуральні числа та дробові числа, які розглядали як відношення натуральних чисел.

Наступним етапом розвитку поняття числа є введення у практику від'ємних чисел. У Давньому Китаї ці числа з'явилися у II ст. до н. е. Там уміли додавати і віднімати від'ємні числа. Від'ємні числа тлумачили як борг, а додатні – як майно. В Індії у VII ст. ці числа сприймали так само, але ще й знали, як їх множити і ділити.

Давні вавилоняни ще близько 4 тис. років тому знали відповідь на запитання: «Якою має бути сторона квадрата, щоб його площа дорівнювала S?». Вони склали таблиці квадратів чисел і квадратних коренів. Вавилоняни використовували й метод добування наближеного значення квадратного кореня із числа S, яке не є квадратом натурального числа. Суть методу полягала в тому, що число S записували у вигляді $a^2 + b$, де число b було досить малим порівняно з a^2, і застосовували формулу

$$\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$



Герон Александрійський (I ст. н. е.)

Наприклад, за цим методом:

$$\sqrt{102} = \sqrt{10^2 + 2} \approx 10 + \frac{2}{2 \cdot 10} = 10,1.$$

Перевіримо точність результату: $10,1^2 = 102,01$.

Такий метод обчислення наближеного значення квадратного кореня використовувався й у Давній Греції. Його детально описав *Герон Александрійський* (I ст. н. е.).

В епоху Відродження (XV – поч. XVII ст.) європейські математики позначали корінь латинським словом *Radix* (корінь), потім – скорочено – літерою *R*. Так з'явився термін «радикал», яким називають знак кореня. Згодом для позначення кореня стали використовувати крапку, а потім ромбик. Через деякий час – уже знак $\vee$ та горизонтальну риску над підкореневим виразом. Згодом знак $\vee$ і риску було об'єднано, і сучасні математики стали використовувати знак квадратного кореня у звичному нам вигляді: $\sqrt{}$.

Які числа утворюють множину раціональних чисел? ○ Які числа утворюють множину дійсних чисел? ○ У вигляді якого дробу можна подати будь-яке раціональне число? ○ Як можна записати кожний нескінченний десятковий періодичний дріб? ○ Які числа називають ірраціональними? ○ У якому вигляді можна подати кожне ірраціональне число?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

31.1. (*Усно.*) Чи правильно, що:

1) 5 – натуральне число;
2) $-2{,}1$ – ціле число;
3) $\sqrt{3}$ – раціональне число;
4) $-\frac{5}{7}$ – дійсне число?

31.2. Із чисел $\sqrt{7}$; $0{,}222...$; 52; $-2{,}(4)$; π; 19; $-3{,}7$; 0; $-\sqrt{5}$; $-2\frac{1}{9}$ випишіть:

1) натуральні числа;
2) цілі невід'ємні числа;
3) раціональні від'ємні числа;
4) ірраціональні числа.

31.3. Із чисел 8; $-\sqrt{7}$; -5; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{17}$; $3{,}(7)$; $\sqrt{13}$; $-1\frac{1}{3}$; 0; $5{,}137$ випишіть:

1) натуральні числа;
2) цілі недодатні числа;
3) раціональні додатні числа;
4) ірраціональні числа.

31.4. Подайте число як відношення цілого числа до натурального:

1) 31;
2) -8;
3) $2\frac{1}{7}$;
4) $-5{,}1$.

31.5. Подайте число як відношення цілого числа до натурального:

1) -21;
2) 10;
3) $-3\frac{1}{5}$;
4) $2{,}8$.

31.6. З множини $\left\{\frac{1}{8}; \frac{7}{9}; \frac{7}{3}; \frac{5}{5}; \frac{2}{3}; \frac{10}{1}\right\}$ виділіть підмножину:

1) правильних дробів;
2) неправильних дробів.

31.7. З множини $\{27;\ 36;\ 48;\ 19;\ 2;\ 11\}$ виділіть підмножину:

1) парних чисел;
2) непарних чисел.

31.8. Подайте число $\frac{2}{33}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу й округліть його:

1) до сотих; 2) до тисячних.

31.9. Подайте число $\frac{4}{11}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу й округліть його:

1) до сотих; 2) до тисячних.

31.10. (*Усно.*) Чи правильно, що:

1) $7 \notin \boldsymbol{N}$; 2) $10 \in \boldsymbol{Z}$; 3) $5 \notin \boldsymbol{Q}$; 4) $32 \in \boldsymbol{R}$;
5) $-3{,}9 \notin \boldsymbol{N}$; 6) $-9{,}2 \in \boldsymbol{Q}$; 7) $-3{,}17 \notin \boldsymbol{R}$; 8) $\sqrt{3} \in \boldsymbol{Q}$;
9) $\sqrt{64} \in \boldsymbol{N}$; 10) $-\sqrt{27} \notin \boldsymbol{R}$; 11) $\sqrt{\frac{4}{9}} \notin \boldsymbol{Z}$; 12) $\sqrt{1\frac{7}{9}} \in \boldsymbol{Q}$?

31.11. Порівняйте:

1) 1,366 і 1,636; 2) −2,63 і −2,36; 3) $-\frac{1}{17}$ і 0;
4) π і 3,2; 5) $-\pi$ і −3,1; 6) 1,7 і 1,(7);
7) −1,41 і $-\sqrt{2}$; 8) $\sqrt{3}$ і 1,8; 9) $2\frac{5}{13}$ і 2,(39).

31.12. Порівняйте:

1) −2,17 і −2,71; 2) 0 і $\frac{1}{16}$; 3) 2,(3) і 2,3;
4) $\sqrt{2}$ і 1,4; 5) $-\sqrt{3}$ і −1,7; 6) $\frac{1}{11}$ і 0,(08).

31.13. Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення кореня до сотих:

1) $\sqrt{17} + 2{,}12$; 2) $3{,}18 - \sqrt{5}$.

31.14. Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення кореня до сотих:

1) $\sqrt{3} + 4{,}17$; 2) $4{,}82 - \sqrt{11}$.

31.15. Множина A складається з коренів рівняння $0x = 7$. Що це за множина?

3 **31.16.** Чи правильно, що $A \subset B$, якщо:

1) $A = \{1\}$, $B = \{1;\ 3;\ 5\}$;
2) $A = \{\triangle;\ @\}$, $B = \{\triangle;\ \square;\ !\}$;
3) $A = \varnothing$, $B = \{1;\ 2;\ 3\}$;
4) $A = \{\alpha;\ \beta;\ \gamma\}$, $B = \{\alpha\}$;
5) A – множина простих чисел, B – множина натуральних чисел;
6) A – множина цілих чисел, B – множина натуральних чисел, кратних числу 5?

31.17. Чи правильно, що $C \subset D$, якщо:
1) $C = \{1;\ 7\}$, $D = \{1;\ 5;\ 17\}$;
2) $C = \{а;\ б\}$, $D = \{а;\ б;\ в;\ г\}$;
3) $C = \{m;\ n;\ l\}$, $D = \varnothing$;
4) $C = \{\Delta;\ \text{O}\}$, $D = \{\Delta;\ \text{O}\}$?

31.18. Розмістіть у порядку спадання числа: 0,11; 0,(1); 0,01; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{2}$.

31.19. Розмістіть у порядку зростання числа: 0,(2); 0,22; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; 0,02.

31.20. Чи правильно, що:
1) сума двох цілих чисел – ціле число;
2) частка двох раціональних чисел – число раціональне;
3) будь-яке ціле число є натуральним;
4) множина дійсних чисел складається з додатних і від'ємних чисел?

31.21. Запишіть три раціональних числа, що містяться між числами 1,55 і 1,(5).

31.22. Запишіть два раціональних числа, що містяться між числами 2,333 і 2,(3).

4 **31.23.** Використовуючи формулу $\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює: 1) 39 см^2; 2) 83 дм^2. Порівняйте відповідь із числом, знайденим за допомогою калькулятора.

31.24. Доведіть, що число $\sqrt{2}$ є ірраціональним.

31.25. Доведіть, що число $\sqrt{3}$ є ірраціональним.

Вправи для повторення

31.26. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $4x^2 - 9 = 0$; 3) $\frac{1}{16} - x^2 = 0$; 4) $\frac{9}{25} - x^2 = 0$.

31.27. З міст M і N одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі. Відстань між містами дорівнює s км, швидкості автомобілів – v_1 і v_2 (у км/год). Через t год автомобілі зустрілися. Виразіть t через s, v_1 і v_2. Обчисліть значення t, якщо $s = 375$ км, $v_1 = 78$ км/год, $v_2 = 72$ км/год.

Життєва математика

31.28. Одна цигарка руйнує 25 мг вітаміну С. Якщо людина не курить, але перебуватиме у прокуреному приміщенні протягом години, то для неї це все одно що викурити 4 цигарки. Скільки вітаміну С втратила Марина, пробувши 1,5 год у прокуреному приміщенні?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

31.29. Два гравці по черзі беруть з купки камінці. За правилами гри дозволяється за один хід брати 1, 2, 4, 8, ... (будь-який степінь двійки) камінців. Виграє той, хто візьме останній камінець. Хто переможе в цій грі за правильної стратегії, якщо початкова кількість камінців у купці дорівнюватиме:

1) 2016; 2) 2017?

§ 32. Тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geqslant 0$. Рівняння $x^2 = a$

1. Тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geqslant 0$

Нагадаємо, що для всіх значень $a \geqslant 0$ рівність $\sqrt{a} = x$ є правильною, якщо виконуються дві умови: 1) $x \geqslant 0$; 2) $x^2 = a$. Підставивши в останню рівність замість x його запис у вигляді $\sqrt{a}$, одержимо тотожність

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Для будь-якого $a \geqslant 0$ справджується тотожність

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Приклад 1. Обчислити:

1) $(\sqrt{7})^2$; 2) $(-\sqrt{11})^2$; 3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{18}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

Розв'язання. 1) $(\sqrt{7})^2 = 7$;

2) $(-\sqrt{11})^2 = (-1)^2 \cdot (\sqrt{11})^2 = 1 \cdot 11 = 11$;

3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{18}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\sqrt{18})^2 = \frac{1}{4} \cdot 18 = 4,5$;

4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{3}{4}$.

Відповідь: 1) 7; 2) 11; 3) 4,5; 4) $\frac{3}{4}$.

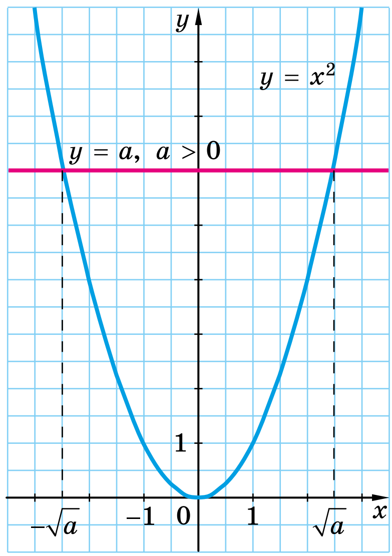
2. Рівняння $x^2 = a$, де a – деяке число

Розглянемо рівняння $\boldsymbol{x^2 = a}$, де a – деяке число.

Оскільки квадрат числа не може дорівнювати від'ємному числу, то, коли $a < 0$, рівняння $x^2 = a$ не має розв'язків, що можна записати так: $x \in \varnothing$.

Якщо $a = 0$, то єдиним коренем рівняння $x^2 = 0$ є число 0.

Якщо $a > 0$, то коренями рівняння $x^2 = a$ є числа $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$. Справді, $(\sqrt{a})^2 = a$ і $(-\sqrt{a})^2 = a$. Аби впевнитися, що рівняння $x^2 = a$, де $a > 0$, інших коренів не має, звернімося до графічної інтерпретації його розв'язування. Побудуємо графіки функцій $y = x^2$ та $y = a$, де $a > 0$ (мал. 32.1). Графіки перетнулися двічі: у точках з абсцисами $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$.



Мал. 32.1

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $x^2 = a$ у вигляді схеми:

$x^2 = a$, a – число

Якщо $a > 0$, то $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$	Якщо $a = 0$, то $x = 0$	Якщо $a < 0$, то коренів немає

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = -7$; 3) $x^2 = 7$; 4) $(2x + 1)^2 = 25$.

Розв'язання. 1) $x_1 = \sqrt{9} = 3$, $x_2 = -\sqrt{9} = -3$;

2) рівняння не має коренів, тобто $x \in \varnothing$;

3) $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = -\sqrt{7}$. Ці корені є ірраціональними числами;

4) маємо: $2x + 1 = \sqrt{25}$ або $2x + 1 = -\sqrt{25}$;

$2x + 1 = 5$; $2x + 1 = -5$;

$2x = 4$; $2x = -6$;

$x = 2$. $x = -3$.

Отже, рівняння має два корені: $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

Відповідь: 1) ± 3; 2) $\varnothing$; 3) $\pm\sqrt{7}$; 4) 2; -3.

Для яких значень a є правильною рівність $(\sqrt{a})^2 = a$? Чи має корені рівняння $x^2 = a$, якщо $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$, і якщо має, то скільки?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

32.1. Обчисліть:

1) $(\sqrt{7})^2$; 2) $(\sqrt{0})^2$; 3) $(\sqrt{2,9})^2$; 4) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)^2$.

32.2. Знайдіть значення виразу:

1) $(\sqrt{6})^2$; 2) $(\sqrt{5,3})^2$.

32.3. (*Усно.*) Чи має корені рівняння:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = 47$; 3) $x^2 = 0$; 4) $x^2 = -7$?

32.4. Чи має корені рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = -10$?

2

32.5. Знайдіть значення виразу:

1) $(-\sqrt{7})^2$; 2) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}$; 3) $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2$; 4) $(-2\sqrt{5})^2$;

5) $-5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; 6) $0,3 \cdot (-\sqrt{10})^2$; 7) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^2$; 8) $\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$.

32.6. Обчисліть:

1) $(-\sqrt{11})^2$; 2) $\sqrt{19} \cdot \sqrt{19}$; 3) $(2\sqrt{7})^2$; 4) $\left(-\dfrac{1}{4}\sqrt{8}\right)^2$;

5) $-7 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$; 6) $0,2 \cdot (-\sqrt{5})^2$; 7) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{15}}\right)^2$; 8) $\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)^2$.

32.7. Обчисліть:

1) $(\sqrt{15})^2 - 3,8$; 2) $5\left(-\sqrt{\dfrac{4}{5}}\right)^2$;

3) $7 : \left(\sqrt{\dfrac{7}{8}}\right)^2$; 4) $\dfrac{1}{8}(-\sqrt{24})^2$.

32.8. Знайдіть значення виразу:

1) $2,7 + (-\sqrt{13})^2$; 2) $8\left(\sqrt{\dfrac{5}{8}}\right)^2$; 3) $12 : \left(-\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)^2$; 4) $\dfrac{1}{19}(\sqrt{19})^2$.

32.9. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0,36$; 3) $x^2 = 121$;

4) $x^2 = -9$; 5) $x^2 = 11$; 6) $x^2 = \dfrac{4}{9}$.

32.10. Розв’яжіть рівняння:

1) $x^2 = 49$; 2) $x^2 = 0{,}16$; 3) $x^2 = 169$;

4) $x^2 = -4$; 5) $x^2 = 5$; 6) $x^2 = \dfrac{9}{16}$.

32.11. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2 - 0{,}05 = 0{,}04$; 2) $24 + x^2 = 25$;

3) $x^2 + 12 = 0$; 4) $\dfrac{1}{3}x^2 = 7$.

32.12. Розв’яжіть рівняння:

1) $x^2 + 0{,}01 = 0{,}26$; 2) $x^2 - 14 = 2$;

3) $17 - x^2 = 0$; 4) $-\dfrac{1}{4}x^2 = 5$.

32.13. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

1) $M(\sqrt{5}; 5)$; 2) $N(7; \sqrt{7})$;

3) $P(-\sqrt{3}; 3)$; 4) $T(\sqrt{10}; \sqrt{10})$?

32.14. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:

1) 36 см^2; 2) 49 дм^2; 3) 0,09 м^2; 4) $\dfrac{25}{36}$ дм^2.

3 **32.15.** Обчисліть:

1) $(-(\sqrt{5})^2)^2$; 2) $(2\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{2})^2$;

3) $36 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\sqrt{17}\right)^2 - \dfrac{1}{5}(2\sqrt{15})^2$; 4) $\sqrt{59{,}29} + \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{34}\right)^2$;

5) $(-3\sqrt{5})^2 - 3(\sqrt{5})^2$; 6) $\left(-\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{25}{32}}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{8}{9}}\right)^2$.

32.16. Обчисліть:

1) $((-\sqrt{7})^2)^2$; 2) $(3\sqrt{7})^2 - (7\sqrt{3})^2$;

3) $16 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \dfrac{1}{3}(4\sqrt{3})^2$; 4) $\sqrt{70{,}56} - \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{42}\right)^2$;

5) $(5\sqrt{2})^2 - 5 \cdot (-\sqrt{2})^2$; 6) $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{9}{10}}\right)^2 + \left(-\dfrac{5}{6}\sqrt{\dfrac{36}{65}}\right)^2$.

32.17. Розв’яжіть рівняння:

1) $(x - 2)^2 = 36$; 2) $(y + 3)^2 = 4$; 3) $(x - 1)^2 = 0$;

4) $(x + 3)^2 = 7$; 5) $\left(y - \dfrac{5}{9}\right)^2 = \dfrac{4}{81}$; 6) $(x + 5)^2 = -9$.

32.18. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+1)^2=16$; 2) $(y-2)^2=25$; 3) $(m+2)^2=0$;

4) $(x-2)^2=3$; 5) $\left(y-\frac{3}{10}\right)^2=\frac{1}{100}$; 6) $(m-3)^2=-4$.

32.19. Наведіть приклад рівняння вигляду $x^2=a$, де x – змінна, a – число, яке:

1) має один цілий корінь;
2) має два цілих корені;
3) не має коренів;
4) має два раціональних корені;
5) має корені, але вони не є раціональними.

32.20. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{6}=\frac{4}{x-1}$; 2) $(2x-3)^2+(2x+3)^2=20$.

32.21. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{5}=\frac{12}{x+2}$; 2) $(3x+1)^2+(3x-1)^2=4$.

4

32.22. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{7+\sqrt{2+x^2}}=3$; 2) $2\left|x^2-5\right|+3=5$.

32.23. Знайдіть корені рівняння:

1) $\sqrt{1+\sqrt{x^2+4}}=2$; 2) $2\left|x^2-4\right|+1=11$.

32.24. Для яких значень b справджується рівність:

1) $(\sqrt{b})^2=-b$; 2) $(\sqrt{b-4})^2=b-4$; 3) $b(\sqrt{b})^2=b^2$?

32.25. Для яких значень m рівняння $mx^2=1$:

1) має два корені; 2) має один корінь; 3) не має коренів?

Вправи для повторення

32.26. Спростіть вираз $\left(x-\frac{4x-9}{x-2}\right):\left(2x-\frac{2x}{x-2}\right)$.

32.27. Відомо, що $2x-4y=1$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{4}{x-2y}$; 2) $\frac{8y-4x}{5}$; 3) $\frac{x^2-4y^2}{2,5x+5y}$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

32.28. Порівняйте значення виразів:

1) $\sqrt{4\cdot 9}$ і $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{\frac{25}{36}}$ і $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$.

32.29. Знайдіть значення виразу:

1) $|-2,5| + |3,7|$; 2) $\left|\frac{4}{9}\right| \cdot \left|-\frac{3}{16}\right|$.

32.30. Спростіть вираз: 1) $|5a|$, якщо $a \geqslant 0$; 2) $|7b|$, якщо $b < 0$.

Життєва математика

32.31. Початковий розмір депозиту вкладниці склав 20 000 грн. Через два роки вкладниця закрила депозит, отримавши по ньому кошти в розмірі 25 088 грн. За якою відсотковою ставкою було відкрито депозит, якщо відсотки нараховуються один раз на рік на поточний рахунок (так звані «відсотки на відсотки»)?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

32.32. (*Київська математична олімпіада, 1989 р.*) Двоє гравців по черзі здійснюють хід за такими правилами: у клітинках нескінченного аркуша один гравець ставить хрестики, а другий – нулики. Чи може другий гравець грати так, щоб перший ніколи не зміг заповнити хрестиками якийсь квадрат 2×2?

§ 33. Властивості арифметичного квадратного кореня

1. Корінь з добутку

Порівняємо значення виразів $\sqrt{4 \cdot 9}$ і $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$:

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6, \quad \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Маємо: $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$, тобто корінь з добутку двох чисел дорівнює добутку їх коренів. Така властивість справджується для добутку будь-яких двох невід'ємних чисел.

Т Теорема (про корінь з добутку). **Корінь з добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів із цих чисел, тобто якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то**

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доведення. Оскільки $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то вирази $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ мають зміст, причому $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} \geqslant 0$. Тому $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Крім того,

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Маємо: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$ і $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab$. Тоді за означенням арифметичного квадратного кореня: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. ■

Доведена теорема поширюється і на випадок, коли множників під знаком кореня три і більше.

Н Наслідок. **Корінь з добутку невід'ємних множників дорівнює добутку коренів із цих множників.**

Доведення. Доведемо цей наслідок, наприклад, для трьох чисел $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Маємо:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab}\sqrt{c} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}. \blacksquare$$

Зауваження 1. Очевидно, що вираз $\sqrt{ab}$ має зміст за умови, коли $ab \geqslant 0$, тобто коли a і b відміннні від нуля числа, то це числа одного знака, а значить і тоді, коли обидві змінні a і b від'ємні. У цьому разі тотожність, яку ми розглянули вище, набуває вигляду $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$, де $-a \geqslant 0$ і $-b \geqslant 0$. Враховуючи обидва випадки, можна записати, що

$$\boldsymbol{\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}}, \text{ де } \boldsymbol{ab \geqslant 0}.$$

Приклад 1. 1) $\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$;

2) $\sqrt{32 \cdot 72} = \sqrt{(16 \cdot 2) \cdot (36 \cdot 2)} = \sqrt{16 \cdot 36 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{4} =$
$= 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$.

Якщо в рівності $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ поміняти місцями ліву і праву частини, то одержимо тотожність:

$$\boldsymbol{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}}, \text{ де } \boldsymbol{a \geqslant 0,\ b \geqslant 0}.$$

Добуток коренів з невід'ємних чисел дорівнює кореню з добутку цих чисел.

Приклад 2. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$.

2. Корінь з дробу

Розглянемо квадратний корінь з дробу.

Т Теорема (про корінь з дробу). **Корінь з дробу, чисельник якого є невід'ємним, а знаменник – додатним, дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь зі знаменника, тобто якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то**

$$\boldsymbol{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}.$$

Доведення. Оскільки $a \geqslant 0$ і $b > 0$, то вирази $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ мають зміст і $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} > 0$. Тому $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$. Крім того,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Маємо: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$ і $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$. Тоді за означенням арифметичного квадратного кореня: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. ■

Приклад 3. 1) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$; 2) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

Зауваження 2. Як і в зауваженні 1 (с. 29), тотожність, яку ми тільки що розглянули, можна записати й так:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}, \text{ де } ab \geqslant 0,\ b \neq 0.$$

Якщо в рівності $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ поміняти місцями ліву і праву частини, то одержимо тотожність:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ де } a \geqslant 0,\ b > 0.$$

Частка, чисельник якої є коренем з невід'ємного числа, а знаменник – коренем з додатного числа, дорівнює кореню із частки цих чисел.

Приклад 4. 1) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$; 2) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{20}{45}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

3. Корінь з квадрата та степеня

Розглянемо, як добути квадратний корінь з квадрата.

Т **Теорема** (про корінь з квадрата). **Для будь-якого значення a справджується рівність**

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доведення. $|a| \geqslant 0$ і $|a|^2 = a^2$ для будь-якого a, тому за означенням арифметичного квадратного кореня: $\sqrt{a^2} = |a|$. ■

Приклад 5. 1) $\sqrt{7^2} = |7| = 7$; 2) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Розглянемо квадратний корінь із степеня.

Теорема (про корінь із степеня). **Для будь-якого значення a і натурального числа k справджується рівність**

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|.$$

Доведення. $\sqrt{a^{2k}} = \sqrt{(a^k)^2}$. За теоремою про корінь з квадрата, маємо: $\sqrt{(a^k)^2} = |a^k|$. Отже, $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$. ■

Приклад 6. Обчислити $\sqrt{1,7^4}$.

Розв'язання. $\sqrt{1,7^4} = \sqrt{(1,7^2)^2} = |1,7^2| = 2,89$.

Приклад 7. Спростити вираз: 1) $\sqrt{a^{12}}$; 2) $\sqrt{p^6}$, де $p < 0$.

Розв'язання. 1) $\sqrt{a^{12}} = \sqrt{(a^6)^2} = |a^6|$. Оскільки $a^6 \geqslant 0$ для будь-якого a, то $|a^6| = a^6$. Отже, $\sqrt{a^{12}} = a^6$.

2) $\sqrt{p^6} = \sqrt{(p^3)^2} = |p^3|$. Оскільки $p < 0$, то $p^3 < 0$, а тому $|p^3| = -p^3$. Отже, якщо $p < 0$, то $\sqrt{p^6} = -p^3$.

Відповідь: 1) a^6; 2) $-p^3$.

Сформулюйте і доведіть теорему про корінь з добутку. ○ Чому дорівнює добуток коренів? ○ Сформулюйте і доведіть теорему про корінь з дробу. ○ Чому дорівнює частка коренів? ○ Сформулюйте і доведіть теореми про корінь з квадрата та корінь із степеня.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

33.1. (*Усно.*) Чи правильно обчислено:

1) $\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$; 2) $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{\sqrt{4}}{25} = \dfrac{2}{25}$?

33.2. Чи правильно виконано обчислення:

1) $\sqrt{36 \cdot 4} = \sqrt{36} \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$; 2) $\sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \dfrac{3}{5}$?

2

33.3. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{25 \cdot 9}$; 2) $\sqrt{16 \cdot 900}$; 3) $\sqrt{0,25 \cdot 1,44}$;

4) $\sqrt{0,04 \cdot 169}$; 5) $\sqrt{2,25 \cdot 0,09 \cdot 100}$; 6) $\sqrt{1,96 \cdot 0,01 \cdot 6,25}$.

33.4. Обчисліть:

1) $\sqrt{36 \cdot 49}$; 2) $\sqrt{100 \cdot 4}$; 3) $\sqrt{0,49 \cdot 1,69}$;
4) $\sqrt{0,09 \cdot 196}$; 5) $\sqrt{1,44 \cdot 0,16 \cdot 400}$; 6) $\sqrt{2,89 \cdot 10\,000 \cdot 0,25}$.

33.5. Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; 2) $\sqrt{\frac{121}{400}}$; 3) $\sqrt{\frac{36}{625}}$;
4) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 5) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 6) $\sqrt{44\frac{4}{9}}$.

33.6. Знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; 2) $\sqrt{\frac{289}{900}}$; 3) $\sqrt{\frac{9}{784}}$; 4) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 5) $\sqrt{1\frac{19}{81}}$; 6) $\sqrt{42\frac{1}{4}}$.

33.7. Обчисліть:

1) $\sqrt{0,2^2}$; 2) $\sqrt{(-0,9)^2}$; 3) $2\sqrt{3^2}$; 4) $-3\sqrt{9^2}$;
5) $0,5\sqrt{(-10)^2}$; 6) $-\frac{1}{5}\sqrt{5^2}$; 7) $-3\sqrt{(-7)^2}$; 8) $\frac{2}{7}\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2}$.

33.8. Обчисліть:

1) $\sqrt{1,7^2}$; 2) $\sqrt{(-0,3)^2}$; 3) $3\sqrt{4^2}$; 4) $-2\sqrt{7^2}$;
5) $\frac{1}{3}\sqrt{(-9)^2}$; 6) $-0,1\sqrt{20^2}$; 7) $-5\sqrt{(-3)^2}$; 8) $\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2}$.

33.9. Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

1) $\sqrt{2 \cdot 7}$; 2) $\sqrt{35}$; 3) $\sqrt{17b}$; 4) $\sqrt{6p}$.

33.10. Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

1) $\sqrt{3 \cdot 11}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) $\sqrt{19a}$; 4) $\sqrt{10b}$.

33.11. Подайте вираз у вигляді частки коренів:

1) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 2) $\sqrt{3\frac{2}{7}}$; 3) $\sqrt{\frac{7}{m}}$; 4) $\sqrt{\frac{p}{23}}$.

33.12. Подайте вираз у вигляді частки коренів:

1) $\sqrt{\frac{3}{11}}$; 2) $\sqrt{9\frac{1}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{a}{37}}$; 4) $\sqrt{\frac{5}{b}}$.

33.13. Обчисліть значення добутку:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; 2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$; 3) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{0,05}$;
4) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{2,5}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{13}} \cdot \sqrt{\frac{13}{36}}$; 6) $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}}$.

33.14. Обчисліть значення добутку:

1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$; 2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$; 3) $\sqrt{0,02}\cdot\sqrt{50}$;

4) $\sqrt{0,4}\cdot\sqrt{0,9}$; 5) $\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{\frac{7}{9}}$; 6) $\sqrt{\frac{11}{12}}\cdot\sqrt{\frac{1}{12}}\cdot\sqrt{11}$.

33.15. Обчисліть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$; 3) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{1,5}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$; 5) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,27}}{\sqrt{0,75}}$.

33.16. Обчисліть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{2,7}}{\sqrt{0,3}}$; 3) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{2,5}}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$; 5) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,18}}{\sqrt{1,28}}$.

33.17. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{9^4}$; 2) $\sqrt{2^6}$; 3) $\sqrt{5^8}$;

4) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 5) $\sqrt{(-3)^4}$; 6) $\sqrt{(-1)^{12}}$.

33.18. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{10^4}$; 2) $\sqrt{3^6}$; 3) $\sqrt{2^8}$;

4) $\sqrt{(-5)^4}$; 5) $\sqrt{(-1)^{10}}$; 6) $\sqrt{(-2)^{12}}$.

33.19. Замініть вираз йому тотожно рівним:

1) $\sqrt{m^2}$; 2) $4\sqrt{p^2}$; 3) $-0,1\sqrt{a^2}$; 4) $\frac{17}{\sqrt{c^2}}$.

33.20. Замініть вираз йому тотожно рівним:

1) $\sqrt{t^2}$; 2) $-2\sqrt{b^2}$; 3) $\frac{1}{7}\sqrt{x^2}$; 4) $\frac{7}{\sqrt{a^2}}$.

3

33.21. Обчисліть:

1) $\sqrt{4\frac{33}{64}\cdot 52\frac{9}{16}}$; 2) $\sqrt{1\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{1\frac{3}{13}}$;

3) $\sqrt{20^2-16^2}$; 4) $\sqrt{0,85^2-0,84^2}$.

33.22. Обчисліть:

1) $\sqrt{4\frac{21}{25}\cdot 23\frac{73}{81}}$; 2) $\sqrt{1\frac{1}{36}}\cdot\sqrt{1\frac{12}{37}}$;

3) $\sqrt{37^2-12^2}$; 4) $\sqrt{0,25^2-0,24^2}$.

33.23. Обчисліть:

1) $\sqrt{90\cdot 490}$; 2) $\sqrt{72\cdot 32}$; 3) $\sqrt{4,9\cdot 32,4}$;

4) $\sqrt{4,5}\cdot\sqrt{72}$; 5) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{39}$; 6) $\sqrt{22}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}$.

33.24. Обчисліть:

1) $\sqrt{40 \cdot 640}$; 2) $\sqrt{45 \cdot 125}$; 3) $\sqrt{14,4 \cdot 8,1}$;
4) $\sqrt{1,6} \cdot \sqrt{90}$; 5) $\sqrt{17} \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{2}$; 6) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{14}$.

33.25. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{3^4 \cdot 6^2 \cdot (-2)^6}$; 2) $\sqrt{2^{10} \cdot 5^2} - \sqrt{(-4)^4}$;
3) $\sqrt{25^3}$; 4) $\sqrt{9^5}$.

33.26. Обчисліть:

1) $\sqrt{(-2)^4 \cdot 7^2} - \sqrt{(-3)^6}$; 2) $\sqrt{36^3}$.

33.27. Обчисліть, попередньо розклавши підкореневий вираз на прості множники:

1) $\sqrt{12\,544}$; 2) $\sqrt{186\,624}$.

33.28. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0,36x^2}$, якщо $x \geqslant 0$; 2) $\sqrt{121y^2}$, якщо $y < 0$;
3) $-3\sqrt{\frac{1}{9}p^2}$, якщо $p < 0$; 4) $5\sqrt{x^4}$;
5) $\sqrt{25a^6}$, якщо $a \geqslant 0$; 6) $\sqrt{\frac{25}{49}c^{10}}$, якщо $c < 0$.

33.29. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0,49p^2}$, якщо $p \geqslant 0$; 2) $\sqrt{\frac{25}{64}m^2}$, якщо $m < 0$;
3) $7\sqrt{b^8}$; 4) $\sqrt{0,01a^{14}}$, якщо $a < 0$.

33.30. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{25m^2n^{12}}$, якщо $m \leqslant 0$;
2) $\sqrt{\frac{49}{169}m^{14}n^{18}}$, якщо $m \geqslant 0$, $n < 0$;
3) $\frac{1}{8}xy^3\sqrt{64x^4y^2}$, якщо $y > 0$;
4) $\sqrt{\frac{p^6m^{12}}{x^8}}$, якщо $p < 0$;
5) $2m^5\sqrt{\frac{p^{20}}{m^2}}$, якщо $m < 0$;
6) $\frac{\sqrt{x^{14}y^{16}z^{26}}}{x^3y^8z^{12}}$, якщо $x > 0$, $z < 0$.

33.31. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{64a^2b^8}$, якщо $a \geqslant 0$;

2) $\dfrac{1}{10}bc\sqrt{25b^6c^{10}}$, якщо $b < 0$, $c > 0$;

3) $\sqrt{\dfrac{x^8y^{12}}{z^2}}$, якщо $z < 0$;

4) $3a^2\sqrt{\dfrac{b^{14}}{a^4}}$, якщо $b > 0$.

4 **33.32.** Відомо, що $x < 0$, $y < 0$. Подайте вираз:

1) $\sqrt{7xy}$ у вигляді добутку коренів;

2) $\sqrt{\dfrac{2x}{3y}}$ у вигляді частки коренів.

33.33. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(x-y)^2}$, якщо $x \geqslant y$;

2) $\sqrt{(m-n)^2}$, якщо $m < n$;

3) $\sqrt{x^2-10x+25}$, якщо $x \geqslant 5$;

4) $\sqrt{36-12a+a^2}$, якщо $a < 6$;

5) $(x+2)\sqrt{\dfrac{25}{x^2+4x+4}}$, якщо $x > -2$;

6) $(a-b)\sqrt{\dfrac{4}{a^2-2ab+b^2}}$, якщо $a < b$.

33.34. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(m-2)^2}$, якщо $m \geqslant 2$;

2) $\sqrt{p^2+8p+16}$, якщо $p < -4$;

3) $(a-5)\sqrt{\dfrac{1}{a^2-10a+25}}$, якщо $a > 5$;

4) $(x-1)\sqrt{\dfrac{9}{x^2-2x+1}}$, якщо $x < 1$.

33.35. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{3}-5)^2}+\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)^2$;

2) $\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{21}-5)^2}-\sqrt{(\sqrt{21}-4)^2}$; 4) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

33.36. Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{5-\sqrt{8}}\right)^2-\sqrt{(\sqrt{8}-13)^2}$; 2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

Вправи для повторення

33.37. Розкладіть многочлен на множники:

1) $2x^2y^3-8xy^5$; 2) $49a^2-36$;

3) $36m^3n+27m^2n^8$; 4) $\frac{25}{49}m^8-n^4$.

33.38. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m^2-4}{6+3m}$; 2) $\frac{a^2+10a+25}{4a+20}$;

3) $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$; 4) $\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}$.

33.39. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{a}{a-6}-\frac{2a}{a^2-12a+36}\right):\frac{a-8}{36-a^2}+\frac{12a}{a-6}=-a.$$

33.40. Побудуйте графік функції $y=3x+\sqrt{x^2}$, якщо $x\leqslant 0$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

33.41. Розкладіть на прості множники число:

1) 18; 2) 72; 3) 175; 4) 448.

33.42. Спростіть вираз:

1) $2a+3a$; 2) $7b-b$; 3) $5m+m-7m$.

33.43. Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $a(3a-4)$; 2) $(b-3)(b+2)$.

Життєва математика

33.44. 1) Під час чищення зубів ми часто користуємося постійним потоком води з крана замість того, щоб набрати воду в індивідуальний стакан. Це призводить до марних витрат майже 4 л води щохвилини. Скільки літрів води може заощадити за тиждень родина з 4 осіб, якщо всі вони чистять зуби двічі на день протягом 3 хвилин?

2) *Проєктна діяльність.* Дізнайтеся тариф на 1 м^3 води у вашій місцевості. Обчисліть, скільки коштів може заощадити така родина протягом місяця за умови правильного використання води під час чищення зубів.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

33.45. (*Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.*) Батьки разом із двома дітьми, Ясею (4 роки) та Тарасом (7 років), збираються провести вихідний день у парку атракціонів. Батьки дозволяють кожній дитині відвідати не більше ніж три атракціони і кожний атракціон – лише по одному разу. Відомо, що на атракціони «Електричні машинки» і «Веселі гірки» допускають лише дітей старше 6 років. На «Паровозик» Тарас не піде. Для відвідування будь-якого атракціону потрібно купити квиток для кожної дитини. Скориставшись таблицею, визначте *максимальну* суму коштів (у грн), яку витратять батьки на придбання квитків для дітей.

Назва атракціону	Вартість квитка для однієї дитини, грн
«Веселі гірки»	17
«Паровозик»	16
«Електричні машинки»	20
«Карусель»	12
«Батут»	15
«Дитяча риболовля»	8
«Лебеді»	13

§ 34. Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені

Розглянемо, які тотожні перетворення можна виконувати з ірраціональними виразами.

1. Винесення множника з-під знака кореня

Скористаємося теоремою про корінь з добутку для перетворення виразу $\sqrt{12}$:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Кажуть, що **множник винесли з-під знака кореня.** У цьому разі з-під знака кореня винесли множник 2.

Приклад 1. Винести множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{x^{11}}$.

Розв'язання. Подамо вираз x^{11} у вигляді добутку $x^{10} \cdot x$, у якому x^{10} є степенем з парним показником. Тоді

$$\sqrt{x^{11}} = \sqrt{x^{10} \cdot x} = \sqrt{x^{10}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{(x^5)^2} \cdot \sqrt{x} = |x^5|\sqrt{x}.$$

Вираз $\sqrt{x^{11}}$ має зміст, якщо $x \geqslant 0$, бо якщо $x < 0$, то й $x^{11} < 0$. Оскільки $x \geqslant 0$, то $x^5 \geqslant 0$. Тому $\left|x^5\right| = x^5$.

Отже, $\sqrt{x^{11}} = x^5\sqrt{x}$.

Відповідь: $x^5\sqrt{x}$.

2. Внесення множника під знак кореня

Розглянемо тотожне перетворення, обернене до попереднього. Скористаємося правилом множення коренів:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}.$$

Кажуть, що **множник внесли під знак кореня**. У цьому разі під знак кореня внесли множник 2.

Зауважимо, що під знак кореня можна вносити лише додатний множник.

Приклад 2. Внести множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt{3}$; 2) $m\sqrt{5}$.

Розв'язання.

1) $-2\sqrt{3} = -1 \cdot 2\sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = -\sqrt{12}$.

2) Множник m може набувати будь-яких значень (бути додатним, нулем або від'ємним). Тому слід розглянути два випадки:

якщо $m \geqslant 0$, то $m\sqrt{5} = |m|\sqrt{5} = \sqrt{m^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5m^2}$;

якщо $m < 0$, то $m\sqrt{5} = -|m|\sqrt{5} = -\sqrt{m^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{5m^2}$.

Відповідь: 1) $-\sqrt{12}$;

2) $\sqrt{5m^2}$, якщо $m \geqslant 0$; $-\sqrt{5m^2}$, якщо $m < 0$.

3. Додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня ірраціональних виразів

Використовуючи властивості множення і ділення коренів, можна виконувати арифметичні дії над виразами, що містять квадратні корені.

Приклад 3. 1) $5\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} = 35\sqrt{6}$;

2) $7\sqrt{a} \cdot (-3\sqrt{6}) = -21\sqrt{6a}$;

3) $8\sqrt{18} : 4\sqrt{2} = \dfrac{8\sqrt{18}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$;

4) $7\sqrt{x} : (-2\sqrt{x}) = -\dfrac{7\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{7}{2}$.

Використовуючи тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$, де $a \geqslant 0$, ірраціональні вирази можна підносити до степеня.

Приклад 4. 1) $(-5\sqrt{2})^2 = (-5)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$;

2) $(\sqrt{a})^3 = (\sqrt{a})^2\sqrt{a} = a\sqrt{a}$.

Розглянемо, коли квадратні корені можна додавати.

Приклад 5. Спростити вираз $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$.

Розв'язання. Доданки містять спільний множник $\sqrt{2}$. Винесемо його за дужки та виконаємо дію в дужках: $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(5 + 3) = 8\sqrt{2}$.
Зазвичай розв'язання записують коротше:
$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Зауважимо, що вирази $5\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$ у цьому прикладі називають *подібними радикалами* (за аналогією до подібних доданків) і додають за правилом зведення подібних доданків.

Приклад 6. Спростити вираз $\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{27a}$.

Розв'язання. У кожному з доданків винесемо множник з-під знака кореня, отримаємо суму подібних радикалів:
$\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{27a} = \sqrt{4 \cdot 3a} + \sqrt{16 \cdot 3a} - \sqrt{9 \cdot 3a} =$
$= 2\sqrt{3a} + 4\sqrt{3a} - 3\sqrt{3a} = 3\sqrt{3a}$.
Відповідь: $3\sqrt{3a}$.

Приклад 7. Спростити вираз:

1) $(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3})$; 2) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{15}$.

Розв'язання. Можемо застосувати формули скороченого множення.
1) $(\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 7 - 4 \cdot 3 = -5$;
2) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{15} = ((2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2) + \sqrt{15} =$
$= 4 \cdot 5 - 4\sqrt{15} + 3 + \sqrt{15} = 23 - 3\sqrt{15}$.
Відповідь: 1) -5; 2) $23 - 3\sqrt{15}$.

4. Скорочення дробів

Приклад 8. Скоротити дріб:

1) $\dfrac{a^2 - 7}{a - \sqrt{7}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}}$.

Розв'язання. 1) Врахувавши, що $7 = (\sqrt{7})^2$, чисельник дробу подамо у вигляді різниці квадратів. Матимемо:

$$\frac{a^2 - 7}{a - \sqrt{7}} = \frac{a^2 - (\sqrt{7})^2}{a - \sqrt{7}} = \frac{(a - \sqrt{7})(a + \sqrt{7})}{a - \sqrt{7}} = a + \sqrt{7}.$$

2) Врахувавши, що $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, а $3 = (\sqrt{3})^2$, у чисельнику й знаменнику винесемо за дужки спільний множник. Матимемо:

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Відповідь: 1) $a + \sqrt{7}$; 2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

5. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу

Приклад 9. Перетворити дріб $\frac{a}{\sqrt{5}}$ так, щоб він не містив кореня в знаменнику.

Розв'язання. Враховуючи, що $(\sqrt{5})^2 = 5$, достатньо чисельник і знаменник дробу помножити на $\sqrt{5}$:

$$\frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь: $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

У такому разі кажуть, що ми *звільнилися від ірраціональності (або позбулися ірраціональності) в знаменнику дробу*.

Приклад 10. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{2}{\sqrt{7}-1}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{7}+1$, щоб у знаменнику отримати формулу скороченого множення різниці двох виразів на їх суму:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{7-1} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$.

Зауважимо, що вираз $\sqrt{7}+1$ називають *спряженим* до виразу $\sqrt{7}-1$. Узагалі якщо у формулах скороченого множення результатом множення дужок, що містять радикали, є раціональний вираз, то вирази в дужках називають *взаємно спряженими*. Так, $\sqrt{7}-1$ і $\sqrt{7}+1$ – взаємно спряжені вирази.

Взаємно спряженими також є вирази $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ і $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ і $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ тощо.

На прикладі виразу $\sqrt{4m}$ покажіть, як можна винести множник з-під знака кореня. ○ На прикладі добутку $3\sqrt{p}$ покажіть, як можна внести множник під знак кореня. ○ Наведіть приклади подібних радикалів. ○ За яким правилом можна додавати (віднімати) подібні радикали? ○ На який множник треба помножити чисельник і знаменник, щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу: $\frac{2}{\sqrt{7}}$; $\frac{5}{\sqrt{a}+1}$? ○ Наведіть приклади взаємно спряжених виразів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

34.1. (*Усно.*) Виконайте дії:

1) $5\sqrt{2}+4\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{3}-2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{7}+\sqrt{7}$; 4) $2\sqrt{5}-\sqrt{5}$.

34.2. Виконайте дії:

1) $7\sqrt{11}+2\sqrt{11}$; 2) $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3}+6\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{7}-\sqrt{7}$.

34.3. Подайте у вигляді кореня:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$; 2) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$; 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{b}$; 4) $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{a}}$.

34.4. Подайте у вигляді кореня:

1) $\sqrt{3}\sqrt{7}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$; 3) $\sqrt{5}\sqrt{a}$; 4) $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{x}}$.

2

34.5. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{63}$; 3) $\sqrt{250}$; 4) $\sqrt{363}$;

5) $\sqrt{3^2\cdot 19}$; 6) $\sqrt{2^4\cdot 7}$; 7) $\sqrt{5^2\cdot 7^3}$; 8) $\sqrt{5^3\cdot 2^5}$.

34.6. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt{50}$; 3) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{192}$;

5) $\sqrt{5^2\cdot 17}$; 6) $\sqrt{3^4\cdot 2}$; 7) $\sqrt{7^2\cdot 2^3}$; 8) $\sqrt{3^5\cdot 5^3}$.

34.7. Винесіть множник з-під знака кореня і спростіть отриманий вираз:

1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{28}$; 2) $-\dfrac{3}{5}\sqrt{500}$; 3) $1{,}2\sqrt{75}$; 4) $-1{,}25\sqrt{48}$.

34.8. Винесіть множник з-під знака кореня і спростіть отриманий вираз:

1) $0{,}5\sqrt{44}$; 2) $-\dfrac{2}{5}\sqrt{125}$; 3) $0{,}7\sqrt{300}$; 4) $-1{,}5\sqrt{112}$.

34.9. Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{5}$; 3) $-2\sqrt{3}$; 4) $-5\sqrt{10}$;

5) $10\sqrt{m}$; 6) $\dfrac{1}{2}\sqrt{8x}$; 7) $-0{,}1\sqrt{10a}$; 8) $7\sqrt{\dfrac{1}{7}c}$.

34.10. Внесіть множник під знак кореня:

1) $4\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{11}$; 3) $-3\sqrt{5}$; 4) $-7\sqrt{2}$;

5) $5\sqrt{p}$; 6) $\dfrac{1}{3}\sqrt{18x}$; 7) $-0{,}2\sqrt{10t}$; 8) $6\sqrt{\dfrac{1}{6}y}$.

34.11. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{25x}+\sqrt{49x}-\sqrt{36x}$; 2) $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$;

3) $\sqrt{8a}+\dfrac{1}{2}\sqrt{200a}-\sqrt{50a}$; 4) $\sqrt{3m}-\sqrt{p}+\sqrt{12m}$.

34.12. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{100a} + \sqrt{64a} - \sqrt{121a}$;
2) $\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{75}$;
3) $\sqrt{5b} - \frac{1}{2}\sqrt{20b} + \sqrt{500b}$;
4) $\sqrt{7a} + \sqrt{b} + \sqrt{63a}$.

34.13. Виконайте множення:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{72})$;
2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{48})\sqrt{3}$;
3) $(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$;
4) $(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$.

34.14. Виконайте множення:

1) $\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{20})$;
2) $(5\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{50})\sqrt{2}$;
3) $(1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$;
4) $(2 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7})$.

34.15. Спростіть вираз, використовуючи формули скороченого множення:

1) $(\sqrt{11} + \sqrt{7})(\sqrt{11} - \sqrt{7})$;
2) $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$;
3) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})$;
4) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 - 9$;
5) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}$;
6) $(\sqrt{3} - \sqrt{27})^2$.

34.16. Спростіть вираз, використовуючи формули скороченого множення:

1) $(\sqrt{19} + \sqrt{3})(\sqrt{19} - \sqrt{3})$;
2) $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$;
3) $(4\sqrt{3} - \sqrt{19})(4\sqrt{3} + \sqrt{19})$;
4) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 - 8$;
5) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{10}$;
6) $(\sqrt{50} - \sqrt{2})^2$.

34.17. Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

1) $x^2 - 3$;
2) $17 - a^2$;
3) $4a^2 - 5$;
4) $1 - 2x^2$;
5) $a - 9$, де $a \geqslant 0$;
6) $b - c$, де $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

34.18. Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

1) $5 - x^2$; 2) $9m^2 - 7$; 3) $16 - 3b^2$; 4) $b - 2$, де $b \geqslant 0$.

34.19. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$; 2) $\frac{7 - \sqrt{a}}{49 - a}$; 3) $\frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{2\sqrt{3} + 3}{5\sqrt{3}}$.

34.20. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2 - 3}{a - \sqrt{3}}$; 2) $\frac{5 + \sqrt{b}}{25 - b}$; 3) $\frac{\sqrt{5} + 5}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{7\sqrt{2} - 2}{3\sqrt{2}}$.

34.21. Позбудьтеся ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; 3) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; 4) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$.

34.22. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{9}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 4) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$.

3

34.23. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{13m^2}$, якщо $m \geqslant 0$; 2) $\sqrt{b^3}$;
3) $\sqrt{7a^6}$, якщо $a < 0$; 4) $\sqrt{16x^7}$.

34.24. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{11x^2}$, якщо $x \geqslant 0$; 2) $\sqrt{c^5}$;
3) $\sqrt{2p^{10}}$, якщо $p < 0$; 4) $\sqrt{36m^{11}}$.

34.25. Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{2}$, якщо $a \geqslant 0$; 2) $b^3\sqrt{5}$, якщо $b < 0$;
3) $b\sqrt{\frac{3}{b}}$; 4) $x^3\sqrt{-x}$.

34.26. Внесіть множник під знак кореня:

1) $b\sqrt{3}$, якщо $b \geqslant 0$; 2) $c^5\sqrt{7}$, якщо $c < 0$;
3) $x^2\sqrt{\frac{5}{x}}$; 4) $y\sqrt{-y}$.

34.27. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2 + \sqrt{360}$;
2) $(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3})^2 - \sqrt{150}$;
3) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$.

34.28. Розкладіть на множники:

1) $\sqrt{a} - \sqrt{3a}$; 2) $\sqrt{7p} + \sqrt{4p}$; 3) $\sqrt{21} + \sqrt{7}$;
4) $\sqrt{6} - \sqrt{10}$; 5) $2\sqrt{m} - \sqrt{6m}$; 6) $\sqrt{5x} - \sqrt{10x}$.

34.29. Розкладіть на множники:

1) $\sqrt{p} + \sqrt{2p}$; 2) $\sqrt{42} - \sqrt{6}$; 3) $3\sqrt{a} + \sqrt{6a}$.

34.30. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x + 6\sqrt{x}}{x - 36}$; 2) $\frac{a + 6\sqrt{a}\sqrt{b} + 9b}{a - 9b}$; 3) $\frac{\sqrt{10} - 5}{2 - \sqrt{10}}$.

34.31. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a - 25}{a - 5\sqrt{a}}$; 2) $\frac{x - 4\sqrt{x}\sqrt{y} + 4y}{x - 4y}$; 3) $\frac{11 + \sqrt{22}}{\sqrt{22} + 2}$.

34.32. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\frac{15}{\sqrt{6} - 1}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{11} + \sqrt{7}}$; 3) $\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$.

34.33. Позбудьтеся ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\dfrac{10}{\sqrt{3}+1}$; 2) $\dfrac{3}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{1}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$.

4 **34.34.** Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$; 2) $\dfrac{15}{11+2\sqrt{30}}+\dfrac{15}{11-2\sqrt{30}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; 4) $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)^2$.

34.35. Знайдіть:

1) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$; 2) $\dfrac{3}{10-3\sqrt{11}}+\dfrac{3}{10+3\sqrt{11}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$; 4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^2+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^2$.

34.36. Обчисліть значення виразу:

$$\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}+\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{13}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{45}+\sqrt{49}},$$

відтак дізнаєтеся, скільки разів футболіст Андрій Шевченко був володарем кубка України у складі команди «Динамо» (Київ).

34.37. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{m}+1}{m\sqrt{m}+m+\sqrt{m}}:\dfrac{1}{m^2-\sqrt{m}}$; 2) $\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}-b}-\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right):\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; 4) $\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}+2a}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Вправи для повторення

34.38. Обчисліть:

1) $\dfrac{216^3}{36^4}$; 2) $\dfrac{81^6}{27^8}$; 3) $\dfrac{4^8\cdot 16}{64^3}$; 4) $\dfrac{2^8\cdot 13^8}{26^7}$.

34.39. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{2x+1}{x}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2x^2}{x^2-x}$.

34.40. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{10n-3}$, де $n\in N$, не може бути натуральним числом.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

34.41. Побудуйте графік функції $y=x^2$, де $x\geqslant 0$. Якою буде область значень цієї функції?

34.42. Використовуючи графік функції $y = 2x$, знайдіть:
1) значення y, що відповідає $x = -3$; $x = 1$;
2) значення x, що відповідає $y = -2$; $y = 6$;
3) два значення x, для яких значення функції більше за 3; менше від 3.

Життєва математика

34.43. Будівельна компанія хоче придбати 75 кубометрів пінобетону в одного з трьох постачальників. Ціни та умови доставки наведено в таблиці. Скільки коштуватиме найбільш дешевий варіант покупки?

Постачальник	Ціна піноблоку (грн за 1 м^3)	Вартість доставки (грн)	Спеціальні умови
А	1325	2200	Немає
Б	1350	3000	Для замовлень понад 75 тис. грн доставка безкоштовна
В	1330	2000	Для замовлень від 80 м^3 доставка безкоштовна

Цікаві задачі – поміркуй одначе

34.44. (*Перша міжнародна математична олімпіада школярів, 1959 р.*) Доведіть, що для будь-якого натурального значення n дріб $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ є нескоротним.

§ 35. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості

1. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік

Приклад 1. Нехай S см^2 – площа квадрата, a см – довжина його сторони. Оскільки $S = a^2$, то залежність довжини сторони a квадрата від його площі S можна задати формулою

$$a = \sqrt{S}.$$

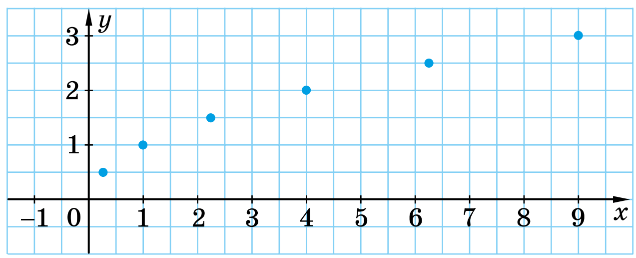
Розглянемо функцію $y = \sqrt{x}$. Очевидно, що змінна x набуває лише невід'ємних значень, тобто $x \geqslant 0$.

Складемо таблицю значень функції $y = \sqrt{x}$ для кількох значень аргументу:

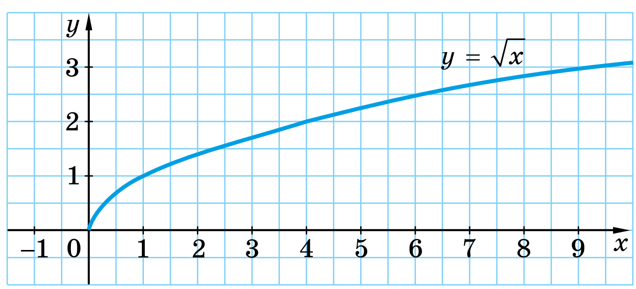
x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо ці точки на координатній площині (мал. 35.1). Якби на цій самій площині ми позначили б більшу кількість точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \sqrt{x}$, а потім сполучили їх плавною лінією, то отримали б графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 35.2).

Графіком цієї функції є гілка параболи.



Мал. 35.1

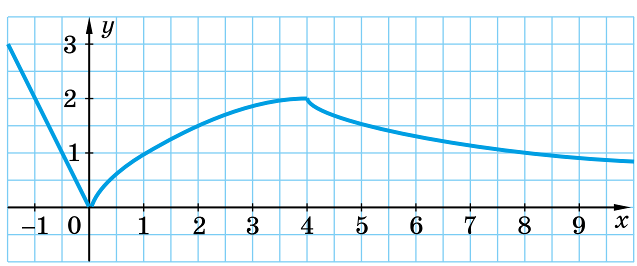


Мал. 35.2

Приклад 2. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ \dfrac{8}{x}, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Відповідь: графік зображено на малюнку 35.3.



Мал. 35.3

2. Властивості функції $y = \sqrt{x}$

Узагальнимо ***властивості функції*** $y = \sqrt{x}$.

1. **Областю визначення функції є множина всіх невід'ємних чисел:** $x \geqslant 0$.
2. **Областю значень функції є множина всіх невід'ємних чисел:** $y \geqslant 0$.
3. **Графік функції – гілка параболи, що виходить з точки (0; 0), усі інші точки графіка лежать у першій координатній чверті.**
4. **Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.**

Остання властивість дає змогу *порівнювати значення виразів, що містять корені*.

Приклад 3. Порівняти числа:

1) $\sqrt{12}$ і $\sqrt{11}$; 2) 7 і $\sqrt{50}$; 3) $5\sqrt{2}$ і $4\sqrt{3}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $12 > 11$, то $\sqrt{12} > \sqrt{11}$.

2) $7 = \sqrt{49}$, а $49 < 50$, тому $\sqrt{49} < \sqrt{50}$. Отже, $7 < \sqrt{50}$.

3) Внесемо множник в обох виразах під знак кореня:

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50};\ 4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{48}.$$

Оскільки $50 > 48$, то $\sqrt{50} > \sqrt{48}$, а тому $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$.

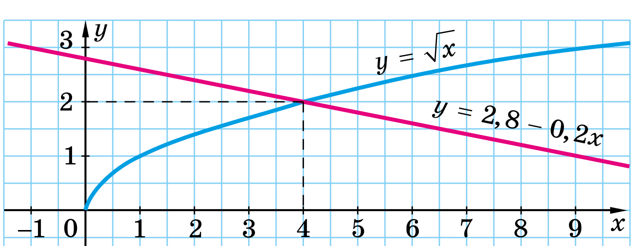
3. Використання графіка функції $y = \sqrt{x}$ під час розв'язування рівнянь

Приклад 4. Розв'язати графічно рівняння $5\sqrt{x} = 14 - x$.

Розв'язання. Оскільки ми поки що не вміємо будувати графік функції $y = 5\sqrt{x}$, то поділимо обидві частини рівняння на число 5. Одержимо рівняння: $\sqrt{x} = 2,8 - 0,2x$.

Побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 2,8 - 0,2x$ в одній системі координат (мал. 35.4). Графіки перетнулися в точці з абсцисою 4. Перевіркою впевнюємося, що число 4 – корінь рівняння. Дійсно, $5\sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$ і $14 - 4 = 10$.

Відповідь: 4.



Мал. 35.4

Що собою являє графік функції $y = \sqrt{x}$? Сформулюйте властивості функції $y = \sqrt{x}$.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

35.1. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть значення y, що відповідає значенню $x = 9;\ 0;\ 81$.

35.2. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть значення y, що відповідає значенню $x = 1;\ 4;\ 100$.

2

35.3. Використовуючи графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 35.2), знайдіть:
1) значення y для $x = 1{,}5;\ 3;\ 4;\ 6{,}5$;
2) значення x, для яких $y = 1;\ 2{,}5$;
3) два значення x, для яких значення функції є більшим за число 2; меншим від числа 2.

35.4. За графіком функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 35.2) знайдіть:
1) значення функції для значень аргументу $0{,}5;\ 2;\ 5{,}5$;
2) значення аргументу, для яких значення функції дорівнює $0{,}5;\ 4$;
3) два значення x, для яких значення функції є більшим за число 1; меншим від числа 1.

35.5. Не будуючи графіка функції $y = \sqrt{x}$, визначте, через які з даних точок він проходить:
1) $A(36;\ 4)$; 2) $B(4;\ 16)$; 3) $C(-4;\ 2)$;
4) $D(0;\ 0)$; 5) $M(1;\ -1)$; 6) $P(0{,}5;\ 0{,}25)$.

35.6. Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка:
1) $F(16;\ 6)$; 2) $K(-36;\ 6)$; 3) $L(5;\ 25)$; 4) $N(0{,}9;\ 0{,}81)$?

35.7. Порівняйте числа:
1) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{29}$ і $2\sqrt{7}$; 3) $3\sqrt{5}$ і $2\sqrt{10}$; 4) $4\sqrt{3}$ і $3\sqrt{7}$.

35.8. Порівняйте значення виразів:
1) $5\sqrt{2}$ і $\sqrt{51}$; 2) $\sqrt{146}$ і $7\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{5}$ і $3\sqrt{2}$; 4) $2\sqrt{7}$ і $3\sqrt{3}$.

3

35.9. Порівняйте числа:
1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{84}$; 2) $0{,}2\sqrt{1\frac{3}{8}}$ і $0{,}4\sqrt{\frac{11}{32}}$.

35.10. Порівняйте числа:
1) $\frac{3}{4}\sqrt{48}$ і $\frac{3}{5}\sqrt{75}$; 2) $0{,}3\sqrt{1\frac{4}{9}}$ і $0{,}2\sqrt{1\frac{3}{4}}$.

35.11. Знайдіть область значень функції $y = \sqrt{x}$, якщо:
1) $0 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 9$.

35.12. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$.

35.13. Розв'яжіть графічно рівняння $3 - 2x = \sqrt{x}$.

4 **35.14.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x - 2, & \text{якщо } x < 4, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 4; \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$.

35.15. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 1; \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$.

Вправи для повторення

35.16. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = \dfrac{2}{3}$; 2) $\sqrt{x} = -5$; 3) $x^2 = 16$; 4) $x^2 = -1$.

35.17. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{c^5}$; 2) $\sqrt{3b^{10}}$, якщо $b < 0$.

35.18. Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}\right)^2$.

Життєва математика

35.19. Оператор мобільного зв'язку пропонує для використання 4G-інтернету такі тарифні плани (див. таблицю).

Тарифний план	Абонентська плата	Плата за трафік
План «0»	Немає	0,1 грн за 1 Мб
План «500»	40 грн за 500 Мб трафіку на місяць	0,08 грн за 1 Мб понад 500 Мб
План «1000»	70 грн за 1000 Мб трафіку на місяць	0,06 грн за 1 Мб понад 1000 Мб
План «Безліміт»	100 грн	–

Наталя передбачає, що її трафік становитиме 700 Мб на місяць, і з огляду на це вибирає найдешевший тарифний план. Скільки Наталя заплатить за місяць, якщо її трафік дійсно становитиме 700 Мб?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

35.20. Обчисліть

$$13\frac{1}{1997} \cdot 20\frac{1973}{2000} - 6\frac{1991}{2000} \cdot 4\frac{3}{1997} + \frac{3}{400}.$$

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 7 (§§ 29–35)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y, що відповідає значенню $x = -3$.

А. 6 **Б.** −6 **В.** 9 **Г.** −9

2. Укажіть вираз, що не має змісту.

А. $\sqrt{17}$ **Б.** $\sqrt{-4}$ **В.** $\sqrt{0}$ **Г.** $\sqrt{16}$

3. Укажіть число, що є ірраціональним.

А. $\sqrt{25}$ **Б.** $\sqrt{\frac{9}{16}}$ **В.** 5 **Г.** $\sqrt{5}$

2

4. Обчисліть $5\sqrt{0,16} - 2\sqrt{1\frac{9}{16}}$.

А. −0,5 **Б.** 0,5 **В.** 4,5 **Г.** −2,325

5. Розв'яжіть рівняння $x^2 = 36$.

А. 6 **Б.** −6; 6 **В.** 18 **Г.** Розв'язків немає

6. Скоротіть дріб $\frac{2\sqrt{3}+3}{7\sqrt{3}}$.

А. $\frac{5}{7}$ **Б.** $\frac{2\sqrt{3}+1}{7}$ **В.** $\frac{2+\sqrt{3}}{7}$ **Г.** $\frac{2-\sqrt{3}}{7}$

3

7. Укажіть нерівність, що є правильною.

А. $\frac{2}{3}\sqrt{27} > \sqrt{13}$ **Б.** $\frac{1}{2}\sqrt{48} < \frac{1}{9}\sqrt{108}$

В. $0,1\sqrt{120} < \frac{1}{5}\sqrt{15}$ **Г.** $\frac{2}{5}\sqrt{125} > 0,2\sqrt{300}$

8. Розв'яжіть рівняння $3\sqrt{\frac{x}{4}} - 6 = 0$.

А. 64 **Б.** 16
В. 1 **Г.** 8

9. Винесіть множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{7a^{10}}$, коли відомо, що $a < 0$.

А. $-a^5\sqrt{7}$ **Б.** $a^5\sqrt{7}$ **В.** $a^{10}\sqrt{7}$ **Г.** $-a\sqrt{7}$

4

10. Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{13}-12)^2} + \sqrt{(\sqrt{13}-2)^2}$.

А. $2\sqrt{13} - 14$ **Б.** 14 **В.** 10 **Г.** $2\sqrt{13} - 10$

11. Укажіть усі такі значення a, для яких рівняння $ax^2 = -9$ має два різних дійсних корені.

А. $a > 0$ **Б.** $a \geqslant 0$ **В.** $a < 0$ **Г.** $a \leqslant 0$

12. Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2$.

А. 20 **Б.** 18 **В.** 17 **Г.** 16

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

2 **13. Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г).**

Вираз	*Значення виразу*
1. $(\sqrt{17}-\sqrt{2})(\sqrt{17}+\sqrt{2})$	**А.** 12
2. $(\sqrt{27}-\sqrt{3})^2$	**Б.** 13
3. $(\sqrt{3}+\sqrt{10})^2-2\sqrt{30}$	**В.** 14
	Г. 15

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 29–35

1 **1.** Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y, яке відповідає значенню $x = -4$; 7.

2. Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{-4}$; 3) $\sqrt{0}$; 4) $\sqrt{3,7}$?

3. Із чисел 2; $1\frac{4}{5}$; -8; $\sqrt{3}$; 5; 0; $-\sqrt{8}$; $-2\frac{1}{3}$ випишіть:

1) натуральні числа; 2) цілі недодатні числа;
3) раціональні додатні числа; 4) ірраціональні числа.

2 **4.** Обчисліть:

1) $\sqrt{2\frac{14}{25}}-10\sqrt{0,04}$; 2) $(-3\sqrt{5})^2$;

3) $\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{1,6}$; 4) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1,5}}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=\frac{3}{4}$; 2) $\sqrt{x}=-1$; 3) $x^2=9$; 4) $x^2=-4$.

6. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-3}{x+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{4\sqrt{7}+7}{5\sqrt{7}}$.

3 **7.** Порівняйте числа:

1) $\frac{3}{5}\sqrt{50}$ і $\frac{2}{5}\sqrt{75}$; 2) $0,2\sqrt{2\frac{3}{8}}$ і $0,4\sqrt{\frac{19}{32}}$.

8. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{b^7}$; 2) $\sqrt{5m^6}$, якщо $m < 0$.

4 **9.** Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$.

Додаткові завдання

4 **10.** Побудуйте графік функції $y=\begin{cases}6-x, & \text{якщо } x<4;\\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 4.\end{cases}$

11. Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{7}-13)^2}+\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 7

До § 29

1 **1.** Укажіть область визначення та область значень функції $y = x^2$.

2 **2.** Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

3 **3.** Побудуйте графік функції, що задає залежність площі квадрата S (у см^2) від довжини його сторони a (у см). Якою є область визначення цієї функції?

4. 1) Як зміниться площа квадрата, якщо кожну його сторону збільшити в 3 рази; зменшити в 9 разів?

2) Як треба змінити кожну сторону квадрата, щоб його площа збільшилася в 4 рази; зменшилась у 25 разів?

5. Точка A $(m;\ n)$, де $m \neq 0$, $n \neq 0$, належить графіку функції $y = x^2$. Чи належить цьому графіку точка:

1) B $(m;\ -n)$;

2) C $(-m;\ n)$;

3) D $(-m;\ -n)$?

6. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = x + 6$ і знайдіть координати точок їх перетину.

4 **7.** Побудуйте графік функції:

1) $y=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } x\leqslant 1,\\ 2-x, & \text{якщо } x>1;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}6+x, & \text{якщо } x<-2,\\ x^2, & \text{якщо } -2\leqslant x\leqslant 2,\\ \dfrac{8}{x}, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$

До § 30

1 **8.** Доведіть, що:

1) $\sqrt{0,49}=0,7$; 2) $\sqrt{2500}=50$.

2 **9.** Обчисліть:

1) $\sqrt{49}$; 2) $\sqrt{2601}$; 3) $\sqrt{5,76}$;

4) $\sqrt{\dfrac{25}{36}}$; 5) $\sqrt{10,89}+\sqrt{0,01}-3,2$; 6) $\sqrt{6\dfrac{1}{4}}-2\sqrt{1,44}+0,9$.

10. Знайдіть значення виразу $\sqrt{2x-8y}$, якщо:

1) $x = 1{,}6,\ y = 0{,}4$; 2) $x = 0{,}08,\ y = -0{,}3$.

3 **11.** Обчисліть:

1) $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{0,09}+0,78\sqrt{100}\right)(\sqrt{2,25}+2\sqrt{30,25})$;

2) $\left(-7\sqrt{\dfrac{4}{49}}+3\sqrt{5,29}\right):(\sqrt{5^2+12^2}-\sqrt{65,61})$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5x}+3=13$; 2) $\dfrac{1}{3}\sqrt{x-1}=1,2$.

4 **13.** Для яких значень x має зміст вираз:

1) $\sqrt{x-2}$; 2) $\sqrt{(x-3)^5}$; 3) $\dfrac{\sqrt{-x}}{x+1}$; 4) $\sqrt{x}+\sqrt{-x}$?

14. Розв'яжіть рівняння відносно змінної x для всіх можливих значень a:

1) $a\sqrt{x}=0$; 2) $a\sqrt{x}=1$; 3) $a\sqrt{x-1}=5$; 4) $\sqrt{ax}=0$.

До § 31

1 **15.** Раціональним чи ірраціональним є дане число? Раціональне число запишіть без знака кореня:

1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $-\sqrt{4}$; 4) $\sqrt{13}$.

2 **16.** Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу число:

1) $\dfrac{1}{3}$; 2) -29; 3) $5{,}17$; 4) $\dfrac{7}{27}$.

17. Між якими двома послідовними натуральними числами міститься число:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{99}$; 4) $\sqrt{20}$?

3 **18.** Чи правильно, що:

1) різниця двох цілих від'ємних чисел – число ціле від'ємне;
2) добуток двох раціональних чисел – число раціональне;
3) сума кубів двох цілих чисел – число натуральне;
4) сума квадратів двох цілих чисел – число ціле невід'ємне?

19. Укажіть два раціональних числа, що лежать між числами:

1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{7}$; 2) $-\sqrt{13}$ і $-\sqrt{11}$.

4 **20.** Доведіть, що не існує раціонального числа, що є розв'язком рівняння $x^2 = 7$.

21. Доведіть, що:

1) $\frac{1}{2} + 0,1(6) = \frac{2}{3}$; 2) $0,8(3) - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$.

До § 32

1 **22.** Чи є правильною рівність:

1) $(\sqrt{19})^2 = 19$; 2) $(\sqrt{17})^2 = 17^2$;

3) $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5}$; 4) $(\sqrt{0,1})^2 = 0,1$?

2 **23.** Обчисліть:

1) $\left(-\sqrt{8}\right)^2$; 2) $\sqrt{13} \cdot (-\sqrt{13})$; 3) $\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)^2$; 4) $\left(-0,1\sqrt{10}\right)^2$;

5) $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2$; 6) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$; 7) $\left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$; 8) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2$.

24. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2}x^2 = 32$; 2) $x^2 - 5 = 0$;

3) $2x^2 = 18$; 4) $49x^2 = 1$.

3 **25.** Складіть рівняння, коренями якого є числа:

1) 5 і –5; 2) 0,1 і –0,1; 3) $-\frac{1}{4}$ і $\frac{1}{4}$;

4) $-\frac{3}{7}$ і $\frac{3}{7}$; 5) $\sqrt{7}$ і $-\sqrt{7}$; 6) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

26. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}}{9}$; 2) $\left(\sqrt{\sqrt{7}}\right)^2$; 3) $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^4$.

27. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{8}(x-1)^2 = \frac{1}{2}$; 2) $\frac{(x+2)^2}{5} = \frac{16}{5}$.

4 **28.** Відомо, що $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$. Знайдіть $x + y$.

29. Для яких значень m рівняння $x^2 = m - 1$:

1) має два корені;

2) має тільки один корінь;

3) не має коренів?

До § 33

1 **30.** Для яких значень змінних рівність є тотожністю:

1) $\sqrt{m \cdot n} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}$; 2) $\sqrt{\dfrac{p}{q}} = \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$?

2 **31.** Обчисліть:

1) $\sqrt{\dfrac{0,36 \cdot 49}{121}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{25 \cdot 100}{81}}$;

3) $\sqrt{\dfrac{1}{16} \cdot \dfrac{9}{25}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{64}{9} \cdot \dfrac{4}{289}}$.

32. Обчисліть:

1) $\sqrt{a^2}$, якщо $a = 13$; -17; 2) $-2\sqrt{x^2}$, якщо $x = 0,5$; $-2,1$.

33. Відомо, що $37^2 = 1369$. Знайдіть:

1) $\sqrt{136\ 900}$; 2) $\sqrt{13,69}$; 3) $\sqrt{0,1369}$.

34. У скільки разів сторона квадрата, площа якого дорівнює 12 см^2, більша за сторону квадрата, площа якого дорівнює 3 см^2?

3 **35.** Обчисліть:

1) $\sqrt{4\dfrac{1}{20}} \cdot \sqrt{2\dfrac{2}{9}} - (\sqrt{7})^2$; 2) $\sqrt{1 - \left(\dfrac{8}{17}\right)^2} + \left(-\sqrt{\dfrac{2}{17}}\right)^2$;

3) $\sqrt{1 - \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2} - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2$; 4) $\sqrt{2\dfrac{1}{5}} \cdot \sqrt{1\dfrac{1}{11}} \cdot \sqrt{2\dfrac{2}{5}} + \left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^2 - (\sqrt{3})^2$.

36. Відношення площ двох кругів дорівнює $\dfrac{4}{9}$, а радіус одного з них дорівнює 10 см. Знайдіть радіус іншого.

37. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{3,6 \cdot 10^5}$; 2) $\sqrt{8,1 \cdot 0,1^3}$;

3) $3\sqrt{15} \cdot 2\sqrt{30} \cdot \sqrt{8}$; 4) $\sqrt{3^5 \cdot 12^3}$.

38. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{p^4c^8a^{12}}$; 2) $\sqrt{49(-x)^2y^6}$, якщо $x < 0$, $y > 0$;

3) $\sqrt{\dfrac{m^{20}}{n^{24}}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{a^{10}}{b^{14}}}$, якщо $a < 0$, $b < 0$.

39. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt{0,16^2}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{(-0,09)^2}}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{11} - \sqrt{13})^2}$.

4 **40.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{x^2-14x+49}{(x+2)^2}\sqrt{\dfrac{x^2+4x+4}{(x-7)^2}}$, якщо $x > 7$;

2) $\dfrac{p^2-4}{(p+3)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{p^2+6p+9}{(p+2)^2}}$, якщо $p < -3$.

41. Доведіть, що:

1) $\sqrt{16+6\sqrt{7}}+\sqrt{23-8\sqrt{7}}=7$;

2) $\sqrt{15+4\sqrt{11}}-\sqrt{20-6\sqrt{11}}=5$.

До § 34

1 **42.** Виконайте дії:

1) $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}$; 2) $5\sqrt{11}-\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}$; 4) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$.

2 **43.** Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{7}-\sqrt{12})(\sqrt{7}+3\sqrt{3})$; 2) $(\sqrt{3}-\sqrt{11})(\sqrt{33}+1)$;

3) $4\sqrt{2}(2-7\sqrt{8})-7\sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{5}+1)(2-\sqrt{5})-\sqrt{5}$;

5) $(\sqrt{3}-7)(4-\sqrt{3})-11\sqrt{3}$; 6) $(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+1$.

3 **44.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{28x^9}$; 2) $\sqrt{\dfrac{7m^3}{36}}$;

3) $\sqrt{25a^2b^5}$, якщо $a < 0$; 4) $\sqrt{8x^3y^{10}}$, якщо $y > 0$;

5) $\sqrt{-8p^7}$; 6) $\sqrt{x^3y^3}$, якщо $x < 0$, $y < 0$.

45. Зведіть вираз до вигляду $a\sqrt{b}$, де b – ціле число:

1) $\sqrt{\dfrac{1}{7}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; 3) $\sqrt{4\dfrac{1}{3}}$; 4) $\sqrt{5\dfrac{1}{2}}$.

4 **46.** Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$; 2) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

47. Доведіть, що рівність є правильною:

1) $\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2}+5=\sqrt{27+10\sqrt{2}}$.

48. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}$; 2) $\dfrac{x+y+\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}}$.

49. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

50. Доведіть, що $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ – число натуральне.

51. Внесіть множник під знак кореня та спростіть отриманий вираз:

1) $(x+2)\sqrt{\dfrac{3}{x^2+4x+4}}$, якщо $x > -2$;

2) $(a-b)\sqrt{\dfrac{1}{a^2-2ab+b^2}}$, якщо $a < b$;

3) $p(p+1)\sqrt{\dfrac{7}{p^2+2p+1}}$, якщо $p < -1$;

4) $(b-3)\sqrt{\dfrac{1}{6-2b}}$.

До § 35

1 **52.** Чи можна обчислити значення функції $y=\sqrt{x}$ для значень $x=4$; $x=-1$; $x=100$; $x=-9$?

2 **53.** Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x}$, якщо:
1) $0 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $1 \leqslant x \leqslant 9$; 3) $4 \leqslant x \leqslant 16$.

3 **54.** Чи перетинається графік функції $y=\sqrt{x}$ з прямою:
1) $y=1$; 2) $y=8$; 3) $y=0$; 4) $y=-1$?
Якщо перетинається, то в якій точці?

55. Розташуйте в порядку зростання числа:

1) $\sqrt{19,1}$; 3; $\sqrt{16,2}$; 4; $\sqrt{14}$; 2) $\dfrac{1}{4}$; $\sqrt{0,1}$; $0,2$; $\sqrt{\dfrac{1}{11}}$.

4 **56.** Для яких значень x справджується нерівність:
1) $\sqrt{x} \geqslant 1$; 2) $\sqrt{x} < 2$; 3) $1 < \sqrt{x} \leqslant 4$;
4) $9 \leqslant \sqrt{x} < 100$; 5) $\sqrt{x} > -1$; 6) $\sqrt{x} \leqslant -2,5$?

Головне в темі 7

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y = x^2$

1. Область визначення функції складається з усіх чисел.
2. Область значень функції складається з усіх невід'ємних чисел, тобто $y \geqslant 0$.
3. Графіком функції є парабола з вершиною в точці (0; 0), гілки якої напрямлені вгору. Усі точки графіка, крім вершини параболи, лежать вище від осі абсцис.
4. Протилежним значенням аргументу відповідає одне й те саме значення функції.

АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ

Арифметичним квадратним коренем із числа a називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

Вираз $\sqrt{a}$ не має змісту, якщо $a < 0$.

Для будь-якого $a \geqslant 0$ справджується тотожність

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

РІВНЯННЯ $\sqrt{x} = m$

$\sqrt{x} = m$, m – число

Якщо $m \geqslant 0$, то $x = m^2$

Якщо $m < 0$, то коренів немає

РАЦІОНАЛЬНІ, ІРРАЦІОНАЛЬНІ ТА ДІЙСНІ ЧИСЛА

Цілі числа і дробові числа утворюють множину ***раціональних чисел***.

Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$.

Числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, n – натуральне число, називають ***ірраціональними числами***.

РІВНЯННЯ $x^2 = a$

$x^2 = a$, a – число		
Якщо $a > 0$, то $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$	Якщо $a = 0$, то $x = 0$	Якщо $a < 0$, то коренів немає

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ для } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ для } a \geqslant 0,\ b > 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$$

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y = \sqrt{x}$

1. Областю визначення функції є множина всіх невід'ємних чисел: $x \geqslant 0$.
2. Областю значень функції є множина всіх невід'ємних чисел: $y \geqslant 0$.
3. Графік функції – гілка параболи, що виходить з точки (0; 0), усі інші точки графіка лежать у першій координатній чверті.
4. Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

ВОНА ВВАЖАЛА, ЩО СПРАВЕДЛИВІСТЬ ВАЖЛИВІША

Колишня вулиця Ломоносова в Києві тепер носить ім’я молодої дівчини-математика – Юлії Здановської.

Народилася Юлія 4 травня 2000 року в Харкові, у сім’ї програміста і фінансистки. Мама Юлії – співзасновниця благодійного фонду «Станція “Харків”», який з 2014 року допомагає постраждалим від війни. Їхня донька з юного віку проявляла здібності до точних наук. У шкільні роки брала участь у Всеукраїнських олімпіадах з математики та фізики. У 14 років переїхала до Києва, аби продовжувати навчання в Українському фізико-математичному ліцеї (УФМЛ) Київського національного університету імені Тараса Шевченка (КНУ). Окрім цього, після закінчення 10 класу Юлія стала викладачкою і тренеркою в літній школі з математики «Мудрамакітра», а також – у математичному гуртку «Кванта». Згодом цей гурток став не тільки платформою для вивчення математики, а й центром розвитку програмування для тих, хто бажав отримати більше знань, аніж передбачено шкільними програмами.

У 2017 році Юлія Здановська у складі української команди здобула срібну медаль на Європейській математичній олімпіаді серед дівчат із 44 країн світу.

Того самого року Юлія склала ЗНО з математики на 200 балів і вступила на спеціальність «Комп’ютерна математика» на механіко-математичний факультет КНУ.

По центру – Юлія Здановська

На другому курсі навчання Юлія була єдиною студенткою, котра отримала кваліфікацію для роботи в *Samsung R&D Institute Ukraine*. Талановитою, яскравою, чесною, порядною – такою пам'ятають Юлію Здановську викладачі КНУ. Професор кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики КНУ Богдан Рубльов, голова Всеукраїнської олімпіади з математики, розповідає: «Пам'ятаю, як на Всеукраїнській олімпіаді вона була 12-та в рейтингу і мала потрапити на відбір на міжнародну олімпіаду, про що всі мріють. За одну із задач їй поставили 7 балів, а вона прийшла на апеляцію і сказала, що в цій задачі журі помилилося, за критеріями в неї мало стояти 5 балів. Ми виправили, і вона стала 13-ю, не потрапивши туди, куди дуже-дуже мріяла». Хтось дивувався, хтось ледь не крутив пальцем біля скроні, але рудоволоса дівчина точно знала, що чинить правильно. Бо справедливість важливіша.

Закінчивши бакалаврат, Юлія Здановська ухвалила несподіване рішення. Дівчина, яку були б раді бачити серед своїх студентів найкращі університети світу, відмовилася вступати на магістерську програму і приєдналася до проєкту «Навчай для України» / *Teach For Ukraine*. Вона мріяла займатися реформою шкільної освіти і водночас розуміла, що для цього треба мати досвід навчання в середній школі. Тому дівчина поїхала викладати у школу на Дніпропетровщині. Найбільше Юля хотіла, щоб діти «кайфували від вивчення математики», тож планувала відкриття й гуртка робототехніки. Вона прагнула змінити українську систему освіти. «Не хочу бути професоркою в Гарварді, а от міністеркою освіти України стати згодна», – казала Юлія.

На кожному поверсі школи за її ініціативи поставили столи для гри в настільний теніс. Діти були просто в захваті, адже навіть не уявляли, що й учителька може грати разом з ними, та ще й дуже вправно. Тож у ліцеї регулярно вишиковувалися черги з учнів, охочих пограти з Юлією Янівною в настільний теніс. Вона була для них другом.

У лютому 2022 року дівчина приїхала до батьків у Харків. Тут і застала її війна, повномасштабне вторгнення росіян. Юлія одразу вирішила волонтерити у штабі оборони, що в обласній адміністрації. А на початку березня росіяни завдали ракетного удару саме по цьому приміщенню. Загинули до 30 людей. Серед полеглих була, на жаль, і Юлія Здановська. Напередодні друзям, які пропонували їй виїхати у безпечніші місця, дівчина подякувала й відписала, що залишиться у своєму рідному місті до перемоги.

«Коли помирає хтось такий, як Юлія, – це ніби помирає майбутнє», – сказала українська науковиця-математик Марина В'язовська під час отримання однієї з найпрестижніших нагород у математиці – премії Філдса.

У Києві за ініціативи студентів КНУ на честь Юлії Здановської назвали вулицю, прилеглу до студмістечка, яка раніше носила ім'я росіянина Михайла Ломоносова.

Для переможців і переможниць Міжнародного конкурсу з інформатики та комп'ютерної грамотності «Бербас» у Новій Зеландії нині встановлено Почесні відзнаки імені Юлії Здановської.

У пам’ять про Здановську факультет математики Массачусетського технологічного інституту (МІТ) – один з найкращих технологічних університетів у США та загалом у світі – організував безкоштовну освітню програму з математики «Мрія Юлії/*Yulia’s Dream*». У рамках цієї програми старшокласники і старшокласниці з України разом із наставниками з МІТ працюють над розв’язанням складних математичних завдань.

На факультеті математики та інформаційних технологій Ягеллонського університету в Польщі засновано стипендіальний фонд імені Юлії Здановської для талановитих студентів і студенток з України.

А заснований нею гурток «Кванта» і досі продовжує свою діяльність. У ньому молоді колеги Юлії допомагають учням та ученицям готуватися до олімпіад і вступу на профільні факультети. Навчальні методики Юлії досі застосовуються у процесі викладання.

Їй назавжди 21 рік. Ім’я Юлії Здановської стало символом сили, самопожертви та нескореності перед агресором.

ТЕМА 8

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** основні властивості прямокутних трикутників;
- **дізнаєтеся** про теорему Піфагора; синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника; властивості похилих та їх проєкцій;
- **навчитеся** знаходити співвідношення між сторонами й кутами прямокутного трикутника, розв'язувати прямокутні трикутники.

§ 36. Теорема Піфагора

1. Теорема Піфагора

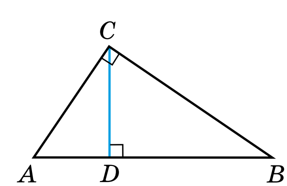
Розглянемо одну з найважливіших теорем геометрії, яка встановлює залежність між катетами та гіпотенузою прямокутного трикутника.

Теорема 1 (теорема Піфагора). **У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.**

На сьогодні відомо більше ніж сто доведень цієї теореми. Розглянемо одне з них.

Доведення. Нехай ABC – довільний прямокутний трикутник, у якого $\angle C = 90°$ (мал. 36.1). Доведемо, що

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$



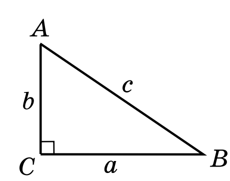
Мал. 36.1

1) Проведемо висоту CD.

2) За теоремою про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику, маємо: $AC^2 = AB \cdot AD$, $BC^2 = AB \cdot BD$.

3) Додамо почленно ці дві рівності. Матимемо: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB \cdot (AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2$.

4) Отже, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. ■



Мал. 36.2

Якщо позначити в $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (мал. 36.2), то теорему Піфагора можна записати формулою:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

За допомогою теореми Піфагора, знаючи дві сторони прямокутного трикутника, можна знайти третю.

У цьому нам допоможе така схема:

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\to\; a^2 = c^2 - b^2 \;\to\; a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\to\; b^2 = c^2 - a^2 \;\to\; b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\to\; c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. Розв'язування задач за допомогою теореми Піфагора

Приклад 1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайти гіпотенузу.

Розв'язання. Нехай $a = 7$ см, $b = 24$ см, тоді

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$ (см).

Відповідь: 25 см.

Приклад 2. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 17 см, а один з катетів – 15 см. Знайти другий катет.

Розв'язання. Нехай $a = 15$ см, $c = 17$ см, тоді

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{(17-15)(17+15)} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$ (см).

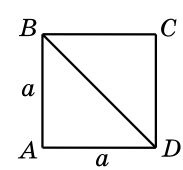
Відповідь: 8 см.

Приклад 3. Знайти діагональ квадрата, сторона якого дорівнює a.

Розв'язання. Розглянемо квадрат $ABCD$, у якого $AB =$ $= AD = a$ (мал. 36.3). Тоді

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

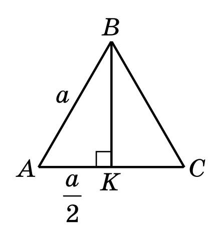
Відповідь: $a\sqrt{2}$. ■



Мал. 36.3

Приклад 4. Знайти медіану рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює a.

Розв'язання. Розглянемо рівносторонній трикутник зі стороною a, BK – медіана цього трикутника (мал. 36.4).



Мал. 36.4

1) Оскільки BK – медіана рівностороннього трикутника, то вона є також і висотою.

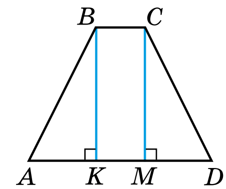
2) У $\triangle ABK$: $\angle K = 90°$, $AB = a$, $AK = \frac{a}{2}$. Тоді

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. ■

Приклад 5. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 22 см, а бічна сторона – 13 см. Знайти висоту трапеції.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $AD \parallel BC$, $AD = 22$ см, $BC = 12$ см, $AB = CD = 13$ см (мал. 36.5).



Мал. 36.5

1) Проведемо висоти BK і CM.

2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою), тому

$$AK = MD = \frac{AD - KM}{2} = \frac{AD - BC}{2} = \frac{22 - 12}{2} = 5 \text{ (см)}.$$

3) Із $\triangle ABK$, за теоремою Піфагора, маємо:

$$BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 12 см.

Приклад 6. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а інший на 2 см менший від гіпотенузи. Знайти невідомий катет трикутника.

Розв'язання. Нехай $a = 8$ см і $b = x$ см – катети трикутника, тоді $c = (x + 2)$ см – його гіпотенуза.

Оскільки, за теоремою Піфагора, $c^2 = a^2 + b^2$, маємо рівняння: $(x + 2)^2 = 8^2 + x^2$, звідки $x = 15$ (см).

Отже, невідомий катет дорівнює 15 см.

Відповідь: 15 см.

3. Теорема, обернена до теореми Піфагора

Справджується й твердження, обернене до теореми Піфагора.

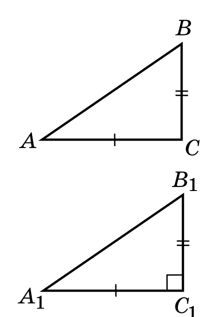
Т Теорема 2 (обернена до теореми Піфагора). **Якщо у трикутнику ABC має місце рівність $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то кут C цього трикутника – прямий.**

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Доведемо, що $\angle C = 90°$ (мал. 36.6).

1) Розглянемо $\triangle A_1B_1C_1$, у якого $\angle C_1 = 90°$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. Тоді, за теоремою Піфагора, $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, а отже, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$.

2) Але, за умовою, $AC^2 + BC^2 = AB^2$, тому $A_1B_1^2 = AB^2$, тобто $A_1B_1 = AB$.

3) Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за трьома сторонами), звідки $\angle C = \angle C_1 = 90°$. ■



Мал. 36.6

Оскільки $5^2 = 3^2 + 4^2$, то трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 є прямокутним. Такий трикутник часто називають *єгипетським*, оскільки про те, що він прямокутний, було відомо ще давнім єгиптянам.

Трійку цілих чисел, що задовольняє теорему Піфагора, називають *піфагоровою трійкою чисел*, а трикутник, для якого вона є довжинами сторін, – *піфагоровим трикутником*. Наприклад, піфагоровою є не тільки трійка чисел 3, 4, 5, а й 7, 24, 25 або 9, 40, 41 тощо.

Зауважимо, що з теореми Піфагора та теореми, оберненої до неї, слідує, що

трикутник є прямокутним тоді й тільки тоді, коли квадрат найбільшої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін.

Приклад 7. Чи є прямокутним трикутник зі сторонами:
1) 6, 8, 10; 2) 5, 7, 9?

Розв'язання. 1) Оскільки $10^2 = 6^2 + 8^2$ ($100 = 100$), то трикутник є прямокутним.

2) Оскільки $9^2 \neq 5^2 + 7^2$ ($81 \neq 74$), то трикутник не є прямокутним.

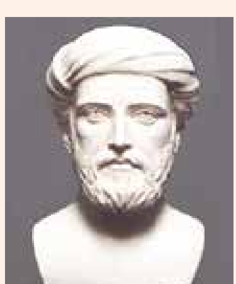
Відповідь: 1) так; 2) ні.

А ще раніше...

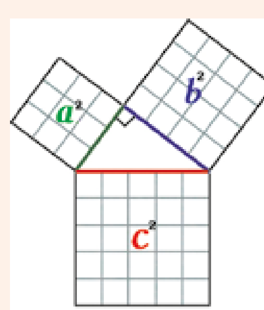
Теорема, яку названо на честь давньогрецького філософа та математика Піфагора, була відома задовго до нього. У текстах давніх вавилонян про неї згадувалося ще за 1200 років до Піфагора. Мабуть, доводити цю теорему вавилоняни не вміли, а залежність між катетами та гіпотенузою прямокутного трикутника встановили дослідним шляхом. Також ця теорема була відома в Давньому Єгипті та Китаї.

Вважають, що Піфагор – перший, хто запропонував строге доведення теореми. Формулювання в Піфагора було таким: «Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах». Саме в такому формулюванні теорему й довів Піфагор.

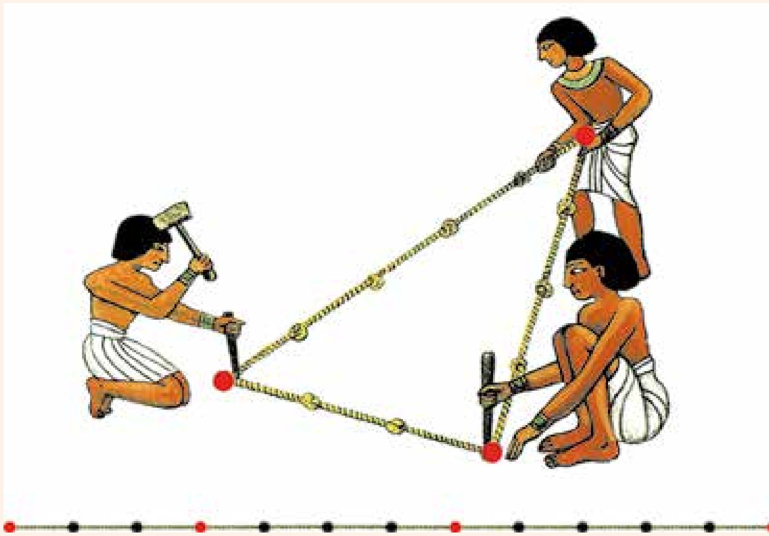
Малюнок до цього доведення ще називають «піфагоровими штанями».



Піфагор
(бл. 580–500 рр. до н. е.)



Знаючи, що трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 є прямокутним, землеміри Давнього Єгипту використовували його для побудови прямого кута. Мотузку ділили вузлами на 12 рівних частин, а її кінці з'єднували. Потім за допомогою кілків мотузку розтягували на землі у вигляді трикутника зі сторонами 3, 4 і 5. Тоді навпроти сторони 5 кут буде прямим.



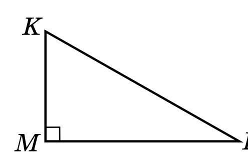
Сформулюйте й доведіть теорему Піфагора. ○ Сформулюйте теорему, обернену до теореми Піфагора. ○ Який трикутник називають єгипетським? ○ Які трійки чисел і трикутники називають піфагоровими?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

36.1. (*Усно.*) $\triangle MKL$ – прямокутний, $\angle M = 90°$ (мал. 36.7). Які з рівностей правильні:

1) $KM^2 = ML^2 - KL^2$;
2) $KL^2 = ML^2 + KM^2$;
3) $ML^2 = KL^2 + KM^2$;
4) $KM^2 = KL^2 - ML^2$;
5) $KL^2 = ML^2 - KM^2$;
6) $ML^2 = KL^2 - KM^2$?



Мал. 36.7

36.2. $\triangle EFP$ – прямокутний, $\angle P = 90°$. Заповніть пропуски:
1) $EF^2 = \ldots^2 + \ldots^2$;   2) $EP^2 = \ldots^2 - \ldots^2$.

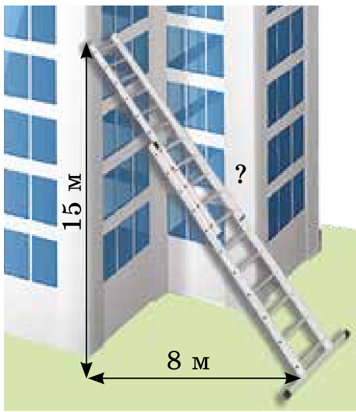
36.3. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:
1) 6 см і 8 см;   2) 12 см і 35 см.

36.4. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:
1) 5 см і 12 см;   2) 8 см і 15 см.

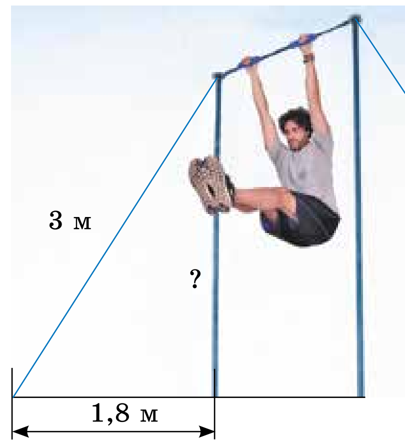
36.5. Знайдіть невідомий катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють:
1) 17 см і 8 см;   2) 26 см і 10 см.

36.6. Знайдіть невідомий катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють:
1) 25 см і 7 см;   2) 41 см і 40 см.

36.7. Пожежну драбину приставлено до вікна, розміщеного на висоті 15 м від землі (мал. 36.8). Нижній кінець драбини віддалений від стіни будинку на 8 м. Яка довжина драбини?



Мал. 36.8



Мал. 36.9

36.8. Стовп гімнастичної трапеції укріплений за допомогою троса завдовжки 3 м так, що його нижній кінець віддалений від основи стовпа на 1,8 м (мал. 36.9). Яка висота стовпа?

2

36.9. Дві більші сторони прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть його найменшу сторону.

36.10. Дві менші сторони прямокутного трикутника дорівнюють 2 см і 3 см. Знайдіть його найбільшу сторону.

36.11. Сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть його діагональ.

36.12. Діагональ прямокутника дорівнює 13 см, а одна з його сторін – 12 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.

36.13. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а висота, проведена до основи, – 12 см. Знайдіть основу трикутника.

36.14. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а висота, проведена до основи, – 15 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

36.15. Діагоналі ромба дорівнюють 24 см і 70 см. Знайдіть сторону ромба.

36.16. Сторона ромба дорівнює 13 см, а одна з діагоналей – 10 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

36.17. Діагональ квадрата дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть його сторону.

36.18. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 8 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до більшого катета.

36.19. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 9 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до меншого катета.

36.20. З точки A до кола із центром O проведено дотичну, B – точка дотику. Знайдіть довжину відрізка AO, якщо $OB = 2$ см, $AB = 7$ см.

36.21. З точки M до кола із центром O проведено дотичну, P – точка дотику. Знайдіть довжину відрізка PM, якщо $OP = 3$ см, $OM = 6$ см.

36.22. Чи є прямокутним трикутник зі сторонами:
1) 15, 20, 25; 2) 4, 5, 6?

36.23. Чи є прямокутним трикутник зі сторонами:
1) 5, 6, 9; 2) 16, 30, 34?

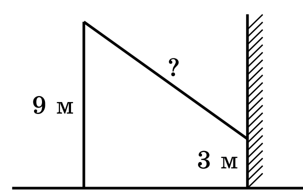
36.24. У колі, радіус якого дорівнює 13 см, проведено хорду 10 см завдовжки. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди.

36.25. У колі проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від центра кола до хорди дорівнює 6 см.

36.26. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 6 см. Знайдіть третю сторону (розгляньте всі випадки).

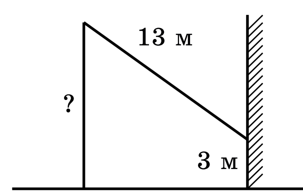
36.27. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 2 см. Знайдіть третю сторону (розгляньте всі випадки).

36.28. Від стовпа 9 м заввишки до будинку натягнуто провід (мал. 36.10), що кріпиться на висоті 3 м від землі. Відстань від будинку до стовпа – 8 м. Обчисліть довжину проводу.



Мал. 36.10

36.29. Від стовпа до будинку натягнуто дріт 13 м завдовжки (мал. 36.11), який закріплено на стіні будинку на висоті 3 м від землі. Обчисліть висоту стовпа, якщо відстань від будинку до стовпа – 12 м.

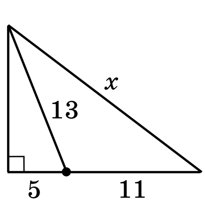


Мал. 36.11

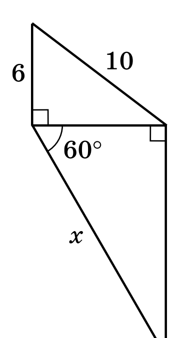
36.30. Катети прямокутного трикутника відносяться як 7 : 24, а гіпотенуза дорівнює 50 см. Знайдіть периметр трикутника.

36.31. Катет відноситься до гіпотенузи як 8 : 17. Знайдіть периметр трикутника, якщо другий катет дорівнює 30 см.

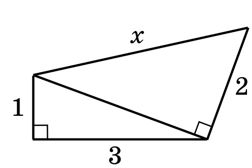
36.32. Знайдіть довжину невідомого відрізка x на малюнках 36.12–36.15.



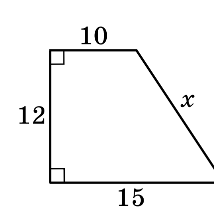
Мал. 36.12



Мал. 36.13

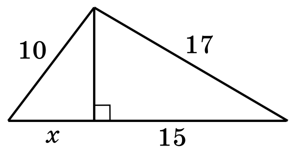


Мал. 36.14

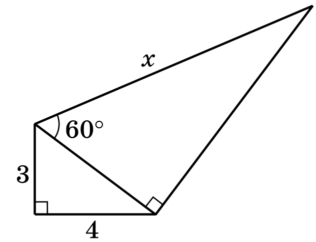


Мал. 36.15

36.33. Знайдіть довжину невідомого відрізка x на малюнках 36.16 і 36.17.



Мал. 36.16



Мал. 36.17

36.34. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а другий на 2 см менший від гіпотенузи. Знайдіть периметр трикутника.

36.35. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а гіпотенуза на 1 см більша за другий катет. Знайдіть периметр трикутника.

36.36. У трикутнику ABC кут A тупий, $BC = 39$ см, $AB = 17$ см. BK – висота трикутника, $BK = 15$ см. Знайдіть AC.

36.37. BK – висота трикутника ABC, у якого $\angle C$ – тупий. $AB = 20$ см, $BC = 13$ см, $CK = 5$ см. Знайдіть AC.

36.38. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 5 см і поділяє її на два відрізки так, що прилеглий до вершини рівнобедреного трикутника відрізок дорівнює 12 см. Знайдіть основу трикутника.

36.39. Висота BK рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) ділить сторону AC на відрізки $AK = 24$ см і $KC = 1$ см. Знайдіть основу трикутника.

4

36.40. Знайдіть сторони паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 10 см й одна з них перпендикулярна до сторони.

36.41. Радіус кола, описаного навколо тупокутного рівнобедреного трикутника, дорівнює 37 см, а його основа – 70 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

36.42. Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до основи, дорівнює 18 см, а радіус кола, описаного навколо нього, – 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

36.43. Побудуйте відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{13}$ см.

36.44. Побудуйте відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{10}$ см.

36.45. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 10 см і 26 см завдовжки. Знайдіть периметр трикутника.

36.46. Бісектриса прямого кута трикутника ділить гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть периметр трикутника.

36.47. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить катет на відрізки 2 см і 10 см. Знайдіть периметр трикутника.

36.48. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні й дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

36.49. Рівнобічну трапецію з основами a і b описано навколо кола. Доведіть, що її висота дорівнює $\sqrt{ab}$.

36.50. Відношення бічної сторони до основи рівнобедреного трикутника дорівнює 5 : 8, а різниця відрізків, на які бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи, дорівнює 3 см. Знайдіть периметр трикутника.

36.51. Бічна сторона рівнобедреного трикутника на 5 см менша від основи. Відрізки, на які бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи, відносяться як 5 : 3. Знайдіть висоту трикутника.

Вправи для повторення

36.52. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°. Знайдіть медіану цього трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо сума гіпотенузи й меншого катета дорівнює 18 см.

36.53. Коло радіуса 3 см вписано в ромб. Один з відрізків, на які точка дотику ділить сторону ромба, дорівнює 9 см. Знайдіть периметр ромба.

36.54. Трапецію вписано в коло так, що діаметр кола є її більшою основою, а відношення основ дорівнює 2 : 1. Знайдіть кути трапеції.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

36.55. Побудуйте пряму m та точку A на відстані 2 см від прямої m і точку B на відстані 3 см від прямої m.

36.56. Побудуйте пряму a та позначте точку B, яка їй не належить.
1) Побудуйте перпендикуляр BK до прямої a.
2) Побудуйте відрізок BM, де M – деяка точка прямої a.
3) Порівняйте довжини відрізків BK і BM.

36.57. Побудуйте паралельні прямі, відстань між якими дорівнює 2 см.

Життєва математика

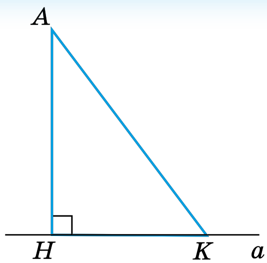
36.58. Потрібно пофарбувати стелю у двох тренажерних залах: один з них квадратної форми зі стороною 3,5 м, а другий – прямокутної, його розміри 4,5 м × 4 м. Для фарбування 1 м^2 стелі витрачають 240 г фарби. Фарба продається в банках по 2,5 кг. Яку найменшу кількість банок фарби потрібно придбати?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

36.59. Чи можна розмістити на площині 6 точок так, щоб будь-які три з них були вершинами рівнобедреного трикутника?

§ 37. Перпендикуляр і похила, їх властивості

1. Перпендикуляр і похила



AH – **перпендикуляр**, проведений з точки A до прямої a.

Точка H – **основа перпендикуляра** AH,
відрізок AK – **похила**,
точка K (відмінна від H) – **основа похилої**,
відрізок HK – **проєкція похилої** AK **на пряму** a.

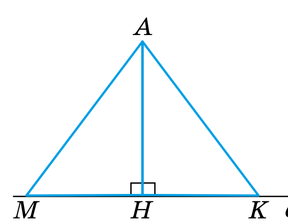
2. Властивості перпендикуляра та похилої

Розглянемо *властивості перпендикуляра та похилої*.

1. Перпендикуляр, проведений з точки до прямої, менший від будь-якої похилої, проведеної із цієї точки до цієї прямої.

Дійсно, у прямокутному трикутнику AHK (мал. вище) AH – катет, AK – гіпотенуза. Тому $AH < AK$.

2. Якщо дві похилі, проведені з точки до прямої, між собою рівні, то рівні між собою і їхні проєкції.



Мал. 37.1

Нехай з точки A до прямої a проведено похилі AK і AM ($AK = AM$) і перпендикуляр AH (мал. 37.1). Тоді $\triangle AHK = \triangle AHM$ (за катетом і гіпотенузою), а тому $HK = HM$.

Правильним є також і обернене твердження.

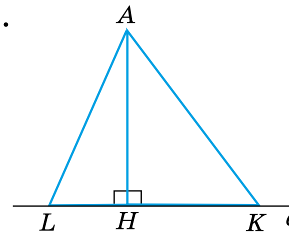
3. Якщо проєкції двох похилих, проведених з точки до прямої, між собою рівні, то рівні між собою і самі похилі.

$\triangle AHK = \triangle AHM$ (за двома катетами), тому $AK = AM$ (мал. 37.1).

4. З двох похилих, проведених з точки до прямої, більшою є та, у якої більша проєкція.

Нехай AK і AL – похилі, $HK > HL$ (мал. 37.2).
Тоді $AK^2 = AH^2 + HK^2$ (з $\triangle AHK$),
$AL^2 = AH^2 + HL^2$ (з $\triangle AHL$).
Але $HK > HL$, тому $AK^2 > AL^2$. Отже, $AK > AL$.

Властивість справджується й у тому разі, коли точки K і L розміщені по один бік від точки H.



Мал. 37.2

Правильним є також і обернене твердження.

5. З двох похилих, проведених з точки до прямої, більша похила має більшу проєкцію.

Нехай AK і AL – похилі, $AK > AL$ (мал. 37.2).
Тоді $HK^2 = AK^2 - AH^2$ (з $\triangle AHK$),
$HL^2 = AL^2 - AH^2$ (з $\triangle AHL$).
Але $AK > AL$, тому $HK^2 > HL^2$. Отже, $HK > HL$.

Приклад 1. З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з них дорівнює 10 см, а її проєкції – 6 см. Знайти довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 30°.

Розв'язання. Нехай на малюнку 37.2 $AL = 10$ см, $HL = 6$ см, $\angle AKH = 30°$.

1) Із $\triangle AHL$: $AH = \sqrt{AL^2 - LH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

2) Із $\triangle AHK$, за властивістю катета, що лежить проти кута 30°, матимемо: $AH = \dfrac{AK}{2}$.

Тому $AK = 2 \cdot AH = 2 \cdot 8 = 16$ (см).

Відповідь: 16 см.

Приклад 2. З точки до прямої проведено дві похилі, проєкції яких дорівнюють 30 см і 9 см. Знайти довжини похилих, якщо їхня різниця дорівнює 9 см.

Розв'язання. Нехай на малюнку 37.2 $KH = 30$ см, $HL = 9$ см.

1) За властивістю 4: $AK > AL$. Позначимо $AL = x$ см. Тоді $AK = (x + 9)$ см.

2) Із $\triangle AHL$: $AH^2 = AL^2 - LH^2$, тому $AH^2 = x^2 - 9^2$.
Із $\triangle AHK$: $AH^2 = AK^2 - HK^2$, тому $AH^2 = (x + 9)^2 - 30^2$.

3) Ліві частини отриманих рівностей рівні. Отже, рівні і праві їхні частини.
Маємо рівняння: $(x + 9)^2 - 30^2 = x^2 - 9^2$, звідки $x = 41$.

4) Отже, $AL = 41$ см, $AK = 41 + 9 = 50$ (см).

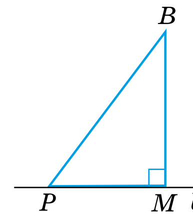
Відповідь: 41 см, 50 см.

? Що називають похилою, проведеною з точки до прямої? ○ Що називають основою похилої? ○ Що називають проєкцією похилої? ○ Сформулюйте властивості похилих і їхніх проєкцій.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

37.1. (*Усно.*) Назвіть на малюнку 37.3:
1) перпендикуляр, проведений з точки B до прямої b;
2) основу перпендикуляра;
3) похилу, проведену з точки B до прямої b;
4) основу похилої;
5) проєкцію похилої.



Мал. 37.3

37.2. Накресліть пряму m і позначте точку P, що їй не належить. Проведіть перпендикуляр PK і похилу PM до прямої m.

37.3. (*Усно.*) BM – перпендикуляр до прямої b, BP – похила (мал. 37.3). Порівняйте BM і BP.

37.4. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки до прямої, дорівнює 5 см, а довжина похилої, проведеної із цієї самої точки, – 13 см. Знайдіть проєкцію похилої на дану пряму.

37.5. Перпендикуляр, проведений з даної точки до прямої, дорівнює 6 см. Із цієї самої точки до прямої проведено похилу, проєкція якої на пряму дорівнює 8 см. Знайдіть довжину похилої.

2

37.6. З точки до прямої проведено дві рівні між собою похилі. Проєкція однієї з них дорівнює 7 см. Знайдіть відстань між основами похилих.

37.7. З точки до прямої проведено дві рівні між собою похилі. Відстань між їхніми основами дорівнює 12 см. Знайдіть проєкції похилих на цю пряму.

37.8. Точка лежить на відстані 6 см від прямої. Із цієї точки до прямої проведено похилу, що утворює з прямою кут 30°. Знайдіть довжину похилої та її проєкції на пряму.

37.9. Точка лежить на відстані 4 см від прямої. Із цієї точки до прямої проведено похилу, що утворює з прямою кут 45°. Знайдіть проєкцію похилої на цю пряму та довжину похилої.

37.10. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 13 см, а її проєкція – 5 см. Знайдіть проєкцію другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 45°.

37.11. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 12 см та утворює з прямою кут 30°. Знайдіть довжину другої похилої, якщо її проєкція на пряму – 8 см.

37.12. З точки до прямої проведено дві похилі 13 см і 20 см завдовжки. Проєкція першої похилої на пряму дорівнює 5 см. Знайдіть проєкцію другої похилої.

3

37.13. З точки, що міститься на відстані 24 см від прямої, проведено дві похилі 25 см і 26 см завдовжки. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?

37.14. З точки, що міститься на відстані 8 см від прямої, проведено дві похилі 10 см і 17 см завдовжки. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?

37.15. З точки до прямої проведено дві похилі 5 см і 8 см завдовжки. Який кут утворює друга похила з прямою, якщо проєкція першої похилої на пряму дорівнює 3 см?

37.16. З точки до прямої проведено дві похилі. Довжина однієї з похилих дорівнює 41 см, а її проєкції – 9 см. Який кут утворює інша похила з прямою, якщо її проєкція на цю пряму дорівнює 40 см?

37.17. Точки M і N лежать по один бік від прямої a. Із цих точок до прямої a проведено перпендикуляри 2 см і 7 см завдовжки. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, якщо $MN = 13$ см.

37.18. Точки A і B лежать по один бік від прямої m. Із цих точок до прямої m проведено перпендикуляри 1 см і 7 см завдовжки. Знайдіть AB, якщо відстань між основами перпендикулярів дорівнює 8 см.

37.19. З точки до прямої проведено дві похилі 10 см і 14 см завдовжки, різниця проєкцій яких дорівнює 8 см. Знайдіть проєкції похилих і відстань від точки до прямої.

37.20. З точки до прямої проведено дві похилі, різниця яких дорівнює 2 см. Знайдіть ці похилі та відстань від точки до прямої, якщо проєкції похилих дорівнюють 1 см і 5 см.

4

37.21. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть проєкції двох менших сторін на більшу сторону.

37.22. Сторони гострокутного трикутника дорівнюють 25 см, 29 см і 36 см. Знайдіть проєкції двох більших сторін на меншу сторону.

37.23. З точки A до прямої m проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AK, причому точка K лежить між точками B і C. $AB = 15$ см, $AK = 12$ см, $KC = 16$ см. Знайдіть $\angle BAC$.

Вправи для повторення

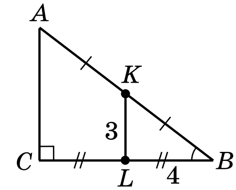
37.24. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см і 11 см, а її висота – 6 см. Знайдіть діагональ трапеції.

37.25. Радіуси двох кіл, які мають зовнішній дотик, дорівнюють 1 см і 4 см. Пряма a – спільна дотична цих кіл. Знайдіть відстань між точками дотику прямої a з колами.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

37.26. У трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено середню лінію KL (мал. 37.4), $KL = 3$ см, $LB = 4$ см.

1) У $\triangle KBL$ і $\triangle ABC$ знайдіть відношення катета, протилежного до кута B, до катета, прилеглого до кута B, і порівняйте отримані значення.
2) У $\triangle KBL$ і $\triangle ABC$ знайдіть відношення катета, протилежного до кута B, до гіпотенузи та порівняйте отримані значення.
3) У $\triangle KBL$ і $\triangle ABC$ знайдіть відношення катета, прилеглого до кута B, до гіпотенузи та порівняйте отримані значення.



Мал. 37.4

37.27. Визначте міру кутів трикутника зі сторонами завдовжки:
1) 1 см, $\sqrt{3}$ см, 2 см;
2) 1 см, 1 см, $\sqrt{2}$ см.

Життєва математика

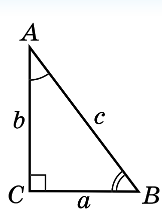
37.28. Відомо, що 1 га лісу за рік очищує 18 млн м^3 повітря. Скільки м^3 повітря очистить за рік ліс площею:
1) 5 га; 2) 2 км^2?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

37.29. (*Задача Стенфордського університету.*) Точку P розташовано всередині прямокутника так, що відстань від неї до вершини прямокутника дорівнює 5 ярдів, до протилежної вершини – 14 ярдів, а до третьої вершини – 10 ярдів. Якою є відстань від точки P до четвертої вершини?

§ 38. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника

1. Означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника



Для гострого кута A:
BC – **протилежний катет,**
AC – **прилеглий катет.**

Для гострого кута B:
AC – **протилежний катет,**
BC – **прилеглий катет.**

Синусом гострого кута прямокутного трикутника **називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.**

Синус кута A позначають так: $\sin A$. Отже,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника **називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.**

Косинус кута A позначають так: $\cos A$. Отже,

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Оскільки катети AC і BC менші від гіпотенузи AB, то *синус і косинус гострого кута прямокутного трикутника менші від одиниці.*

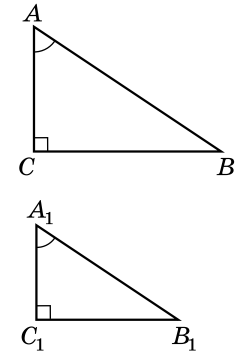
Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника **називають відношення протилежного катета до прилеглого.**

Тангенс кута A позначають так: $\mathrm{tg} A$. Отже,

$$\mathrm{tg}\, A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \quad \mathrm{tg}\, B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

Доведемо, що **якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні, косинуси цих кутів рівні й тангенси цих кутів рівні.**

Розглянемо прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle A = \angle A_1$ (мал. 38.1). Тоді $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (за гострим кутом). Тому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Із цього випливає, що $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, а тому $\sin A = \sin A_1$. Аналогічно $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, тому $\cos A = \cos A_1$, $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, тому $\mathrm{tg} A = \mathrm{tg} A_1$.



Мал. 38.1

Отже, приходимо до висновку: *синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежать лише від градусної міри кута.*

2. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника

З означень синуса, косинуса й тангенса кута слідують такі *співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника*.

1. **Катет дорівнює гіпотенузі, помноженій на синус протилежного до нього кута або на косинус прилеглого:**
$$a = c\sin A = c\cos B \quad \text{та} \quad b = c\sin B = c\cos A.$$
2. **Гіпотенуза дорівнює катету, поділеному на синус протилежного до нього кута або на косинус прилеглого:**
$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}.$$
3. **Катет дорівнює другому катету, помноженому на тангенс кута, протилежного до першого катета:**
$$a = b\,\mathrm{tg}\,A, \quad b = a\,\mathrm{tg}\,B.$$
4. **Катет дорівнює другому катету, поділеному на тангенс кута, прилеглого до першого катета:**
$$a = \frac{b}{\mathrm{tg}\,B}, \quad b = \frac{a}{\mathrm{tg}\,A}.$$

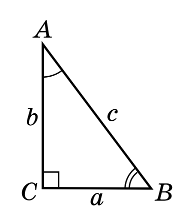
Значення $\sin A$, $\cos A$, $\mathrm{tg}\,A$ можна знаходити за допомогою спеціальних таблиць, калькулятора або комп'ютера. Для обчислень використовуємо клавіші калькулятора $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ і $\boxed{\mathrm{tg}}$ (на деяких калькуляторах $\boxed{\tan}$). Послідовність обчислень у різних калькуляторів різниться. Тому радимо уважно ознайомитися з інструкцією до калькулятора.

Приклад 1. У трикутнику ABC: $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $\cos A = \frac{3}{4}$. Знайти AB.

Розв'язання. Скористаємося малюнком 38.2.

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = 12 : \frac{3}{4} = 16 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 16 см.



Мал. 38.2

Приклад 2. У трикутнику ABC: $\angle C = 90°$, $AB = 10$ см, $\angle A = 17°$. Знайти BC (з точністю до десятих сантиметра).

Розв'язання. $BC = AB\sin A$ (мал. 38.2). За допомогою таблиць або калькулятора знаходимо $\sin 17° \approx 0{,}2924$. Отже,
$BC \approx 10 \cdot 0{,}2924 \approx 2{,}9$ (см).

Відповідь: $\approx 2{,}9$ см.

Приклад 3. У трикутнику ABC: $\angle C = 90°$, $\sin A = \dfrac{3}{5}$, $AC = 12$ см. Знайти AB і BC.

Розв'язання. Скористаємося малюнком 38.2.

1) $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, за умовою, $\sin A = \dfrac{3}{5}$, тому $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{5}$.

Позначимо $BC = 3x$ (см), $AB = 5x$ (см).

2) За теоремою Піфагора, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Тоді $(5x)^2 = 12^2 + (3x)^2$, $16x^2 = 144$, $x^2 = 9$, $x = 3$ (см).

3) Маємо: $BC = 3 \cdot 3 = 9$ (см), $AB = 5 \cdot 3 = 15$ (см).

Відповідь: $BC = 9$ см, $AB = 15$ см.

За допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера можна за даним значенням $\sin A$, $\cos A$ або $\operatorname{tg} A$ знаходити кут A. Для обчислень використовуємо клавіші калькулятора $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ і $\boxed{\operatorname{tg}^{-1}}$.

Приклад 4. У трикутнику ABC: $\angle C = 90°$, $AC = 4$ см, $BC = 5$ см. Знайти гострі кути трикутника.

Розв'язання. $\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$ (мал. 38.2). За допомогою калькулятора знаходимо значення кута A у градусах: 51,34019. Подаємо у градусах і мінутах (у деяких калькуляторах це можливо зробити за допомогою спеціальної клавіші). Маємо: $\angle A \approx 51°20'$. Тоді $\angle B = 90° - \angle A \approx 90° - 51°20' \approx 38°40'$.

Відповідь: $\approx 51°20'$; $\approx 38°40'$.

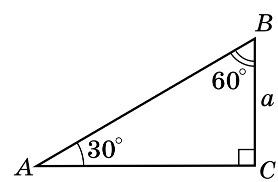
3. Синус, косинус і тангенс табличних кутів

Знайдемо *синус, косинус і тангенс кутів* 30° і 60°.

Розглянемо $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $BC = a$ (мал. 38.3). Тоді, за властивістю катета, що лежить проти кута 30°, $AB = 2a$.

За теоремою Піфагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$



Мал. 38.3

Тоді $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, тобто $\sin 30° = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$;

$\cos A = \dfrac{AC}{AB}$, тобто $\cos 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC}$, тобто $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

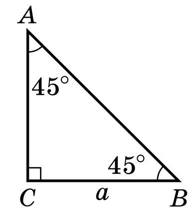
$\sin B = \dfrac{AC}{AB}$, тобто $\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos B = \dfrac{BC}{AB}$, тобто $\cos 60° = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$;

$\operatorname{tg} B = \dfrac{AC}{BC}$, тобто $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

Знайдемо синус, косинус і тангенс кута 45°.

Розглянемо $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, $BC = a$ (мал. 38.4). Тоді $AC = BC = a$.



Мал. 38.4

За теоремою Піфагора:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Тоді $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, тобто $\sin 45° = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos A = \dfrac{AC}{AB}$, тобто $\cos 45° = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC}$, тобто $\operatorname{tg} 45° = \dfrac{a}{a} = 1$.

Систематизуємо отримані дані в таблицю:

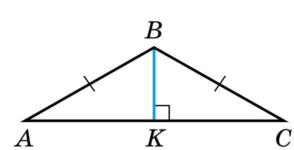
A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\operatorname{tg} A$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Кути 30°, 45° і 60° прийнято називати *табличними кутами*.

Приклад 5. Знайти висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, якщо основа дорівнює 12 см, а кут при вершині трикутника дорівнює 120°.

Розв'язання. Нехай ABC – даний трикутник, $AB = BC$, $AC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$ (мал. 38.5).

1) Проведемо до основи AC висоту BK, яка є також медіаною і бісектрисою.



Мал. 38.5

2) Тоді $KC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ (см).

3) $\angle KBC = \angle ABC : 2 = 120° : 2 = 60°$.

4) Із $\triangle BKC$ ($\angle K = 90°$): $\operatorname{tg} KBC = \dfrac{KC}{BK}$,

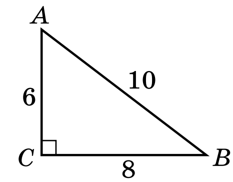
звідси $BK = \dfrac{KC}{\operatorname{tg} KBC} = \dfrac{6}{\operatorname{tg} 60°} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

Відповідь: $2\sqrt{3}$ см.

Що називають синусом, косинусом і тангенсом гострого кута прямокутного трикутника? Якими залежностями пов'язані між собою сторони й кути прямокутного трикутника?

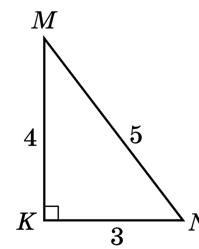
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

38.1. Дано $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$ (мал. 38.6). Знайдіть:
1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} A$;
4) $\cos A$; 5) $\sin B$; 6) $\operatorname{tg} B$.



Мал. 38.6

38.2. Дано $\triangle MNK$, $\angle K = 90°$ (мал. 38.7). Знайдіть:
1) $\cos M$; 2) $\sin N$; 3) $\operatorname{tg} M$;
4) $\sin M$; 5) $\cos N$; 6) $\operatorname{tg} N$.



Мал. 38.7

38.3. Знайдіть за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера:
1) $\cos 22°$; 2) $\sin 50°$; 3) $\operatorname{tg} 17°$;
4) $\cos 12°10'$; 5) $\sin 67°30'$; 6) $\operatorname{tg} 81°48'$.

38.4. Знайдіть за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера:
1) $\sin 43°$; 2) $\cos 57°$; 3) $\operatorname{tg} 70°$;
4) $\sin 14°42'$; 5) $\cos 49°30'$; 6) $\operatorname{tg} 15°12'$.

38.5. Обчисліть:
1) $\sin 30° + \operatorname{tg} 45°$; 2) $\cos 30° \cdot \sin 60°$.

38.6. Обчисліть:
1) $\operatorname{tg} 45° - \cos 60°$; 2) $\sin 45° : \cos 45°$.

38.7. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = 5$ см, $BC = 12$ см. Знайдіть: $\sin A$, $\cos A$.

38.8. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AC = 7$ см, $BC = 24$ см. Знайдіть: $\sin B$, $\cos B$.

38.9. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:
1) AC, якщо $BC = a$, $\angle B = \beta$; 2) AB, якщо $AC = b$, $\angle A = \alpha$.

38.10. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:
1) BC, якщо $AC = b$, $\angle A = \alpha$; 2) AB, якщо $BC = a$, $\angle B = \beta$.

38.11. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:
1) AB, якщо $AC = 5$ см, $\cos A = \frac{1}{4}$;
2) AB, якщо $BC = 3$ см, $\sin A = 0{,}6$;
3) AC, якщо $AB = 8$ см, $\sin B = \frac{3}{4}$;
4) BC, якщо $AB = 20$ см, $\cos B = \frac{4}{5}$;
5) AC, якщо $BC = 10$ см, $\operatorname{tg} B = 0{,}5$.

38.12. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:
1) AB, якщо $BC = 8$ см, $\cos B = \frac{1}{2}$;
2) AB, якщо $AC = 10$ см, $\sin B = 0{,}25$;

3) BC, якщо $AB = 6$ см, $\sin A = \frac{1}{3}$;

4) AC, якщо $AB = 20$ см, $\cos A = 0,4$;

5) BC, якщо $AC = 12$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$.

38.13. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:
1) AB, якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle A = 30°$;
2) AC, якщо $AB = 5\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$.

38.14. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:
1) AB, якщо $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle B = 30°$;
2) BC, якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$.

38.15. Знайдіть (за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера) гострий кут α, якщо:
1) $\sin\alpha = 0,4226$; 2) $\cos\alpha = 0,8192$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 0,2679$;
4) $\sin\alpha = 0,8231$; 5) $\cos\alpha = 0,9373$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = 0,6924$.

38.16. Знайдіть (за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера) гострий кут β, якщо:
1) $\cos\beta = 0,1908$; 2) $\sin\beta = 0,8387$; 3) $\operatorname{tg}\beta = 0,7265$;
4) $\cos\beta = 0,5493$; 5) $\sin\beta = 0,3518$; 6) $\operatorname{tg}\beta = 1,1792$.

38.17. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. За допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера знайдіть з точністю до сотих сантиметра:
1) AB, якщо $BC = 5$ см, $\angle A = 42°$;
2) BC, якщо $AB = 10$ см, $\angle B = 37°$;
3) BC, якщо $AC = 4$ см, $\angle A = 82°$.

38.18. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. За допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера знайдіть з точністю до сотих сантиметра:
1) AC, якщо $AB = 8$ см, $\angle A = 15°$;
2) AB, якщо $BC = 9$ см, $\angle A = 43°$;
3) BC, якщо $AC = 5$ см, $\angle B = 29°$.

3

38.19. Побудуйте кут: 1) тангенс якого дорівнює $\frac{3}{5}$; 2) синус якого дорівнює $\frac{1}{7}$; 3) косинус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

38.20. Побудуйте кут: 1) тангенс якого дорівнює $\frac{2}{7}$; 2) синус якого дорівнює $\frac{4}{5}$; 3) косинус якого дорівнює $\frac{1}{3}$.

38.21. Діагональ прямокутника утворює з його стороною, довжина якої a, кут β. Знайдіть периметр прямокутника.

38.22. Одна сторона прямокутника дорівнює b. Його діагональ утворює з другою стороною кут α. Знайдіть площу прямокутника.

38.23. Кут ромба дорівнює 42°, а діагональ, що лежить проти нього, – 6 см. Знайдіть другу діагональ ромба (з точністю до сотих сантиметра).

38.24. Сторона ромба дорівнює 8 см, а один з його кутів – 78°. Знайдіть (з точністю до сотих сантиметра) діагональ ромба, що виходить із цього кута.

38.25. Гіпотенуза прямокутного трикутника – c, а один з гострих кутів – α. Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

38.26. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює h. Знайдіть гіпотенузу трикутника, якщо один з його гострих кутів дорівнює β.

38.27. Гіпотенуза прямокутного трикутника відноситься до катета цього трикутника як 8 : 5. Знайдіть (з точністю до градуса) гострі кути цього трикутника.

38.28. Відношення катетів прямокутного трикутника дорівнює 9 : 5. Знайдіть (з точністю до градуса) гострі кути цього трикутника.

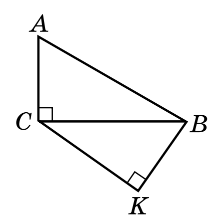
38.29. Дано: $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:
1) AB і BC, якщо $AC = 6$ см, $\cos B = 0{,}8$;
2) AC і BC, якщо $AB = 13$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{12}$.

38.30. Дано: $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$. Знайдіть:
1) AB і BC, якщо $AC = 4$ см, $\sin A = 0{,}6$;
2) AC і BC, якщо $AB = 34$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{8}{15}$.

38.31. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють $2a$ і $2b$ ($a > b$), а гострий кут – α. Знайдіть бічну сторону трапеції.

38.32. На малюнку 38.8 $\angle ACB = \angle K = 90°$, $AC = b$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCK = \gamma$. Знайдіть BC, CK, KB.

38.33. На малюнку 38.8 $\angle ACB = \angle K = 90°$, $BK = a$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCK = \alpha$. Знайдіть BC, AC, AB.



Мал. 38.8

4

38.34. Сторони прямокутника дорівнюють 19 см і 50 см. Знайдіть гострий кут між діагоналями прямокутника (з точністю до мінути).

38.35. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 12 см. Знайдіть кути ромба (з точністю до мінути).

38.36. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює m, а кут при основі – α. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

38.37. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює β, а радіус вписаного кола – r. Знайдіть бічну сторону трикутника.

38.38. Гострий кут паралелограма дорівнює 45°. Діагональ ділить тупий кут у відношенні 1 : 2. Знайдіть цю діагональ, якщо периметр паралелограма дорівнює 20 см.

38.39. Гострий кут паралелограма дорівнює 60°. Діагональ ділить тупий кут у відношенні 1 : 3. Знайдіть цю діагональ, якщо периметр паралелограма дорівнює 24 см.

38.40. У трикутнику одна зі сторін дорівнює 10 см, а прилеглі до неї кути – 135° і 30°. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.

38.41. У трикутнику одна зі сторін – 8 см, а прилеглі до неї кути – $60°$ і $45°$. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.

Вправи для повторення

38.42. Похила, проведена з точки до прямої, у два рази більша за перпендикуляр, проведений із цієї самої точки до цієї прямої. Знайдіть кут між похилою і перпендикуляром.

38.43. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проєкція на гіпотенузу – 7,2 см. Знайдіть периметр трикутника.

38.44. Побудуйте ромб за висотою та меншою діагоналлю.

Життєва математика

38.45. Кут $3°$ розглядають крізь збільшувальне скло, що збільшує в п'ять разів. Якої величини здається кут?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

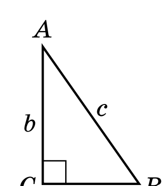
38.46. (*Задача Архімеда.*) Якщо в колі хорди AB і CD перетинаються в точці E під прямим кутом, то сума квадратів відрізків AE, BE, CE і DE дорівнює квадрату діаметра. Доведіть це.

§ 39. Розв'язування прямокутних трикутників

Розв'язати трикутник – означає знайти невідомі його сторони та невідомі його кути за відомими сторонами й кутами.

1. Розв'язування прямокутних трикутників. Загальні формули та факти

Щоб можна було розв'язати прямокутний трикутник, відомими мають бути або дві сторони трикутника, або одна зі сторін і один з гострих кутів трикутника.



Мал. 39.1

Використовуючи у прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) позначення $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ (мал. 39.1) та співвідношення між його сторонами й кутами:

$\angle A + \angle B = 90°$; $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Піфагора);

$$a = c\sin A = c\cos B = b\,\mathrm{tg}\,A = \frac{b}{\mathrm{tg}\,B};$$

$$b = c\sin B = c\cos A = a\,\mathrm{tg}\,B = \frac{a}{\mathrm{tg}\,A};$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}, \text{ –}$$

можна розв'язати будь-який прямокутний трикутник.

Далі розглянемо чотири види задач на розв'язування прямокутних трикутників.

Зразки запису їхнього розв'язування в загальному вигляді та приклади задач подано у вигляді таблиць.

2. Розв'язування прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом

Приклад 1. Дано гіпотенузу c прямокутного трикутника та гострий кут A. Знайти другий гострий кут трикутника і його катети.

Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
Д а н о: c, $\angle A$. З н а й т и: $\angle B$, a, b. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle B = 90° - \angle A$. 2. $a = c\sin A$. 3. $b = c\cos A$.	Д а н о: $c = 7$, $\angle A = 29°$. З н а й т и: $\angle B$, a, b. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle B = 90° - 29° = 61°$. 2. $a = 7\sin 29° \approx 3{,}39$. 3. $b = 7\cos 29° \approx 6{,}12$. *Відповідь*: $61°$, $\approx 3{,}39$, $\approx 6{,}12$.

3. Розв'язування прямокутних трикутників за катетом і гострим кутом

Приклад 2. Дано катет a прямокутного трикутника та гострий кут A. Знайти другий гострий кут трикутника, другий катет і гіпотенузу.

Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
Д а н о: a, $\angle A$. З н а й т и: $\angle B$, b, c. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle B = 90° - \angle A$. 2. $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg} A}$ (або $b = a\operatorname{tg} B$). 3. $c = \dfrac{a}{\sin A}$ (або $c = \sqrt{a^2 + b^2}$).	Д а н о: $a = 5$, $\angle A = 63°$. З н а й т и: $\angle B$, b, c. Р о з в' я з а н н я. 1. $\angle B = 90° - 63° = 27°$. 2. $b = \dfrac{5}{\operatorname{tg} 63°} \approx 2{,}55$. 3. $c = \dfrac{5}{\sin 63°} \approx 5{,}61$. *Відповідь*: $27°$, $\approx 2{,}55$, $\approx 5{,}61$.

4. Розв'язування прямокутних трикутників за двома катетами

Приклад 3. Дано катети a і b прямокутного трикутника. Знайти гіпотенузу та гострі кути трикутника.

Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
Д а н о: a, b. З н а й т и: c, $\angle A$, $\angle B$. Р о з в' я з а н н я. 1. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. 2. $\text{tg}\, A = \dfrac{a}{b}$. Далі $\angle A$ знаходимо за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle B \approx 90^\circ - \angle A$.	Д а н о: $a = 4$, $b = 7$. З н а й т и: c, $\angle A$, $\angle B$. Р о з в' я з а н н я. 1. $c = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}06$. 2. $\text{tg}\, A = \dfrac{4}{7}$; $\angle A \approx 29^\circ 45'$. 3. $\angle B \approx 90^\circ - 29^\circ 45' = 60^\circ 15'$. *Відповідь*: 8,06, $\approx 29^\circ 45'$, $\approx 60^\circ 15'$.

5. Розв'язування прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою

Приклад 4. Дано катет a та гіпотенузу c прямокутного трикутника. Знайти другий катет і гострі кути трикутника.

Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
Д а н о: a, c. З н а й т и: b, $\angle A$, $\angle B$. Р о з в' я з а н н я. 1. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. 2. $\sin A = \dfrac{a}{c}$. Далі $\angle A$ знаходимо за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle B \approx 90^\circ - \angle A$.	Д а н о: $a = 5$, $c = 12$. З н а й т и: b, $\angle A$, $\angle B$. Р о з в' я з а н н я. 1. $b = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119} \approx 10{,}91$. 2. $\sin A = \dfrac{5}{12}$; $\angle A \approx 24^\circ 37'$. 3. $\angle B \approx 90^\circ - 24^\circ 37' = 65^\circ 23'$. *Відповідь*: $\approx 10{,}91$, $\approx 24^\circ 37'$, $\approx 65^\circ 23'$.

6. Розв'язування прикладних задач

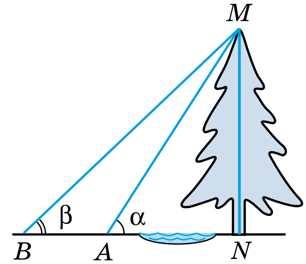
Розв'язування прямокутних трикутників використовують під час розв'язування прикладних задач.

Приклад 5. Знайти висоту дерева MN, основа N якого є недоступною (мал. 39.2).

Розв'язання. Позначимо на прямій, яка проходить через точку N, основу дерева, точки A та B і виміряємо відрізок AB та $\angle MAN = \alpha$ і $\angle MBN = \beta$.

1) У $\triangle MAN$: $AN = \dfrac{MN}{\text{tg}\,\alpha}$.

2) У $\triangle MBN$: $BN = \dfrac{MN}{\text{tg}\,\beta}$.



Мал. 39.2

3) Оскільки $AB = BN - AN$, маємо:

$$AB = \frac{MN}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{MN}{\operatorname{tg}\alpha} = MN\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = MN \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

звідки $MN = \dfrac{AB \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

Відповідь: $\dfrac{AB \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$.

Що означає розв'язати трикутник? ○ Які співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника використовують для розв'язування трикутників? ○ Як розв'язати прямокутний трикутник: 1) за гіпотенузою і гострим кутом; 2) за катетом і гострим кутом; 3) за двома катетами; 4) за катетом і гіпотенузою?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2

39.1. За гіпотенузою AB прямокутного трикутника ABC і гострим кутом знайдіть інші його сторони та другий гострий кут (сторони трикутника в задачах 3) і 4) знайдіть з точністю до сотих).

1) $AB = 6$ см, $\angle A = 30°$; 2) $AB = 10$ дм, $\angle B = 45°$;
3) $AB = 12$ см, $\angle A = 18°$; 4) $AB = 15$ дм, $\angle B = 73°$.

39.2. За гіпотенузою AB прямокутного трикутника ABC і гострим кутом знайдіть інші його сторони та другий гострий кут (сторони трикутника в задачах 3) і 4) знайдіть з точністю до сотих).

1) $AB = 14$ дм, $\angle A = 45°$; 2) $AB = 6$ см, $\angle B = 60°$;
3) $AB = 3$ дм, $\angle A = 82°$; 4) $AB = 8$ см, $\angle B = 25°$.

39.3. За катетом трикутника ABC ($\angle C = 90°$) і його гострим кутом знайдіть інші сторони та другий гострий кут трикутника (сторони трикутника в задачах 2) і 3) знайдіть з точністю до сотих).

1) $AC = 6$ см, $\angle B = 30°$; 2) $AC = 12$ см, $\angle A = 24°$;
3) $BC = 8$ дм, $\angle A = 42°$; 4) $BC = 5$ см, $\angle B = 45°$.

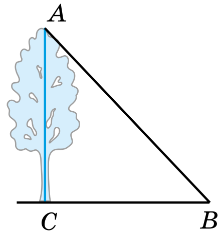
39.4. За катетом трикутника ABC ($\angle C = 90°$) і його гострим кутом знайдіть інші сторони та другий гострий кут трикутника (сторони трикутника в задачах 2) і 3) знайдіть з точністю до сотих).

1) $AC = 10$ см, $\angle A = 60°$; 2) $AC = 8$ дм, $\angle B = 12°$;
3) $BC = 6$ см, $\angle B = 71°$; 4) $BC = 12$ дм, $\angle A = 45°$.

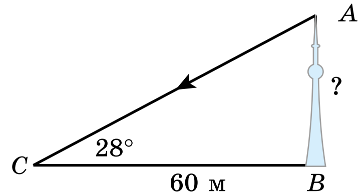
39.5. Діагональ прямокутника дорівнює 6 см й утворює кут 25° з однією з його сторін. Знайдіть кут, що утворює діагональ прямокутника з другою стороною, та сторони прямокутника (з точністю до сотих см).

39.6. З точки, що розміщена на відстані 6 см від прямої, проведено похилу, яка утворює з прямою кут 52°. Знайдіть кут, який утворює похила з перпендикуляром, проведеним з тієї самої точки, довжину перпендикуляра та проєкцію похилої (з точністю до сотих см).

39.7. Знайдіть висоту дерева AC (мал. 39.3), якщо $BC = 40$ м, а $\angle B = 27°$.



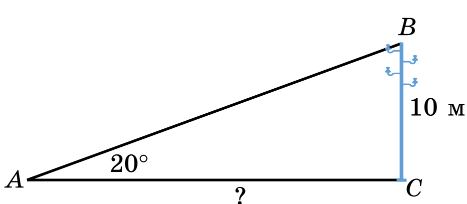
Мал. 39.3



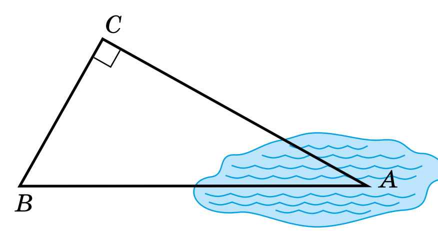
Мал. 39.4

39.8. Якщо висота сонця над горизонтом 28°, то тінь від телевізійної вежі дорівнює 60 м (мал. 39.4). Знайдіть висоту вежі (з точністю до десятих м).

39.9. Телеграфний стовп 10 м заввишки розміщено на березі річки (мал. 39.5). Верхній кінець стовпа видно з іншого берега під кутом 20° до горизонту. Знайдіть ширину річки (з точністю до десятих м).



Мал. 39.5



Мал. 39.6

39.10. За малюнком 39.6 знайдіть відстань від об'єкта B до недоступного об'єкта A, якщо $\angle C = 90°$, $BC = 80$ м, $\angle B = 57°$.

39.11. За двома катетами трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть його гіпотенузу та гострі кути з точністю до мінут:

1) $AC = 4$ см, $BC = 4\sqrt{3}$ см; 2) $AC = 8$ дм, $BC = 15$ дм;
3) $AC = 3$ см, $BC = 9$ см; 4) $AC = 7m$ дм, $BC = 24m$ дм.

39.12. За двома катетами трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть його гіпотенузу та гострі кути з точністю до мінут:

1) $AC = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 2$ см; 2) $AC = 8$ см, $BC = 6$ см;
3) $AC = 2$ дм, $BC = 5$ дм; 4) $AC = 9k$ дм, $BC = 40k$ дм.

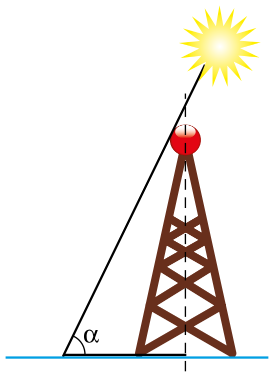
39.13. За катетом і гіпотенузою трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть його другий катет і гострі кути з точністю до мінути:

1) $AB = 6$ см, $AC = 3\sqrt{3}$ см; 2) $AB = 65$ дм, $BC = 16$ дм;
3) $AB = 7$ см, $AC = 4$ см; 4) $AB = 13a$ см, $BC = 5a$ см.

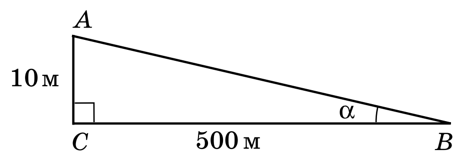
39.14. За катетом і гіпотенузою трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть його другий катет і гострі кути з точністю до мінути:

1) $AB = 8$ см, $AC = 4\sqrt{2}$ см; 2) $AB = 37$ дм, $BC = 12$ дм;
3) $AB = 10$ см, $AC = 7$ см; 4) $AB = 61b$ дм, $BC = 60b$ дм.

39.15. Тінь від антени мобільного зв'язку, висота якої 5 м, дорівнює 2,6 м (мал. 39.7). Знайдіть з точністю до мінути висоту сонця над горизонтом (кут α).



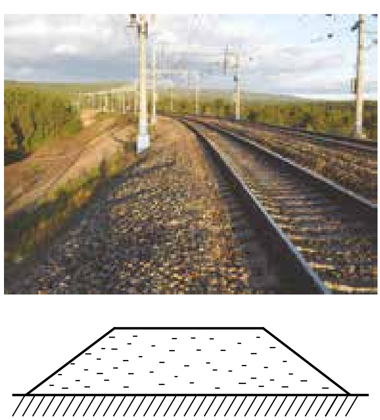
Мал. 39.7



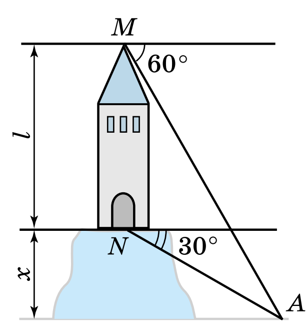
Мал. 39.8

39.16. Знайдіть укіс дороги (значення тангенса кута α) за малюнком 39.8. Знайдіть міру кута α.

39.17. Переріз залізничного насипу має форму рівнобічної трапеції (мал. 39.9). Нижня основа трапеції дорівнює 10 м, висота насипу – 2 м, а його укіс – 35°. Знайдіть ширину верхньої частини насипу (верхню основу трапеції).



Мал. 39.9



Мал. 39.10

4

39.18. На горі розміщена башта, висота якої l м (мал. 39.10). За деяким об'єктом A, що розміщений біля підніжжя гори, спостерігають спочатку з вершини M башти під кутом 60° до горизонту, а потім від основи башти N під кутом 30°. Знайдіть висоту x гори.

Вправи для повторення

39.19. Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 30 см. Знайдіть периметр ромба.

39.20. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90°$, $BC = 12$ см, $\sin B = \frac{3}{5}$. Знайдіть периметр трикутника.

39.21. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки, які дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть найменшу сторону трикутника.

Життєва математика

39.22. За санітарними нормами на кожного учня в класі повинно припадати не менше ніж 4,5 м^3 повітря. Яку найбільшу кількість учнів можна розмістити в кабінеті іноземної мови, довжина якого 6 м, ширина менша від довжини в 1,5 раза, а висота складає 80 % від ширини? Враховуйте, що об’єм меблів займає десяту частину від об’єму кабінету.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

39.23. Аркуш паперу склали вчетверо так, що отримали прямокутник зі сторонами вдвічі меншими, ніж сторони аркуша. Потім отриманий прямокутник прокололи у двох місцях, аркуш розгорнули й через кожні дві отримані точки (проколи) провели пряму. Яку найменшу і яку найбільшу кількість прямих при цьому можна отримати?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 8 (§§ 36–39)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 7 см і 24 см.

А. $\sqrt{527}$ см **Б.** 31 см **В.** 25 см **Г.** 23 см

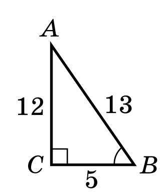
2. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а один з його катетів – 12 см. Знайдіть інший катет трикутника.

А. 8 см **Б.** 9 см **В.** 10 см **Г.** $\sqrt{369}$ см

3. На малюнку 1 зображено прямокутний трикутник ABC. Знайдіть $\sin B$.

А. $\frac{12}{13}$ **Б.** $\frac{5}{13}$

В. $\frac{12}{5}$ **Г.** $\frac{5}{12}$



Мал. 1

2 **4.** Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть сторону ромба.

А. 8 см **Б.** 10 см **В.** 16 см **Г.** 20 см

5. Точка розміщена на відстані 8 см від прямої. З неї до прямої проведено перпендикуляр і похилу, яка утворює з перпендикуляром кут 60°. Знайдіть довжину похилої.

А. $8\sqrt{3}$ см **Б.** 12 см **В.** $8\sqrt{2}$ см **Г.** 16 см

6. AB – гіпотенуза прямокутного трикутника ABC, $AC = 8$ см, $\angle A = 50°$. Знайдіть AB з точністю до десятих.

А. 12,5 см **Б.** 10,4 см **В.** 12,4 см **Г.** 9,5 см

3

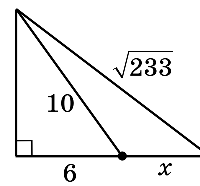
7. Знайдіть x за малюнком 2.

А. 13

Б. 7

В. 6

Г. 8



Мал. 2

8. З точки до прямої проведено дві похилі, різниця довжин яких дорівнює 1 см. Знайдіть довжину меншої похилої, якщо проєкції похилих дорівнюють 4 см і 7 см.

А. 15 см **Б.** 16 см **В.** 17 см **Г.** 18 см

9. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AB = 20$ см, $\text{tg}A = 0{,}75$. Знайдіть P_{ABC}.

А. 50 см **Б.** 38 см **В.** 52 см **Г.** 48 см

4

10. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 10 см і 26 см. Знайдіть гіпотенузу.

А. 36 см **Б.** 38 см **В.** 39 см **Г.** 52 см

11. Сторони трикутника – 5 см, 29 см і 30 см. Знайдіть проєкцію меншої сторони трикутника на його більшу сторону.

А. 1,4 см **Б.** 1,6 см **В.** 1,8 см **Г.** 2,4 см

12. Сторони прямокутника дорівнюють 6 см і 10 см. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника (з точністю до градуса).

А. 31° **Б.** 61° **В.** 62° **Г.** 64°

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

2

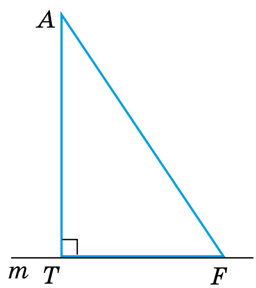
13. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 16 см і утворює кут 30° з прямою. Проєкція іншої похилої дорівнює 6 см. Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Відрізок	*Довжина*
1. Проєкція першої похилої на пряму	**А.** 6 см
2. Перпендикуляр до прямої	**Б.** 8 см
3. Друга похила	**В.** $8\sqrt{3}$ см
	Г. 10 см

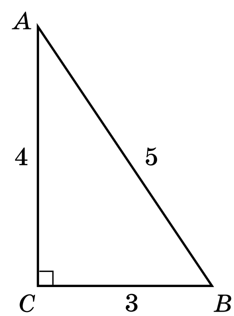
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 36–39

1. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 10 см і 24 см.

2. За малюнком 1 назвіть:
1) перпендикуляр, проведений з точки A до прямої m;
2) похилу, проведену з точки A до прямої m;
3) проєкцію цієї похилої.



Мал. 1



Мал. 2

3. За малюнком 2 знайдіть:
1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} A$; 4) $\sin B$.

4. Сторона ромба дорівнює 25 см, а одна з його діагоналей – 14 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

5. Точка міститься на відстані 6 см від прямої. Із цієї точки до прямої проведено похилу, яка утворює з прямою кут 30°. Знайдіть довжину похилої та довжину проєкції похилої на пряму.

6. $AB = 16$ см – гіпотенуза прямокутного трикутника ABC, $\angle A = 35°$. Розв'яжіть цей прямокутний трикутник. (Сторони трикутника знайдіть з точністю до сотих сантиметра.)

7. У трикутнику ABC $\angle A$ – тупий, $BC = 20$ см, $AB = 15$ см, $BK = 12$ см – висота трикутника. Знайдіть AC.

8. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90°$, $AC = 24$ см, $\sin A = \frac{5}{13}$. Знайдіть P_{ABC}.

9. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 6 см і 10 см. Знайдіть сторони трикутника.

Додаткові завдання

10. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см. Знайдіть проєкції двох менших сторін на більшу сторону.

11. Діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 12 см. Знайдіть кути ромба з точністю до мінути.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 8

До § 36

1. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза. Знайдіть:

1) c, якщо $a = 11$ см, $b = 60$ см;

2) a, якщо $c = 13$ см, $b = 12$ см;

3) b, якщо $a = 24$ см, $c = 25$ см.

2. Сторона квадрата – 5 см. Знайдіть його діагональ.

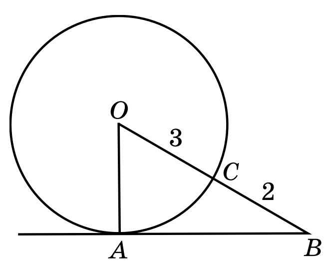
3. У рівнобедреному трикутнику ABC: $AB = AC = 37$ см, $BC = 24$ см. Знайдіть довжину висоти AK.

4. Чи є прямокутним трикутник, сторони якого пропорційні числам:

1) 3, 4, 5; 2) 6, 7, 10?

5. Площа прямокутника дорівнює 12 см^2, а одна з його сторін – 3 см. Знайдіть діагональ прямокутника.

6. На малюнку 1 AB – дотична до кола із центром у точці O, $OC = 3$ см, $CB = 2$ см. Знайдіть AB.



Мал. 1

7. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 8 см і 17 см, а більша бічна сторона – 15 см. Знайдіть периметр трапеції.

8. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 26 см, висота – 12 см, а діагональ – 20 см. Знайдіть меншу основу трапеції та її бічну сторону.

9. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а катети відносяться як 3 : 4. Знайдіть периметр трикутника.

10. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як 5 : 6. Висота трикутника, проведена до основи, дорівнює 8 см. Знайдіть периметр трикутника.

11. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки 50 см і 80 см, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайдіть висоту трикутника, проведену до основи.

4 **12.** У трикутнику ABC: $AB = \sqrt{2}$ см, $BC = 2$ см. На стороні AC позначено точку K так, що $AK = KB = 1$ см. Знайдіть градусну міру кута ABC.

13. Бічні сторони трапеції дорівнюють 9 см і 12 см, а основи – 30 см і 15 см. Знайдіть кут, що утворюють між собою продовження бічних сторін.

14. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 25 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо його найменша висота дорівнює 24 см.

До § 37

1 **15.** З точки до прямої проведено похилу, довжина якої 5 см. Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо проєкція похилої дорівнює 4 см.

2 **16.** З точки до прямої проведено дві похилі, які утворюють з прямою рівні кути. Відстань між основами похилих дорівнює 8 см. Знайдіть проєкції похилих на цю пряму.

17. З точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, яка утворює з прямою кут 60°. Знайдіть перпендикуляр і проєкцію похилої, якщо довжина похилої 12 см.

3 **18.** З точки, що міститься на відстані 4 см від прямої, проведено до неї дві похилі. Довжина однієї з них 5 см, а друга утворює з прямою кут 45°. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?

19. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 13 : 15, а довжини їхніх проєкцій дорівнюють 10 см і 18 см. Знайдіть довжини похилих і відстань від точки до прямої.

4 **20.** Знайдіть меншу з висот трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см.

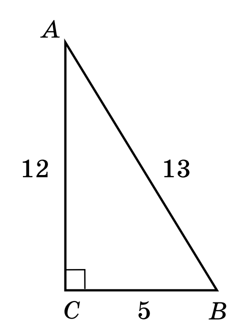
До § 38

1 **21.** На малюнку 2 трикутник ABC – прямокутний. Чи правильні рівності:

1) $\sin A = \frac{5}{12}$; 2) $\cos A = \frac{12}{13}$;

3) $\operatorname{tg} A = \frac{12}{5}$; 4) $\sin B = \frac{12}{13}$;

5) $\cos B = \frac{13}{5}$; 6) $\operatorname{tg} B = \frac{12}{5}$?



Мал. 2

2 **22.** Знайдіть синус, косинус і тангенс кута M трикутника MNP ($\angle P = 90°$), якщо $MP = 24$ см, $MN = 25$ см.

23. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 15 см. Знайдіть:
1) синус гострого кута, що лежить проти меншого катета;
2) косинус гострого кута, прилеглого до більшого катета;
3) тангенси обох гострих кутів.

3 **24.** Радіус кола, описаного навколо прямокутника, дорівнює R. Діагональ прямокутника утворює зі стороною кут α. Знайдіть периметр прямокутника.

25. Кут ромба дорівнює $80°$, а діагональ, що лежить проти цього кута, – 10 см. Знайдіть (з точністю до сотих см) периметр ромба.

26. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90°$, CK – висота, $CA = b$, $\angle A = \alpha$. Знайдіть CK і KB.

27. У рівнобедреному трикутнику синус кута при основі дорівнює 0,96, а основа – 28 см. Знайдіть бічну сторону.

4 **28.** Радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник, дорівнює r, а один з його гострих кутів – β. Знайдіть катет, прилеглий до цього гострого кута.

29. Основи трапеції дорівнюють 14 см і 10 см, кути при більшій основі дорівнюють $60°$ і $30°$. Знайдіть висоту й діагоналі трапеції.

30. З точки до прямої проведено дві похилі, що утворюють з прямою кути $30°$ і $60°$. Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо відстань між основами похилих дорівнює a см. Скільки випадків треба розглянути?

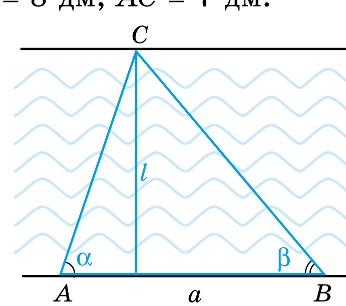
31. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$. Доведіть, що $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. (Запис $\sin^2 A$ є тотожним запису $(\sin A)^2$.)

До § 39

2 **32.** За двома елементами прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть інші його сторони та кути:
1) $AB = 7$ см, $\angle A = 19°$;
2) $AB = 20$ дм, $\angle B = 48°$;
3) $BC = 5$ см, $\angle B = 57°$;
4) $AC = 18$ дм, $\angle B = 32°$.

3 **33.** За двома сторонами прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть його третю сторону та гострі кути:
1) $AC = 9$ см, $BC = 12$ см;
2) $AC = 7$ дм, $BC = 5$ дм;
3) $AB = 34$ см, $BC = 30$ см;
4) $AB = 8$ дм, $AC = 7$ дм.

4 **34.** Для визначення ширини l річки взяли два будинки A і B на одному березі та будинок C на іншому (мал. 3), $AB = a$ м, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Знайдіть ширину річки.



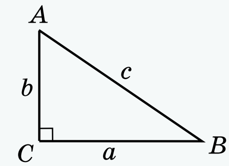
Мал. 3

Головне в темі 8

ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad — \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad — \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

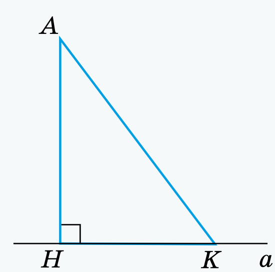
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Теорема (обернена до теореми Піфагора). **Якщо у трикутнику ABC має місце рівність $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то кут C цього трикутника — прямий.**

Трикутник є прямокутним тоді й тільки тоді, коли квадрат найбільшої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін.

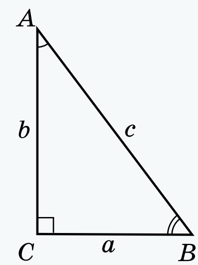
ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

AH — ***перпендикуляр***, проведений з точки A до прямої a. Точка H — ***основа перпендикуляра*** AH. K — довільна точка прямої a, відмінна від H. Відрізок AK — ***похила***, проведена з точки A до прямої a, а точка K — ***основа похилої***. Відрізок HK — ***проєкція похилої AK на пряму a***.



1. Перпендикуляр, проведений з точки до прямої, менший від будь-якої похилої, проведеної із цієї точки до цієї прямої.
2. Якщо дві похилі, проведені з точки до прямої, між собою рівні, то рівні між собою і їхні проєкції.
3. Якщо проєкції двох похилих, проведених з точки до прямої, між собою рівні, то рівні між собою і самі похилі.
4. З двох похилих, проведених з точки до прямої, більшою є та, у якої більша проєкція.
5. З двох похилих, проведених з точки до прямої, більша похила має більшу проєкцію.

СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ ТА КУТАМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА



Синус гострого кута прямокутного трикутника – відношення протилежного катета до гіпотенузи:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Косинус гострого кута прямокутного трикутника – відношення прилеглого катета до гіпотенузи:

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Тангенс гострого кута прямокутного трикутника – відношення протилежного катета до прилеглого:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

A	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} A$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ТЕМА 9

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **ознайомитеся** з поняттям квадратного рівняння; теоремою Вієта;
- **навчитеся** розв'язувати повні та неповні квадратні рівняння; застосовувати теорему Вієта; розв'язувати текстові та прикладні задачі, математичними моделями яких є квадратні рівняння.

§ 40. Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння

1. Квадратне рівняння, його коефіцієнти

У математиці, фізиці, економіці, практичній діяльності людини трапляються задачі, математичними моделями яких є рівняння, що містять змінну в другому степені.

Приклад 1. Довжина земельної ділянки на 15 м більша за ширину, а площа дорівнює 375 м^2. Знайти ширину ділянки.

Розв'язання. Нехай x м – ширина ділянки, тоді її довжина – $(x + 15)$ м. За умовою задачі площа ділянки дорівнює 375 м^2. Тоді $x(x + 15) = 375$. Отже, маємо рівняння $\boldsymbol{x^2 + 15x - 375 = 0}$, яке називають ***квадратним***.

Квадратним рівнянням **називають рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$.**

Наприклад, рівняння $5x^2 - 2x - 7 = 0$ та $-3x^2 + x - 8 = 0$ також є квадратними.

Числа a, b і c називають ***коефіцієнтами квадратного рівняння***. Число a називають ***першим коефіцієнтом***, число b – ***другим коефіцієнтом***, число c – ***вільним членом***.

У рівнянні $x^2 + 15x - 375 = 0$ коефіцієнти такі: $a = 1$; $b = 15$; $c = -375$.

У рівнянні $5x^2 - 2x - 7 = 0$ такі: $a = 5$; $b = -2$; $c = -7$, а в рівнянні $-3x^2 + x - 8 = 0$ такі: $a = -3$; $b = 1$ і $c = -8$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають ***зведеним***.

Рівняння $x^2 + 15x - 375 = 0$ – зведене, а рівняння $5x^2 - 2x - 7 = 0$ – не є зведеним.

2. Неповні квадратні рівняння та їх розв'язування

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають *неповним квадратним рівнянням*.

Наприклад, неповним квадратним рівнянням, у якого $b = 0$ і $c = 0$, є рівняння $-8x^2 = 0$; у якого $b = 0$, є рівняння $2x^2 - 3 = 0$; у якого $c = 0$, є рівняння $-7x^2 + 4x = 0$.

Отже, неповні квадратні рівняння можуть мати вигляд:

1) $ax^2 = 0$;
2) $ax^2 + c = 0$;
3) $ax^2 + bx = 0$.

Розглянемо розв'язування кожного з них.

1 Рівняння вигляду $ax^2 = 0$

Оскільки $a \neq 0$, маємо рівняння $x^2 = 0$, коренем якого є число 0. Отже, рівняння має єдиний корінь: $x = 0$.

2 Рівняння вигляду $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$

Маємо: $ax^2 = -c$, тобто $x^2 = -\dfrac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то і $-\dfrac{c}{a} \neq 0$.

Якщо $-\dfrac{c}{a} > 0$, то рівняння має два корені:

$x_1 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ і $x_2 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ або скорочено: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.

Якщо $-\dfrac{c}{a} < 0$, то рівняння коренів не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

Розв'язання.

1) $-2x^2 + 50 = 0$;
$-2x^2 = -50$;
$x^2 = 25$;
$x_{1,2} = \pm 5$.

2) $3x^2 + 9 = 0$;
$3x^2 = -9$;
$x^2 = -3$;
$x \in \varnothing$.

Відповідь: 1) ± 5; 2) коренів немає.

3 Рівняння вигляду $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$

Розкладемо ліву частину рівняння на множники й розв'яжемо одержане рівняння $x(ax + b) = 0$.

$$x = 0 \text{ або } ax + b = 0,$$
$$x = -\frac{b}{a}, \text{ оскільки } a \neq 0.$$

Отже, рівняння має два корені: $x_1 = 0$ і $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2x^2 + 5x = 0$.

Розв'язання. Маємо: $x(2x + 5) = 0$,

$x = 0$ або $2x + 5 = 0$;

$x = -2{,}5$.

Отже, $x_1 = 0$, $x_2 = -2{,}5$.

Відповідь: 0; $-2{,}5$.

Систематизуємо дані про розв'язки неповного квадратного рівняння у вигляді схеми:

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

Якщо $b = 0$, $c = 0$, маємо: $ax^2 = 0$, $x^2 = 0$, $x = 0$

Якщо $b = 0$, $c \neq 0$, маємо: $ax^2 + c = 0$, $ax^2 = -c$, $x^2 = -\dfrac{c}{a}$

Якщо $b \neq 0$, $c = 0$, маємо: $ax^2 + bx = 0$, $x(ax + b) = 0$, $x = 0$ або $ax + b = 0$, отже, $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

Якщо $-\dfrac{c}{a} > 0$, то $x_1 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Якщо $-\dfrac{c}{a} < 0$, то коренів немає

3. Розв'язування рівнянь, що зводяться до неповних квадратних

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(2x+1)^2 = (x+3)(x+1)+4$.

Розв'язання. Виконаємо тотожні перетворення та застосуємо властивості рівнянь. Маємо:

$4x^2 + 4x + 1 = x^2 + 3x + x + 3 + 4;$

$3x^2 = 6;$

$x^2 = 2;$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$

Відповідь: $\pm\sqrt{2}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\frac{|x^3|}{x} - 1 = 0.$

Розв'язання. Областю визначення рівняння є всі числа, крім 0. Розглянемо два випадки: $x > 0$ і $x < 0$.

1) Якщо $x > 0$, то $x^3 > 0$ і $|x^3| = x^3$. Тоді маємо рівняння $\frac{x^3}{x} - 1 = 0,$ $x^2 = 1$, $x = 1$ або $x = -1$. Але корінь $x = -1$ не задовольняє умову $x > 0$.

2) Якщо $x < 0$, то $x^3 < 0$ і $|x^3| = -x^3$. Тоді отримаємо $-\frac{x^3}{x} - 1 = 0,$ $x^2 + 1 = 0$, $x^2 = -1$. Це рівняння розв'язків не має.

Відповідь: 1.

Яке рівняння називають квадратним? Як у рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ називають числа a, b, c? Наведіть приклад квадратного рівняння. Яке квадратне рівняння називають неповним? Наведіть приклади неповних квадратних рівнянь. Як розв'язати неповне квадратне рівняння кожного виду?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

40.1. (*Усно.*) Які з рівнянь є квадратними:

1) $x^2 - 3x + 4 = 0$; 2) $x^2 - 7x^3 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 9$;
4) $8x - x^2 = 0$; 5) $5x - 4 = 3x + 7$; 6) $1 - 5x^2 = 0$?

40.2. (*Усно.*) Серед квадратних рівнянь знайдіть: а) неповні; б) зведені:

1) $3x^2 + 2x = 0$; 2) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 3) $3x^2 - 4x + 7 = 0$;
4) $5x^2 = 0$; 5) $7x^2 - 21 = 0$; 6) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$.

40.3. Випишіть коефіцієнти a, b і c квадратного рівняння:

1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$; 3) $3x - x^2 + 7 = 0$;
4) $3x^2 = 0$; 5) $7x - x^2 = 0$; 6) $2 + 4x - x^2 = 0$.

40.4. Складіть квадратне рівняння за його коефіцієнтами:

1) $a = 3$, $b = 5$, $c = -2$; 2) $a = -1$, $b = 5$, $c = 0$;
3) $a = -4$, $b = 0$, $c = 0$; 4) $a = 13$, $b = 0$, $c = -39$.

40.5. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її:

Квадратне рівняння	Коефіцієнти рівняння		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$5x^2 - 3x - 17 = 0$			
	2	−3	4
$-15x^2 + 14x = 0$			
	−3	0	7

Продовження таблиці

Квадратне рівняння	Коефіцієнти рівняння		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$-x^2 + 5x + 6 = 0$			
	-5	-1	19

2

40.6. Зведіть до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$ рівняння:
1) $(5x - 1)(5x + 1) = x(7x - 13)$; 2) $(2x - 3)^2 = (x + 2)(x - 7)$.

40.7. Замініть рівняння рівносильним йому квадратним рівнянням:
1) $(2x + 3)(2x - 3) = x(9x - 12)$; 2) $(4x + 1)^2 = (x - 3)(x + 2)$.

40.8. Які із чисел -2; -1; 0; 1; 2 є коренями рівняння:
1) $x^2 - 5x = 0$; 2) $3x^2 = 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 = 0$; 4) $x^2 - 2x - 3 = 0$?

40.9. Які із чисел -5; -2; 0; 2; 5 є коренями рівняння:
1) $x^2 + 2x = 0$; 2) $-5x^2 = 0$;
3) $x^2 - x - 6 = 0$; 4) $x^2 - 25 = 0$?

40.10. Розв'яжіть рівняння:
1) $3x^2 - 27 = 0$; 2) $3{,}7x^2 = 0$; 3) $2x^2 + 8 = 0$;
4) $-5x^2 + 10 = 0$; 5) $-5{,}7x^2 = 0$; 6) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{7}{9} = 0$.

40.11. Знайдіть корені рівняння:
1) $2x^2 - 2 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$; 3) $1{,}4x^2 = 0$;
4) $-7x^2 + 21 = 0$; 5) $-1{,}8x^2 = 0$; 6) $\frac{1}{7}x^2 - \frac{5}{7} = 0$.

40.12. Знайдіть корені рівняння:
1) $x^2 + 6x = 0$; 2) $2x^2 - 8x = 0$; 3) $4x^2 - x = 0$;
4) $0{,}1x^2 + 2x = 0$; 5) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x = 0$; 6) $3x^2 - 7x = 0$.

40.13. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 5x = 0$; 2) $3x^2 + 9x = 0$; 3) $5x^2 + x = 0$;
4) $0{,}2x^2 - 10x = 0$; 5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x = 0$; 6) $4x^2 + 9x = 0$.

3

40.14. Складіть квадратне рівняння, у якого:
1) немає коренів; 2) тільки один корінь;
3) два цілих корені; 4) два ірраціональних корені.

40.15. Для якого значення коефіцієнта a число 3 є коренем рівняння $ax^2 + 2x - 7 = 0$?

40.16. Для якого значення коефіцієнта b число -2 є коренем рівняння $x^2 + bx - 8 = 0$?

40.17. Для яких значень коефіцієнтів a і b числа 1 і 2 є коренями рівняння $ax^2 + bx + 4 = 0$?

40.18. Для яких значень коефіцієнтів b і c числа 1 і 3 є коренями рівняння $x^2 + bx + c = 0$?

40.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)(x + 3) = -6$; 2) $\frac{1}{3}x(x + 9) = \frac{1}{8}x(x - 16)$;

3) $(3x - 1)^2 = (x - 3)^2$; 4) $(2x + 1)(3x - 1) = x(x - 2) + 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

40.20. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)(x - 5) = -15$; 2) $\frac{2}{3}x(x - 3) = \frac{1}{2}x(x + 4)$;

3) $(2x - 3)^2 = (3x - 2)^2$; 4) $(5x + 1)(2x - 1) = x(x + 3) - 6\left(x + \frac{1}{6}\right)$.

40.21. Для яких значень x значення виразу $(3x - 1)(x + 4)$ на 4 менше від значення виразу $x(x + 2)$?

40.22. Для яких значень x значення виразу $(2x + 1)(x + 3)$ на 3 більше за значення виразу $x(x - 4)$?

4 **40.23.** Добуток двох чисел дорівнює їх середньому арифметичному. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 1.

40.24. Половина добутку двох чисел дорівнює їх середньому арифметичному. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 2.

40.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5|x| = 0$; 2) $-\frac{x^3}{|x|} + 4 = 0$.

40.26. Розв'яжіть рівняння:

1) $-x^2 + 3|x| = 0$; 2) $\frac{x^3}{|x|} - 9 = 0$.

Вправи для повторення

40.27. Доведіть тотожність

$$\frac{3x + 3}{x^2 - x} : \left(\frac{x + 3}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + x}\right) = 3.$$

40.28. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{якщо } x < -2; \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ 8 - 2x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

40.29. Знайдіть значення виразу $b^2 - 4ac$, якщо

1) $a = 1$, $b = 5$, $c = -6$; 2) $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$;
3) $a = 2$, $b = -3$, $c = -5$; 4) $a = 4$, $b = 5$, $c = -9$.

40.30. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{18}$; 2) $\sqrt{300}$; 3) $\sqrt{108}$; 4) $\sqrt{363}$.

40.31. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4 + 2\sqrt{7}}{2}$; 2) $\dfrac{6 - \sqrt{12}}{2}$; 3) $\dfrac{8 - 2\sqrt{3}}{6}$; 4) $\dfrac{16 + \sqrt{20}}{8}$.

Життєва математика

40.32. Офіс обладнано приладами освітлення, які споживають 600 Ват щогодини і працюють по 10 годин щодня. Якщо замінити їх на енергоощадні, то витрати електроенергії зменшаться на 80 %.

1) Скільки Ват·год протягом тижня (5 робочих днів) можна заощадити в цьому офісі, якщо обладнати його енергоощадним освітленням?

2) *Проєктна діяльність*. Дізнайтеся тариф на 1 кВт·год (1 кВт = 1000 Вт) та обчисліть, скільки грошей можна заощадити протягом 5 робочих днів у цьому офісі після впровадження згаданих заходів енергозбереження.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

40.33. У ящику лежать лише чорні, білі та зелені кульки. Які б n ($n > 2$) кульок навмання не витягали з ящика, серед них обов'язково будуть біла й чорна. Яка найбільша кількість кульок може лежати в цьому ящику?

§ 41. Формула коренів квадратного рівняння

1. Схема розв'язування квадратного рівняння

Розглянемо повне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ та знайдемо його розв'язки в загальному вигляді.

Помножимо ліву і праву частини рівняння на $4a$ (оскільки $a \neq 0$, то і $4a \neq 0$):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Далі додамо до обох частин рівняння b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2.$$

Оскільки $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$, матимемо:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називають *дискримінантом квадратного рівняння* $ax^2 + bx + c = 0$.

Слово *дискримінант* походить від латинського *розрізняючий*. Позначають дискримінант літерою D.

Ураховуючи, що $b^2 - 4ac = D$, запишемо рівняння у вигляді:

$$(2ax + b)^2 = D -$$

і продовжимо його розв'язувати.

Розглянемо всі можливі випадки залежно від значення D.

1) $D > 0$. Тоді з рівняння $(2ax + b)^2 = D$ маємо:

$$2ax + b = \sqrt{D}; \qquad \text{або} \qquad 2ax + b = -\sqrt{D};$$

$$2ax = -b + \sqrt{D}; \qquad\qquad 2ax = -b - \sqrt{D};$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \qquad\qquad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$

(при діленні на $2a$ врахували, що $a \neq 0$).

Отже, якщо $D > 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різних корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ і } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Коротко це можна записати так:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Отримали ***формулу коренів квадратного рівняння.***

2) $D = 0$. Тоді маємо рівняння $(2ax + b)^2 = 0$,

$2ax + b = 0$, звідки $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Отже, якщо $D = 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один корінь: $x = -\dfrac{b}{2a}$. Цей корінь можна було б знайти і за формулою коренів квадратного рівняння, урахувавши, що $D = 0$: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$. Тому можна вважати, що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ для $D = 0$ має два однакових корені, кожний з яких дорівнює $-\dfrac{b}{2a}$.

3) $D < 0$. У цьому разі рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має коренів, оскільки не існує такого значення x, для якого значення виразу $(2ax + b)^2$ було б від'ємним.

Систематизуємо дані про розв'язки квадратного рівняння за допомогою схеми.

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Якщо $D > 0$, то $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$	Якщо $D = 0$, то $x = -\dfrac{b}{2a}$	Якщо $D < 0$, то коренів немає

2. Приклади розв'язування квадратних рівнянь

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; 2) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 2x + 7 = 0$.

Розв'язання. 1) $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$; $D > 0$;

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-3 \pm 1}{4}$. Отже, $x_1 = -1$; $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

2) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$; $D = 0$; $x = -\dfrac{-6}{2 \cdot 9} = \dfrac{1}{3}$.

3) $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 4 - 28 = -24 < 0$, $x \in \varnothing$.

Відповідь: 1) -1; $-\dfrac{1}{2}$;

2) $\dfrac{1}{3}$;

3) коренів немає.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $-\dfrac{1}{7}x^2 - \dfrac{4}{7}x + 1 = 0$.

Розв'язання. Помножимо ліву і праву частини рівняння на (-7), щоб його коефіцієнти стали цілими числами, матимемо рівняння:

$$x^2 + 4x - 7 = 0.$$

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 44$, тоді $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{44}}{2}$.

Оскільки $\sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = 2\sqrt{11}$, то

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -2 \pm \sqrt{11}.$$

Відповідь: $-2 \pm \sqrt{11}$.

3. Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(2-\sqrt{x})(x^2+x-2)=0$.

Розв'язання. Областю визначення рівняння є всі невід'ємні значення x: $x \geqslant 0$. Маємо:

$$2-\sqrt{x}=0; \quad \text{або} \quad x^2+x-2=0;$$

$$\sqrt{x}=2; \qquad D=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9;$$

$$x_1=4; \qquad x_{2,3}=\frac{-1\pm 3}{2};$$

$$x_2=-2; \quad x_3=1.$$

Проте корінь -2 не задовольняє умову $x \geqslant 0$. Тому задане рівняння має корені 1 і 4.

Відповідь: 1; 4.

Приклад 4. Знайти всі значення a, для яких рівняння $ax^2+4x+1=0$ має один корінь.

Розв'язання. 1) Якщо $a=0$, то рівняння набуває вигляду $4x+1=0$. Це рівняння має один корінь.

2) Якщо $a \neq 0$, то маємо квадратне рівняння. Воно має один корінь, якщо дискримінант рівняння дорівнює нулю. $D=4^2-4a\cdot 1=16-4a$. Маємо $16-4a=0$, $a=4$.

Відповідь: $a=0$ або $a=4$.

А ще раніше...

Неповні квадратні рівняння та деякі види повних квадратних рівнянь (наприклад, вигляду $x^2 \pm x = a$) вавилонські математики вміли розв'язувати ще 4 тис. років тому. У більш пізні часи деякі квадратні рівняння у Давній Греції та Індії математики розв'язували геометрично. Прийоми розв'язування деяких квадратних рівнянь без застосування геометрії виклав давньогрецький математик *Діофант* (III ст.).

Багато уваги квадратним рівнянням приділяв арабський математик *Мухаммед аль-Хорезмі* (IX ст.). Він знайшов, як розв'язати рівняння вигляду $ax^2=bx$, $ax^2=c$, $ax^2+bx=c$, $ax^2+c=bx$, $bx+c=ax^2$ (для додатних a, b, c) і отримати додатні корені цих рівнянь.

Франсуа Вієт (1540–1603)

Формули, що пов'язують між собою корені квадратного рівняння і його коефіцієнти, віднайшов французький математик *Франсуа Вієт* у 1591 році. Його висновок (у сучасних позначеннях) виглядає так:

«Коренями рівняння $(a+b)x-x^2=ab$ є числа a і b».

Після опублікування праць нідерландського математика *А. Жирара* (1595–1632), а також француза *Р. Декарта* (1596–1650) та англійця *І. Ньютона* (1643–1727) формула коренів квадратного рівняння набула сучасного вигляду.

? Що називають дискримінантом квадратного рівняння? ○ Скільки коренів має квадратне рівняння залежно від значення дискримінанта? ○ Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

41.1. (*Усно.*) Скільки різних коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант дорівнює:
1) 4; 2) 0; 3) −9; 4) 17?

41.2. Чи має корені квадратне рівняння, і якщо має, то скільки, якщо його дискримінант дорівнює:
1) −7; 2) 49; 3) 13; 4) 0?

41.3. (*Усно.*) Чи правильно записано дискримінант квадратного рівняння:
1) $2x^2 + 3x - 1 = 0$, $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$;
2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$, $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$;
3) $-\frac{1}{2}x^2 - 5x + 3 = 0$, $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;
4) $\frac{1}{8}x^2 + 2x - 4 = 0$, $D = 2^2 + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot (-4)$?

41.4. Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння: 1) $6x^2 - 5x - 1 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 4 = 0$; 3) $x^2 + 2x + 5 = 0$; 4) $7x^2 + 2x - 1 = 0$.

41.5. Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння: 1) $2x^2 - 3x - 1 = 0$; 2) $x^2 + x + 7 = 0$; 3) $x^2 + 6x + 9 = 0$; 4) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

2

41.6. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $2x^2 + 5x - 3 = 0$;
3) $3x^2 + 5x + 2 = 0$; 4) $x^2 + 10x + 25 = 0$;
5) $x^2 + x - 90 = 0$; 6) $x^2 - 10x - 24 = 0$.

41.7. Розв'яжіть рівняння: 1) $x^2 - 4x - 5 = 0$; 2) $2x^2 + 7x - 4 = 0$; 3) $x^2 - 12x + 36 = 0$; 4) $x^2 - x - 56 = 0$.

41.8. Розв'яжіть рівняння:
1) $10x^2 = 5x + 0{,}6$; 2) $x^2 + 3 = 4x$; 3) $x^2 + 5x = -6$;
4) $1 - 4x = 5x^2$; 5) $81y^2 + 1 = -18y$; 6) $3p = 5p^2 - 2$.

41.9. Розв'яжіть рівняння: 1) $10x^2 = 0{,}4 - 3x$; 2) $x^2 + 7 = -8x$; 3) $7x = x^2 + 12$; 4) $4y = 4y^2 + 1$.

41.10. Для яких значень x:
1) значення многочлена $x^2 - 2x - 3$ дорівнює нулю;
2) значення многочленів $x^2 + 2x$ і $0{,}5x + 2{,}5$ між собою рівні;
3) значення двочлена $10x^2 - 8x$ дорівнює значенню тричлена $9x^2 + 2x - 25$?

41.11. Для яких значень y:
1) значення многочлена $y^2 + 4y - 5$ дорівнює нулю;
2) значення многочленів $y^2 - 3y$ і $0{,}5y + 4{,}5$ між собою рівні;
3) значення тричлена $4 + 2y - y^2$ дорівнює значенню двочлена $4y^2 - 6y$?

3

41.12. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-3)^2 = 2x-3$;
2) $3(x+1)^2 = 2x+2$;
3) $(x+3)(x-1) = 2x(x-2)+5$;
4) $x(x-3)-(x-5)(x+5) = (x+1)^2$.

41.13. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+2)^2 = 2x+3$;
2) $5(x-2)^2 = 3x-6$;
3) $(x+2)(x-3) = 2x(x-4)+6$;
4) $x(x-1)-(x-3)(x+3) = (x+2)^2-1$.

41.14. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2+2x}{3} = \dfrac{4x+1}{5}$; 2) $\dfrac{y+2}{3} + \dfrac{y^2-1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

3) Нехай x – найбільший корінь першого рівняння, y – найбільший корінь другого рівняння. Знайдіть значення виразу $21x+6y$, відтак дізнаєтеся, якою завдовжки (у км) є одна з найбільших мальовничих і найдовших набережних у світі, що знаходиться у місті Дніпро.

41.15. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2-3x}{4} = \dfrac{2x+5}{3}$; 2) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x^2-1}{5} = 1$.

41.16. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{2}x^2 - x - 7 = 0$; 2) $-x^2 - 2x + 4 = 0$;
3) $0,1x^2 - 3x - 5 = 0$; 4) $0,5x^2 + 1,5x - 4 = 0$.

41.17. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{2}x^2 + x - 3 = 0$; 2) $-x^2 + 2x + 11 = 0$;
3) $0,2x^2 + 2x - 3 = 0$; 4) $0,5x^2 - 2,5x - 4 = 0$.

4

41.18. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{x}-2)(x^2+x-2) = 0$; 2) $x^2 - \dfrac{3x^2}{|x|} - 4 = 0$;
3) $x|x| + 3x - 4 = 0$; 4) $\dfrac{x^3}{|x|} - x - 2 = 0$.

41.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{x}-3)(x^2-x-6) = 0$; 2) $x^2 - \dfrac{2x^2}{|x|} - 3 = 0$;
3) $x|x| - 4x - 5 = 0$; 4) $\dfrac{x^3}{|x|} + 4x - 12 = 0$.

41.20. Для яких значень a рівняння має лише один корінь:
1) $2x^2 + x - a = 0$; 2) $x^2 - ax + 4 = 0$?

41.21. Для яких значень b рівняння має лише один корінь:
1) $4x^2 - x + b = 0$; 2) $x^2 + bx + 9 = 0$?

Вправи для повторення

41.22. Скоротіть дріб:
1) $\dfrac{a^2 - 49}{a^2 - 14a + 49}$; 2) $\dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$.

41.23. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = 0{,}2x - 15$ з осями координат.

41.24. Відомо, що $a + b = 5$, $ab = -7$. Знайдіть значення виразу:
1) $ab^2 + a^2b$; 2) $a^2 + b^2$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

41.25. Розв'яжіть рівняння, порівняйте суму його коренів із числом, протилежним другому коефіцієнту рівняння, а добуток коренів – з вільним членом рівняння:
1) $x^2 - x - 6 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$.

41.26. 1) Нехай a, b і c – коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, x_1 і x_2 – його корені. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її.

Рівняння	$-\dfrac{b}{a}$	$\dfrac{c}{a}$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	x_1x_2
$x^2 - 2x - 8 = 0$						
$2x^2 + 5x - 7 = 0$						
$3x^2 - 16x + 5 = 0$						

2) Порівняйте $-\dfrac{b}{a}$ і $x_1 + x_2$; $\dfrac{c}{a}$ і x_1x_2.

Життєва математика

41.27. Визначте, скільки відсотків свого щомісячного доходу витрачає на цигарки особа із зарплатнею в 12 800 грн, якщо викурює за добу одну пачку цигарок? Вважайте, що в місяці 30 днів, а пачка цигарок коштує 80 грн.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

41.28. (*XV Всеукраїнська олімпіада, 1975 р.*) Для яких натуральних значень n число $2^n + 65$ є квадратом цілого числа?

§ 42. Теорема Вієта

1. Теорема та формули Вієта для зведеного квадратного рівняння

Розглянемо кілька зведених квадратних рівнянь, що мають два різних корені. У таблицю занесемо такі дані про них: саме рівняння, його корені x_1 і x_2, суму його коренів $x_1 + x_2$, добуток його коренів $x_1 \cdot x_2$.

Рівняння	x_1 і x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 6x + 8 = 0$	2 і 4	6	8
$x^2 + x - 12 = 0$	-4 і 3	-1	-12
$x^2 + 5x + 6 = 0$	-3 і -2	-5	6
$x^2 - 4x - 5 = 0$	-1 і 5	4	-5

Зверніть увагу, що сума коренів кожного з рівнянь таблиці дорівнює другому коефіцієнту рівняння, узятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену. Ця властивість справджується для будь-якого *зведеного квадратного рівняння*, яке має корені.

Зведене квадратне рівняння в загальному вигляді зазвичай записують так: $\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$.

Т Теорема Вієта. **Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену.**

Доведення. Нехай x_1 і x_2 – корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, дискримінант якого $D = p^2 - 4q$. Якщо $D > 0$, то рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ і } x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}.$$

Якщо $D = 0$, то рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два однакових корені: $x_1 = x_2 = \frac{-p}{2}$.

Знайдемо суму і добуток коренів:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} =$$

$$= \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$. ■

Цю теорему називають *теоремою Вієта* на честь видатного французького математика Франсуа Вієта, котрий і відкрив цю властивість. Її можна сформулювати так:

Якщо x_1 і x_2 – корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.

Останні дві рівності, що пов'язують між собою корені та коефіцієнти зведеного квадратного рівняння, називають ***формулами Вієта***.

Якщо в рівнянні $x^2 + px + q = 0$ коефіцієнт q є цілим числом, то з рівності $x_1x_2 = q$ слідує, що цілими коренями цього рівняння можуть бути лише дільники числа q.

Приклад 1. Знайти підбором корені рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 – корені цього рівняння. Тоді $x_1 + x_2 = -3$ і $x_1x_2 = -4$. Якщо x_1 і x_2 – цілі числа, то вони є дільниками числа -4. Тому серед цих дільників шукаємо ті два, сума яких дорівнює -3. Неважко здогадатися, що це числа 1 і -4. Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

Відповідь: 1; -4.

Приклад 2. Один з коренів рівняння $x^2 + px - 18 = 0$ дорівнює 3. Знайти коефіцієнт p та другий корінь рівняння.

Розв'язання. Нехай $x_1 = 3$ – один з коренів рівняння $x^2 + px - 18 = 0$, а x_2 – другий його корінь. За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = -18$. Ураховуючи, що $x_1 = 3$, маємо:

$$\begin{cases} 3 + x_2 = -p, \\ 3 \cdot x_2 = -18; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -6, \\ 3 + (-6) = -p; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -6, \\ p = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $p = 3$; $x_2 = -6$.

2. Теорема та формули Вієта для незведеного квадратного рівняння

Використовуючи теорему Вієта, можна записати відповідні формули і для коренів будь-якого незведеного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Оскільки $a \neq 0$, поділимо обидві частини рівняння на a. Одержимо зведене квадратне рівняння:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Тоді за теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Якщо x_1 і x_2 – корені незведеного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Приклад 3. Не розв'язуючи рівняння $3x^2 - 5x - 7 = 0$, знайти суму і добуток його коренів.

Розв'язання. Знайдемо дискримінант рівняння, щоб пересвідчитися, що корені існують: $D = 5^2 + 4 \cdot 3 \cdot 7$. Очевидно, що $D > 0$, отже, рівняння має два корені x_1 і x_2. За теоремою Вієта:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}; \quad x_1x_2 = -\frac{7}{3}.$$

Відповідь: $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$; $x_1x_2 = -\frac{7}{3}$.

Приклад 4. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 - 3x - 1 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайти значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$.

Розв'язання. За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$.

Тоді: 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$;

2) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$;

3) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{4}$.

Відповідь: 1) -3; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $3\frac{1}{4}$.

3. Теорема, обернена до теореми Вієта

Справджується і твердження, обернене до теореми Вієта.

Т Теорема (обернена до теореми Вієта). **Якщо числа m і n такі, що $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, то вони є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$.**

Доведення. За умовою $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$. Тому рівняння $x^2 + px + q = 0$ можна записати так: $x^2 - (m + n)x + mn = 0$.

Перевіримо, чи є число m коренем цього рівняння, для чого підставимо в ліву частину рівняння замість змінної x число m. Одержимо:

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0.$$

Отже, m – корінь цього рівняння.

Аналогічно підставимо в ліву частину рівняння замість змінної x число n. Одержимо: $n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0$, тобто n – також корінь цього рівняння.

Отже, m і n – корені рівняння $x^2 + px + q = 0$. ■

Приклад 5. Скласти зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа -5 і 2.

Розв'язання. Шукане квадратне рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$p = -(x_1 + x_2) = -(-5 + 2) = 3$; $q = x_1 \cdot x_2 = -5 \cdot 2 = -10$.

Отже, $x^2 + 3x - 10 = 0$ – шукане рівняння.

Відповідь: $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Сформулюйте і доведіть теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння. ○ Чому дорівнюють сума і добуток коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$? ○ Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

42.1. (*Усно.*) Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму і добуток його коренів:

1) $x^2 - 15x + 14 = 0$; 2) $x^2 + 12x - 28 = 0$;
3) $x^2 + 17x + 52 = 0$; 4) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
5) $x^2 + 2x = 0$; 6) $x^2 - 8 = 0$.

42.2. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

1) $2x^2 + 4x - 5 = 0$; 2) $-x^2 + 5x - 6 = 0$;
3) $3x^2 - 6x - 8 = 0$; 4) $4x^2 - 7x = 0$.

42.3. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму і добуток його коренів:

1) $x^2 - 2x - 8 = 0$; 2) $x^2 + x - 6 = 0$;
3) $x^2 + 9x + 5 = 0$; 4) $2x^2 - 6x + 3 = 0$.

2

42.4. Розв'яжіть рівняння, використовуючи формулу коренів, і перевірте істинність теореми Вієта для кожного з рівнянь:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$; 2) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; 4) $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

42.5. Розв'яжіть квадратне рівняння за формулою коренів і перевірте для нього істинність теореми Вієта:

1) $x^2 + 3x - 28 = 0$; 2) $2x^2 - 13x + 15 = 0$.

42.6. Усі дані рівняння мають корені. У яких з них корені є числами одного знака, а в яких – числами різних знаків:

1) $x^2 + 2x - 8 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
3) $3x^2 + 4x + 1 = 0$; 4) $2x^2 - 3x - 5 = 0$?

42.7. Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 2 і 3; 2) -3 і 4; 3) -7 і 2; 4) 0,3 і $-0{,}5$.

42.8. Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

1) 5 і 1; 2) 2 і -7; 3) -2 і -3; 4) 0,7 і $-0{,}1$.

3

42.9. Знайдіть підбором корені рівняння:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$; 3) $x^2 - 6x - 7 = 0$;
4) $x^2 + 3x - 4 = 0$; 5) $x^2 - 17x + 42 = 0$; 6) $x^2 - 5x - 24 = 0$.

42.10. Знайдіть підбором корені рівняння:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 2) $x^2 - x - 6 = 0$; 3) $x^2 + 4x + 3 = 0$;
4) $x^2 - 12x + 27 = 0$; 5) $x^2 + x - 6 = 0$; 6) $x^2 + 9x - 22 = 0$.

42.11. Доведіть, що рівняння $12x^2 + 17x - 389 = 0$ не може мати коренів, що є числами одного знака.

42.12. Не розв'язуючи рівняння, визначте знаки його коренів (якщо корені існують):

1) $x^2 + 8x + 5 = 0$; 2) $x^2 - 12x - 1 = 0$;
3) $3x^2 + 14x - 7 = 0$; 4) $4x^2 - 7x + 2 = 0$.

42.13. Не розв'язуючи рівняння, визначте, чи має воно корені. Якщо так, то знайдіть знаки коренів:

1) $x^2 - 13x - 2 = 0$; 2) $x^2 + 17x + 1 = 0$;
3) $5x^2 - 14x + 1 = 0$; 4) $3x^2 + 7x - 18 = 0$.

42.14. Один з коренів рівняння $x^2 + 6x + q = 0$ дорівнює $-3,5$. Знайдіть q і другий корінь.

42.15. Один з коренів рівняння $x^2 + px - 9 = 0$ дорівнює 1,5. Знайдіть p і другий корінь.

42.16. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + px - 10 = 0$ задовольняють умову $2x_1 + 5x_2 = 0$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт p.

42.17. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 4x + q = 0$ задовольняють умову $2x_1 - 3x_2 = 13$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт q.

42.18. Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) $-\frac{1}{3}$ і 5; 2) $-\frac{1}{4}$ і $-\frac{5}{6}$; 3) $\sqrt{5}$ і $-\sqrt{5}$; 4) $2 - \sqrt{3}$ і $2 + \sqrt{3}$.

42.19. Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) -2 і $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{8}$ і $\frac{1}{2}$; 3) $-\sqrt{7}$ і $\sqrt{7}$; 4) $3 + \sqrt{7}$ і $3 - \sqrt{7}$.

4

42.20. x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 + 4x - 3 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$;
4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 6) $(x_1 - x_2)^2$.

42.21. x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 - 5x - 2 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$;
4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 6) $(x_1 - x_2)^2$.

42.22. Складіть квадратне рівняння, корені якого відповідно на 2 більші за корені рівняння $x^2 - 3x - 9 = 0$.

42.23. Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 2x - 7 = 0$.

Вправи для повторення

42.24. Маємо два шматки сплаву міді й цинку. Перший містить 20 % міді, а другий – 35 % міді. Скільки кілограмів першого сплаву і скільки другого треба взяти, щоб отримати сплав масою 200 кг, який містив би 29 % міді?

42.25. Спростіть вираз $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$.

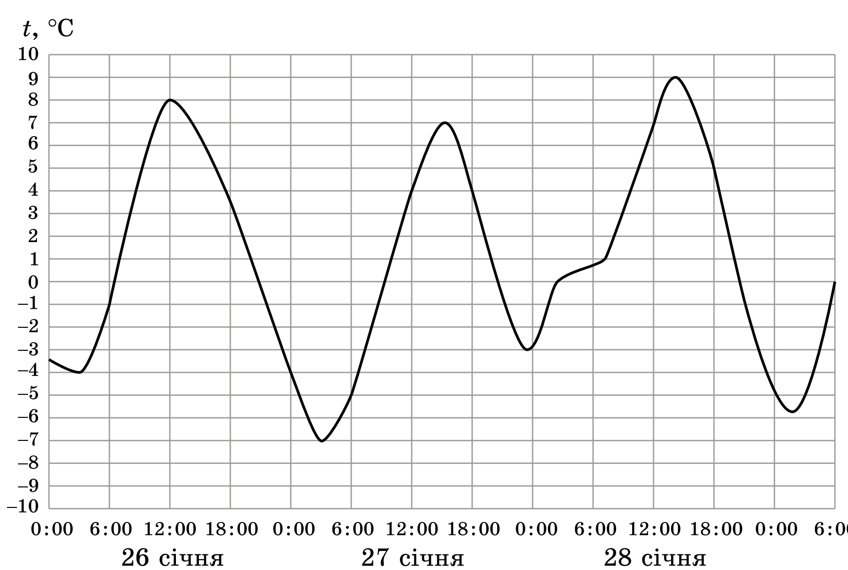
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

42.26. Сума двох чисел дорівнює 32, а одне з них у 7 разів більше за друге. Знайдіть ці числа.

42.27. Різниця двох чисел дорівнює 3, а різниця між квадратом більшого і квадратом меншого з них становить 81. Знайдіть ці числа.

Життєва математика

42.28. На графіку зображено зміни температури повітря, які реєструвалися метеорологічною станцією протягом трьох діб. По горизонталі вказано дату і час доби, по вертикалі – значення температури в °C. Визначте за графіком найменшу температуру повітря 27 січня.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

42.29. До збірної команди України на Всесвітній шаховій олімпіаді входить 6 шахістів і капітан, який керує командою, але не бере участі у змаганнях. Середній вік усіх членів команди на 2 роки більший за середній вік її шахістів. На скільки років вік капітана більший за середній вік членів його команди?

§ 43. Квадратне рівняння як математична модель текстових і прикладних задач

У 7 класі ми вже розглядали задачі, які можна розв'язати за допомогою лінійних рівнянь або систем лінійних рівнянь. Щоб розв'язати прикладну задачу, спочатку створюють її математичну модель, тобто записують залежність між відомими і невідомими величинами за допомогою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо. Математичною моделлю багатьох задач у математиці, фізиці, техніці, практичній діяльності людини може бути не тільки лінійне рівняння чи система лінійних рівнянь, а й квадратне рівняння.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Різниця кубів двох натуральних чисел дорівнює 279. Знайти ці числа, якщо одне з них на 3 більше за друге.

Розв'язання. Нехай менше із цих чисел дорівнює n, тоді більше дорівнює $n + 3$. За умовою маємо рівняння:

$$(n + 3)^3 - n^3 = 279.$$

Спростимо ліву частину рівняння.

Маємо: $n^2 + 3n - 28 = 0$, звідки $n_1 = 4$; $n_2 = -7$. За змістом задачі $n \in N$. Тому умову задачі задовольняє лише число 4. Отже, перше шукане число 4, а друге $4 + 3 = 7$.

Відповідь: 4; 7.

Приклад 2. У кінотеатрі кількість місць у ряду на 6 більша за кількість рядів. Скільки рядів у кінотеатрі, якщо місць у ньому 432?

Розв'язання. Нехай у кінотеатрі x рядів, тоді в кожному ряду $(x + 6)$ місць. Усього місць у залі $x(x + 6)$.

Маємо рівняння: $x(x + 6) = 432$.

Перепишемо рівняння у вигляді $x^2 + 6x - 432 = 0$, звідки $x_1 = 18$, $x_2 = -24$.

За змістом задачі значення x може бути лише додатним. Цю умову задовольняє лише x_1. Отже, у кінотеатрі 18 рядів.

Відповідь: 18 рядів.

Приклад 3. Деякий опуклий многокутник має 54 діагоналі. Знайти, скільки в нього вершин.

Розв'язання. Нехай у многокутника n вершин. З кожної його вершини виходить $(n - 3)$ діагоналі. Тоді з усіх n його вершин виходить

$n(n-3)$ діагоналі. Але при цьому кожну діагональ пораховано двічі. Отже, усього діагоналей буде $\frac{n(n-3)}{2}$.

Маємо рівняння: $\frac{n(n-3)}{2} = 54$, тобто $n^2 - 3n - 108 = 0$, звідки $n_1 = 12$ і $n_2 = -9$. Від'ємний корінь рівняння не може бути розв'язком задачі.

Відповідь: 12 вершин.

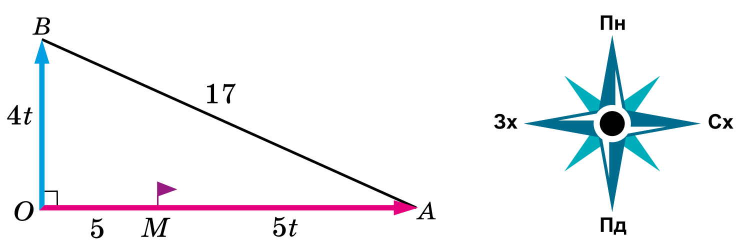
Приклад 4. Тіло підкинули вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с. Висота h (у м), на якій через t с буде тіло, обчислюється за формулою $h = 20t - 5t^2$. У який момент часу тіло опиниться на висоті 15 м?

Розв'язання. За умовою: $15 = 20t - 5t^2$. Після спрощення отримаємо рівняння $t^2 - 4t + 3 = 0$, розв'язавши яке знайдемо корені: $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Обидва корені є розв'язком задачі, оскільки на висоті 15 м тіло буде двічі: спочатку під час руху вгору (це відбудеться через 1 с), а вдруге – під час падіння (це відбудеться через 3 с).

Відповідь: 1 с, 3 с.

Приклад 5. О 9-й годині ранку з базового табору в східному напрямку вирушила група туристів зі швидкістю 5 км/год. Через годину з того самого табору зі швидкістю 4 км/год вирушила інша група туристів, але в північному напрямку. О котрій годині відстань між групами туристів буде 17 км?



Мал. 43.1

Розв'язання. За першу годину перша група туристів подолає 5 км: $OM = 5$ (мал. 43.1). Далі рухатимуться обидві групи. Нехай відстань 17 км між групами буде через t годин після початку руху другої групи. Тоді за цей час перша група подолає $5t$ км, а друга – $4t$ км, $OB = 4t$. Усього перша група подолає відстань $OA = OM + MA = 5 + 5t$ (км).

Із $\triangle AOB$, за теоремою Піфагора, $AB^2 = OA^2 + OB^2$. Маємо рівняння:
$(5 + 5t)^2 + (4t)^2 = 17^2$,
тобто $41t^2 + 50t - 264 = 0$.
Враховуючи, що $t > 0$, отримаємо $t = 2$ (год).
Отже, відстань 17 км між групами туристів буде о 12-й годині.
Відповідь: о 12-й годині.

А ще раніше...

Прикладні задачі виникли як результат діяльності людини, їх розв'язують уже протягом кількох тисячоліть. Найдавніші відомі нам письмові пам'ятки, що містять правила знаходження площ та об'ємів, було складено в Єгипті та Вавилоні приблизно 4 тис. років тому. Близько 2,5 тис. років тому греки перейняли геометричні знання єгиптян та вавилонян і почали розвивати теоретичну (чисту) математику.

Також у давні часи математики використовували математичні моделі, зокрема і під час геометричних побудов (метод подібності фігур).

Сучасне поняття математичної моделі як опис деякого реального процесу мовою математики стало використовуватися в середині XX ст. у зв'язку з розвитком *кібернетики* – науки про загальні закони добування, зберігання, передавання та обробки інформації. А розділ сучасної математики, що вивчає математичне моделювання реальних процесів, навіть виокремили в окрему науку – *прикладну математику*.

Значний внесок у розвиток прикладної математики зробили наші видатні земляки – математики М. П. Кравчук та М. В. Остроградський.

Розвиток кібернетики в Україні пов'язують з ім'ям академіка Віктора Михайловича Глушкова – видатного українського математика, доктора фізико-математичних наук, професора. У 1953 р. він очолив лабораторію обчислювальної техніки Інституту математики АН УРСР, став її мозковим і енергетичним центром. На базі цієї лабораторії у 1957 р. було створено Обчислювальний центр, а в 1962 р. – Інститут кібернетики АН УРСР, який і очолив В.М. Глушков. Лабораторія відома тим, що в 1951 р. у ній було створено першу в Євразії Малу електронну лічильну машину, а вже в Обчислювальному центрі завершено роботу щодо створення першої в Україні великої електронно-обчислювальної машини «Київ». Сьогодні Інститут кібернетики НАН України має ім'я свого першого очільника – В.М. Глушкова, та є, зокрема, розробником прикладних інформаційних технологій для розв'язування нагальних практичних задач, що виникають під час моделювання економічних процесів, проєктування об'єктів теплоенергетики, розв'язування проблем екології та захисту довкілля.

? Поясніть, як розв'язано задачі у прикладах 1–5.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2

43.1. Одне з двох натуральних чисел на 5 менше від іншого. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 204.

43.2. Добуток двох натуральних чисел дорівнює 180. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 3 більше за інше.

43.3. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 108 см^2, а одна зі сторін на 3 см більша за іншу.

43.4. Ділянку прямокутної форми, одна зі сторін якої на 10 м більша за іншу, треба обгородити парканом. Знайдіть довжину паркана, якщо площа ділянки 375 м^2.

43.5. Сума двох сусідніх сторін прямокутника – 17 см, а його площа – 70 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

3

43.6. Один з катетів прямокутного трикутника на 7 см менший від іншого. Знайдіть периметр трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 13 см.

43.7. Знайдіть площу прямокутника, якщо сума двох його непаралельних сторін дорівнює 14 см, а діагональ дорівнює 10 см.

43.8. Добуток двох послідовних натуральних чисел на 181 більший за їх суму. Знайдіть ці числа.

43.9. Шматок скла має форму квадрата. Коли від нього відрізали смужку 30 см завширшки, його площа стала дорівнювати 2800 см^2. Знайдіть початкові розміри шматка скла.

43.10. Площа прямокутного листа фанери дорівнює 300 дм^2. Його розрізали на дві частини, одна з яких – квадрат, а інша – прямокутник. Знайдіть сторону квадрата, якщо сторона одержаного прямокутника, що не є стороною квадрата, дорівнює 5 дм.

43.11. Знайдіть три послідовних цілих числа, якщо потроєний квадрат меншого з них на 242 більший за суму квадратів двох інших.

43.12. Знайдіть три послідовних цілих числа, якщо квадрат більшого з них на 970 менший від подвоєної суми квадратів двох інших.

43.13. Сума кубів двох натуральних чисел дорівнює 468. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 12.

43.14. Дві дороги перетинаються під прямим кутом. Від перехрестя доріг одночасно рушили два велосипедисти, один у східному напрямку, другий – у північному. Швидкість першого була на 4 км/год більшою за швидкість другого. Через 2 год відстань між ними становила 40 км. Якою була швидкість кожного з велосипедистів?

43.15. Периметр прямокутника дорівнює 44 см, а сума площ квадратів, побудованих на сусідніх сторонах, дорівнює 244 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

4

43.16. Фотокартку розміром 10×15 (у см) помістили в рамку сталої ширини, площа якої 204 см^2. Визначте ширину рамки.

43.17. На земельній ділянці прямокутної форми зі сторонами 8 м і 6 м треба розмістити прямокутну клумбу площею 15 м^2 так, щоб навколо клумби впритул до меж ділянки утворилася доріжка сталої ширини. Визначте, яку ширину матиме ця доріжка.

43.18. На шаховому турнірі було зіграно 45 партій. Кожний з учасників зіграв з кожним по одному разу. Скільки шахістів узяло участь у турнірі?

43.19. До Різдва всі члени родини Петренків підготували одне одному подарунки та поклали їх під ялинку. Скільки осіб у родині Петренків, якщо під ялинкою виявилося 20 подарунків?

43.20. Висота h (у м), на якій через t с опиниться м’яч, котрий підкинули вертикально вгору, обчислюється за формулою $h = v_0 t - 5t^2$, де v_0 – початкова швидкість (у м/с). Після удару футболіста м’яч полетів вертикально вгору і через 1 с опинився на висоті 10 м. Через який час м’яч буде на висоті 10,8 м?

43.21. Футболіст, зріст якого 1,8 м, підбиває м’яч головою, і через 0,4 с м’яч опиняється на висоті 3,8 м. Через який час м’яч буде на висоті 4,25 м?

43.22. Сигнальна ракета, яку випустили вертикально вгору, через 2 с опинилася на висоті 40 м. Через який час вона буде на висоті 44,2 м?

43.23. Для промивання труб завод придбав 6 літрів кислоти. Частину кислоти використали, а вміст посудини з кислотою доповнили до початкового об'єму водою. Іншим разом із цієї посудини використали таку саму кількість суміші, як кислоти першого разу, а посудину знов долили водою до початкового об'єму. Після цього чистої кислоти в посудині стало втричі менше, ніж води. Скільки літрів кислоти використали першого разу?

Вправи для повторення

43.24. Знайдіть корені рівняння:

1) $3x^2 - 12 = 0$;
2) $5x^2 - 9x = 0$;
3) $3x^2 + 10x + 3 = 0$;
4) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

43.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 2)^2 = 5x + 7$;
2) $\frac{1}{4}x^2 - x - 5 = 0$.

43.26. Для яких значень a рівняння $ax^2 + 6x - 4 = 0$ має лише один корінь?

Життєва математика

43.27. За даними Головного управління статистики Київської області, станом на 1 листопада 2019 року в Київській області (без урахування Києва) постійно проживало 1 772 353 особи. А за даними Головного управління статистики в м. Києві, у столиці України на цю саму дату постійно проживало 2 922 794 особи. Скільки відсотків становить населення Києва від загальної кількості населення Київської області, включаючи столицю України? Результат округліть з точністю до сотих відсотка.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

43.28. Доведіть, що з будь-яких ста натуральних чисел можна вибрати кілька (можливо, й одне), сума яких ділитиметься на 100.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 9 (§§ 40–43)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Укажіть рівняння, що є квадратним.

А. $x^3 + x^2 - x = 0$ **Б.** $2x^2 - 3x + 7 = 0$

В. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$ **Г.** $6x - 5 = 0$

2. Якщо дискримінант квадратного рівняння дорівнює 15, то квадратне рівняння...

А. Не має коренів **Б.** Має один корінь
В. Має два різних корені **Г.** Має безліч коренів

3. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 + x - 5 = 0$, тоді

А. $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = -5$ **Б.** $x_1 + x_2 = -1$; $x_1x_2 = 5$
В. $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = 5$ **Г.** $x_1 + x_2 = -1$; $x_1x_2 = -5$

2

4. Укажіть корені рівняння $5x^2 - 4x = 0$.

А. 0; 1,25 **Б.** 0; 0,8 **В.** 0; –0,8 **Г.** 0,8

5. Розв'яжіть рівняння $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

А. $\frac{1}{3}$; 3 **Б.** $-\frac{1}{3}$; –3 **В.** 1; 9 **Г.** Коренів немає

6. Площа прямокутника дорівнює 168 см^2, а одна з його сторін на 2 см менша від іншої. Знайдіть меншу сторону прямокутника.

А. 14 см **Б.** 13 см **В.** 12 см **Г.** 11 см

3

7. Для якого значення a число 2 буде коренем рівняння $ax^2 + 4x - 20 = 0$?

А. –3 **Б.** 3 **В.** 7 **Г.** –7

8. Розв'яжіть рівняння $(x + 2)^2 = 4x + 5$.

А. –1; 1 **Б.** 1 **В.** $2 + \sqrt{5}$; $2 - \sqrt{5}$ **Г.** Коренів немає

9. Дано три послідовних натуральних числа. Потроєний квадрат меншого з них на 50 більший за суму квадратів двох інших. Знайдіть менше з даних чисел.

А. 5 **Б.** 11 **В.** 12 **Г.** 13

4

10. Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{x} - 3)(2x^2 + 3x - 5) = 0$.

А. –2,5; 1; 9 **Б.** –2,5; 1; 3 **В.** 1; 3 **Г.** 1; 9

11. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 - 3x - 7 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $x_1^2 + x_2^2$.

А. 9,25 **Б.** –4,75 **В.** 23 **Г.** Знайти неможливо

12. Під час ділової зустрічі було здійснено 36 потисків руки, причому всі учасники потисли руку одне одному. Скільки осіб узяло участь у діловій зустрічі?

А. 8 **Б.** 9 **В.** 10 **Г.** 18

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та його коренем (А–Г).

Рівняння	*Корені рівняння*
1. $(x+2)(x-4)=-8$	**А.** -1; 2
2. $(2x-1)(2x+1)=3x^2+x+1$	**Б.** 0; 2
3. $\frac{x^2+2x}{4}=\frac{4x-2}{3}$	**В.** 1; 2
	Г. $1\frac{1}{3}$; 2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 40–43

1 **1.** Які з рівнянь є квадратними:

1) $x^2-4x+7=0$; 2) $x^2+\frac{1}{x}=19$;

3) $x^2-15=0$; 4) $7x-13=2x+3$?

2. Скільки різних коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант дорівнює:

1) 9; 2) 0; 3) -16; 4) 23?

3. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння $x^2+2x-17=0$.

2 **4.** Розв'яжіть неповне квадратне рівняння:

1) $2x^2-18=0$; 2) $3x^2-4x=0$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2-5x+2=0$; 2) $x^2-6x+9=0$.

6. Одна зі сторін прямокутника на 4 см більша за іншу, а площа прямокутника дорівнює 192 см^2. Знайдіть його периметр.

3 **7.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+1)^2=4x-5$; 2) $\frac{1}{2}x^2-x-3=0$.

8. Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо квадрат більшого з них на 140 менший від суми квадратів двох інших.

4 **9.** Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{x}-2)(x^2+3x-4)=0$.

Додаткові задачі

4 **10.** Числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2-5x-3=0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2+x_2^2$.

11. На першості школи з баскетболу було зіграно 28 матчів, причому кожна команда зіграла з кожною по одному матчу. Скільки команд брало участь у першості школи з баскетболу?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 9

До § 40

1 **1.** Перепишіть рівняння в зошит і підкресліть однією рискою його перший коефіцієнт, двома – другий і «хвилькою» вільний член (за потреби допишіть коефіцієнтом число 1) за зразком: $\underline{a}x^2 \underline{\underline{+\,b}}x \underset{\sim}{+\,c} = 0$, $\underline{2}x^2 \underline{\underline{-\,1}}x \underset{\sim}{+\,5} = 0$:

1) $7x^2 - 3x + 5 = 0$; 2) $-2x^2 + x - 4 = 0$; 3) $3x + x^2 - 7 = 0$;
4) $3x^2 = 0$; 5) $2x^2 - 7 = 0$; 6) $2x + 5x^2 = 0$.

2 **2.** Розв'яжіть рівняння:

1) $1,8x^2 = 0$; 2) $2x^2 - 32 = 0$; 3) $5x^2 - 7x = 0$;
4) $-x^2 - 9 = 0$; 5) $\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$; 6) $3x^2 - 15 = 0$.

3 **3.** Чи є число $1 - \sqrt{2}$ коренем рівняння $x^2 - 2x - 1 = 0$?

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 + x}{2} + \frac{x - 1}{3} = \frac{5x + 4}{6}$; 2) $\frac{2x^2 - 3x}{4} + \frac{x + 4}{2} = \frac{x + 16}{8}$.

5. Довжина прямокутника у 1,5 раза більша за ширину. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа 54 см^2.

4 **6.** Для яких значень a число 3 є коренем рівняння:

1) $ax^2 - 7x + (a^2 + 21) = 0$; 2) $x^2 + (a^2 - 4)x - 9 = 0$?

7. Для яких значень a рівняння:

1) $x^2 - (4a - 5)x = 0$ має тільки один корінь;
2) $a^2x^2 - a = 0$ має два корені?

До § 41

1 **8.** Знайдіть дискримінант квадратного рівняння та визначте кількість його коренів:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$; 2) $3x^2 - 2x + 3 = 0$;
3) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 4) $7x^2 + x - 1 = 0$.

2 **9.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 7x - 8 = 0$; 2) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;
3) $2x^2 - x - 3 = 0$; 4) $x^2 + 3x - 10 = 0$;
5) $x^2 + 4x + 7 = 0$; 6) $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 6x - 7$; 2) $x^2 + 7x = -12$;
3) $10x = 25x^2 + 1$; 4) $2 - 9x = 5x^2$.

3 **11.** Розв'яжіть рівняння графічно, а потім перевірте розв'язок аналітично:

1) $x^2 = 3 - 2x$;
2) $x^2 = 0,5x + 3$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $5(x-2)=(3x+2)(x-2)$;
2) $\frac{1}{5}x^2-2x-7=0$;
3) $x^2+\sqrt{2}x-12=0$;
4) $\sqrt{3}x^2-2x-\sqrt{3}=0$.

4 **13.** Для якого значення m рівняння має лише один корінь:

1) $x^2+2mx+m=0$;
2) $mx^2-4x+2=0$?

14. Доведіть, що для будь-якого a рівняння $2x^2+ax-3=0$ має два різних корені.

15. Розв'яжіть рівняння відносно x:

1) $x^2-x(3-2a)-6a=0$;
2) $a^2x^2-3ax+2=0$.

16. Знайдіть корені рівняння:

1) $\left|x^2+5x-3\right|=3$;
2) $\left|\left|x^2-5x+1\right|-4\right|=3$;
3) $x^2+x+\frac{4}{x-2}=\frac{4}{x-2}+6$;
4) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3\right)(x^2+2x)=0$.

До § 42

1 **17.** Знайдіть суму та добуток коренів рівняння:

1) $x^2+17x+60=0$;
2) $x^2-12=0$;
3) $2x^2-5x+3=0$;
4) $-x^2-4x+5=0$.

2 **18.** Не використовуючи формулу коренів квадратного рівняння, знайдіть другий корінь, якщо відомо перший:

1) $x^2-7x+10=0$, $x_1=5$;
2) $x^2+3x-18=0$, $x_1=-6$.

3 **19.** Різниця коренів квадратного рівняння $x^2+2x+q=0$ дорівнює 6. Знайдіть ці корені та коефіцієнт q.

20. Доведіть, що рівняння $3x^2+bx-7=0$ для будь-якого значення b має один додатний і один від'ємний корінь.

21. Відношення коренів рівняння $x^2-(p^2-1)+54=0$ дорівнює $2:3$. Знайдіть p та корені рівняння.

22. Один з коренів рівняння $5x^2-6x+c=0$ удвічі більший за інший. Знайдіть c.

4 **23.** Сума квадратів коренів рівняння $3x^2+bx-12=0$ дорівнює 33. Знайдіть b.

24. Для яких значень a сума коренів рівняння $x^2-2ax+(2a-1)=0$ дорівнює сумі квадратів його коренів?

25. Складіть квадратне рівняння, корені якого вдвічі менші від відповідних коренів рівняння $5x^2-16x+4=0$.

До § 43

2 **26.** Периметр прямокутника дорівнює 30 см, а його площа – 54 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

3 **27.** Знайдіть три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 302.

28. Знайдіть п’ять послідовних цілих чисел, якщо відомо, що сума квадратів трьох перших чисел дорівнює сумі квадратів двох останніх.

29. Один з катетів прямокутного трикутника на 2 см менший від іншого, а периметр трикутника дорівнює 24 см. Знайдіть площу трикутника.

4 **30.** У чемпіонаті України з футболу було зіграно 240 матчів. Скільки команд узяло участь у чемпіонаті, якщо всі команди зіграли одна з одною по два матчі?

31. Дно ящика – прямокутник, ширина якого в 1,5 раза менша від довжини. Висота ящика 0,4 м. Знайдіть об’єм ящика, якщо відомо, що площа його дна на 0,66 м^2 менша від суми площ усіх бічних стінок.

32. Відкриту коробку об’ємом 10 500 см^3 виготовили з аркуша картону прямокутної форми, довжина якого вдвічі більша за ширину, вирізавши з кутів аркуша квадрати зі стороною 5 см. Знайдіть початкові розміри аркуша.

Головне в темі 9

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Квадратним рівнянням називають рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a, b і c називають ***коефіцієнтами квадратного рівняння***. Число a називають ***першим коефіцієнтом***, число b – другим коефіцієнтом, число c – ***вільним членом***.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то рівняння називають ***неповним квадратним рівнянням***.

НЕПОВНЕ КВАДРАТНЕ РІВНЯННЯ

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

Якщо $b = 0,\ c = 0$, маємо:
$ax^2 = 0,$
$x^2 = 0,$
$x = 0$

Якщо $b = 0,\ c \neq 0$, маємо:
$ax^2 + c = 0,$
$ax^2 = -c,$
$x^2 = -\dfrac{c}{a}$

- Якщо $-\dfrac{c}{a} > 0$, то $x_1 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$
- Якщо $-\dfrac{c}{a} < 0$, то коренів немає

Якщо $b \neq 0,\ c = 0$, маємо:
$ax^2 + bx = 0,$
$x(ax + b) = 0,$
$x = 0$ або $ax + b = 0,$
отже, $x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{b}{a}$

ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Вираз $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ називають ***дискримінантом квадратного рівняння*** $ax^2 + bx + c = 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Якщо $D > 0$, то $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

Якщо $D = 0$, то $x = -\dfrac{b}{2a}$

Якщо $D < 0$, то коренів немає

ТЕОРЕМА ВІЄТА

Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p;\ x_1 \cdot x_2 = q.}$$

Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.}$$

ТЕМА 10

МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

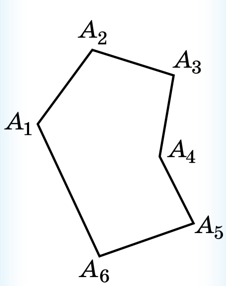
У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** поняття многокутника і його площі; формули для обчислення площі прямокутника і квадрата;
- **дізнаєтеся**, як обчислити суму кутів многокутника, площу паралелограма, ромба, трикутника, трапеції;
- **навчитеся** застосовувати вивчені поняття, властивості та формули до розв'язування задач.

§ 44. Многокутник і його елементи. Сума кутів опуклого многокутника. Многокутник, вписаний у коло, і многокутник, описаний навколо кола

1. Многокутник і його елементи. Види многокутників

Розглянемо фігуру $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, зображену на малюнку нижче. Вона складається з відрізків A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6 і A_6A_1. При цьому відрізки розміщені так, що *сусідні (суміжні) відрізки* (A_1A_2 і A_2A_3, A_2A_3 і A_3A_4, ..., A_6A_1 і A_1A_2) не лежать на одній прямій, а *несусідні (несуміжні) відрізки* не мають спільних точок.



Многокутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$

Точки A_1, A_2, ..., A_6 – **вершини многокутника.**

Вершини A_1 і A_2 – **сусідні вершини** – належать одній стороні многокутника; вершини A_3 і A_6 – **несусідні вершини** – не належать одній стороні многокутника.

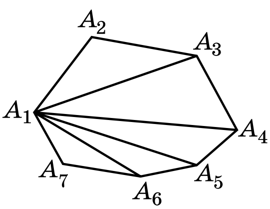
Відрізки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., A_6A_1 – **сторони многокутника.**

Сторони A_1A_2 і A_2A_3, A_2A_3 і A_3A_4 – **сусідні (суміжні)** – мають спільну вершину; сторони A_1A_2 і A_3A_4 – **несусідні (несуміжні)** – не мають спільної вершини.

Кількість вершин многокутника дорівнює кількості його сторін.

Суму довжин усіх сторін многокутника називають його ***периметром***.

Найменша кількість вершин (сторін) у многокутника – три. У цьому разі маємо трикутник. Також окремим видом многокутника є чотирикутник.



Мал. 44.1

Многокутник, що має n вершин, називають *n-кутником*. На малюнку 44.1 зображено семикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.

Відрізок, який сполучає дві несусідні вершини многокутника, називають *діагоналлю* многокутника. На малюнку 44.1 зображено діагоналі многокутника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, що виходять з вершини A_1: A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6.

Приклад 1. Скільки діагоналей має n-кутник?

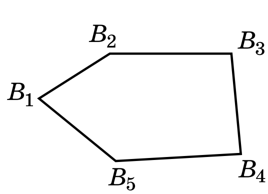
Розв'язання. З кожної вершини n-кутника виходить $(n - 3)$ діагоналі. Усіх вершин n, а кожна діагональ повторюється 2 рази, наприклад, A_1A_3 і A_3A_1. Тому всіх діагоналей у n-кутнику буде $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{n(n-3)}{2}$. ■

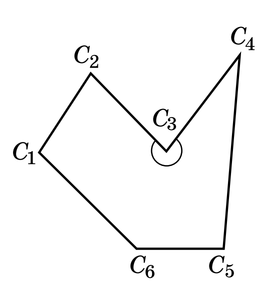
Кути, сторони яких містять сторони многокутника, називають *кутами многокутника*. П'ятикутник $B_1B_2B_3B_4B_5$ має кути $B_5B_1B_2$, $B_1B_2B_3$, $B_2B_3B_4$, $B_3B_4B_5$, $B_4B_5B_1$ (мал. 44.2).

Якщо всі кути многокутника менші від розгорнутого кута, то многокутник називають ***опуклим***, якщо хоча б один кут многокутника більший за розгорнутий, то многокутник називають ***неопуклим***.

Многокутник $B_1B_2B_3B_4B_5$ – опуклий (мал. 44.2), а многокутник $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ – неопуклий (мал. 44.3), оскільки кут при вершині C_3 більший за $180°$.



Мал. 44.2

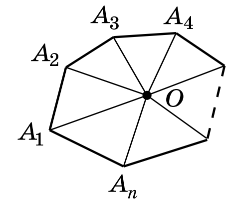


Мал. 44.3

Т Теорема (про суму кутів опуклого n-кутника). **Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n - 2)$.**

Доведення. Виберемо у внутрішній області многокутника довільну точку O та сполучимо її з усіма вершинами n-кутника (мал. 44.4). Одержимо n трикутників, сума всіх кутів яких дорівнює $180° \cdot n$. Сума кутів з вершиною в точці O дорівнює 360°. Сума кутів цього n-кутника дорівнює сумі кутів усіх трикутників без кутів з вершиною в точці O, тобто:

$180°n - 360° = 180°(n - 2)$. ■



Мал. 44.4

Приклад 2. Знайти кути опуклого п'ятикутника, якщо кожен з них, починаючи з другого, менший від попереднього на 5°.

Розв'язання. Для зручності позначимо більший з кутів п'ятикутника – $\angle 1$, решта відповідно – $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$.

1) Нехай $\angle 1 = x$, тоді $\angle 2 = x - 5°$, $\angle 3 = x - 10°$, $\angle 4 = x - 15°$, $\angle 5 = x - 20°$.

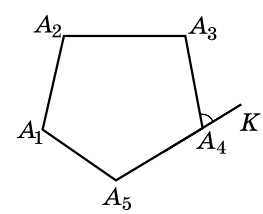
2) Сума кутів опуклого п'ятикутника: $180° \cdot (5 - 2) = 180° \cdot 3 = 540°$.

3) За умовою $x + (x - 5°) + (x - 10°) + (x - 15°) + (x - 20°) = 540°$. Звідки, $x = 118°$.

4) Отже, $\angle 1 = 118°$, $\angle 2 = 118° - 5° = 113°$, $\angle 3 = 118° - 10° = 108°$, $\angle 4 = 118° - 15° = 103°$, $\angle 5 = 118° - 20° = 98°$.

Відповідь: 118°, 113°, 108°, 103°, 98°.

Кути опуклого многокутника іноді називають ще його ***внутрішніми кутами***. Кут, суміжний з внутрішнім кутом многокутника, називають ***зовнішнім кутом многокутника***. На малюнку 44.5 кут A_3A_4K – зовнішній кут многокутника $A_1A_2A_3A_4A_5$ при вершині A_4.



Мал. 44.5

Очевидно, що кожний многокутник має по два зовнішніх кути при кожній вершині.

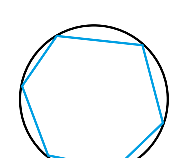
Приклад 3. Довести, що сума зовнішніх кутів будь-якого опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Розв'язання. Сума внутрішнього й зовнішнього кутів при кожній вершині многокутника дорівнює 180°. Тому сума всіх внутрішніх і зовнішніх кутів n-кутника дорівнює $180° \cdot n$. Оскільки сума внутрішніх кутів дорівнює $180°(n - 2)$, то сума зовнішніх кутів дорівнює:

$$180°n - 180°(n - 2) = 180°n - 180°n + 360° = 360°. ■$$

2. Многокутник, вписаний у коло

Многокутник **називають** ***вписаним у коло*****, якщо всі його вершини лежать на колі.** ***Коло*** **при цьому називають** ***описаним*** **навколо многокутника** (мал. 44.6).

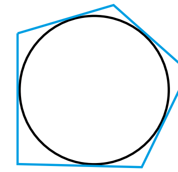


Мал. 44.6

Навколо многокутника не завжди можна описати коло. Якщо це можна зробити, то центром такого кола є точка перетину серединних перпендикулярів до сторін многокутника (як і у випадку трикутника).

3. Многокутник, описаний навколо кола

***Многокутник* називають *описаним навколо кола*, якщо всі його сторони дотикаються до кола. *Коло* при цьому називають *вписаним* у многокутник (мал. 44.7).**



Мал. 44.7

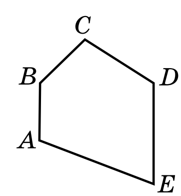
Вписати коло можна не в кожний многокутник. Якщо це можна зробити, то центром такого кола є точка перетину бісектрис внутрішніх кутів многокутника (як і у випадку трикутника).

Яку фігуру називають многокутником? ○ Що називають вершинами, кутами, сторонами многокутника? ○ Що називають периметром многокутника? ○ Які сторони многокутника називають суміжними, які – несуміжними; які вершини – сусідніми, які – несусідніми? ○ Що називають діагоналлю многокутника? ○ Який многокутник називають опуклим, а який – неопуклим? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про суму кутів опуклого n-кутника. ○ Що називають зовнішнім кутом опуклого многокутника? ○ Який многокутник називають вписаним у коло, а який – описаним навколо кола?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

44.1. 1) Назвіть усі вершини, сторони, кути п'ятикутника $ABCDE$ (мал. 44.8).
2) Назвіть деяку пару сусідніх сторін, несусідніх сторін.
3) Назвіть деяку пару сусідніх вершин, несусідніх вершин.
4) Чи є цей п'ятикутник опуклим?



Мал. 44.8

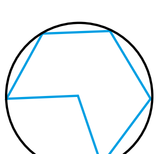
44.2. Накресліть опуклий шестикутник $ABCDEF$. Запишіть усі його вершини, сторони й кути.

44.3. Накресліть опуклий семикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ та проведіть у ньому всі діагоналі, що виходять з вершини A_5.

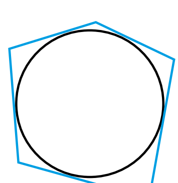
44.4. Накресліть будь-який неопуклий многокутник, у якого два кути більші за 180°.

44.5. Накресліть будь-який неопуклий п'ятикутник.

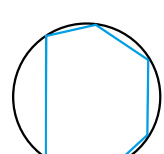
44.6. Знайдіть на малюнках 44.9–44.12 вписані та описані многокутники.



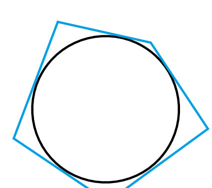
Мал. 44.9



Мал. 44.10



Мал. 44.11



Мал. 44.12

44.7. Накресліть коло та впишіть у нього п'ятикутник.

44.8. Накресліть коло та впишіть у нього будь-який многокутник.

44.9. Накресліть коло та опишіть навколо нього будь-який многокутник.

44.10. Накресліть коло та опишіть навколо нього шестикутник.

2

44.11. Обчисліть суму кутів опуклого n-кутника, якщо:
1) $n = 12$; 2) $n = 18$.

44.12. Обчисліть суму кутів опуклого n-кутника, якщо:
1) $n = 7$; 2) $n = 22$.

44.13. В опуклому дев'ятикутнику всі кути між собою рівні. Знайдіть ці кути.

44.14. В опуклому шестикутнику всі кути між собою рівні. Знайдіть їх.

44.15. (*Усно*.) Чи можна побудувати опуклий п'ятикутник, усі кути якого між собою рівні? Відповідь поясніть.

44.16. (*Усно*.) Чотири кути одного опуклого п'ятикутника відповідно дорівнюють чотирьом кутам другого опуклого п'ятикутника. Чи рівні між собою їхні п'яті кути?

44.17. Чи може найменший кут опуклого п'ятикутника дорівнювати 110°?

44.18. Чи може найбільший кут опуклого шестикутника дорівнювати 115°?

3

44.19. Визначте кути опуклого шестикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 3 : 4 : 5 : 5 : 6 : 7.

44.20. Знайдіть кути опуклого п'ятикутника, якщо кожен з них, починаючи з другого, більший за попередній на 10°.

44.21. Чи існує опуклий многокутник, у якого сума кутів дорівнює: 1) 1080°; 2) 2100°? Якщо так, то знайдіть, скільки в нього сторін і скільки діагоналей.

44.22. Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює: 1) 2500°; 2) 1260°? Якщо так, то знайдіть, скільки в нього вершин і скільки діагоналей.

44.23. Кожен із зовнішніх кутів многокутника дорівнює 30°. Знайдіть кількість його сторін.

44.24. Усі зовнішні кути многокутника – прямі. Визначте вид цього многокутника.

4

44.25. Чи існує многокутник, у якого кількість діагоналей дорівнює кількості сторін?

44.26. Сума внутрішніх кутів многокутника в 5 разів більша за суму його зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині. Скільки вершин у многокутника?

44.27. Знайдіть кількість сторін опуклого многокутника, якщо сума його зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині, на 1980° менша від суми внутрішніх кутів.

44.28. В опуклому п'ятикутнику $ABCDE$ вершину B сполучено рівними між собою діагоналями з двома іншими вершинами. Відомо, що $\angle BEA = \angle BDC$, $\angle ABE = \angle CBD$. Порівняйте периметри чотирикутників $ABDE$ і $BEDC$.

Вправи для повторення

44.29. AK і BM – висоти гострокутного трикутника ABC. Використовуючи подібність трикутників, доведіть, що $AK \cdot BC = AC \cdot BM$.

4 **44.30.** Навколо кола описано трапецію, периметр якої дорівнює P см. Знайдіть середню лінію цієї трапеції.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

44.31. Знайдіть площу прямокутника зі сторонами:
1) 5 см і 9 см; 2) 2,1 дм і 0,8 дм;
3) 7 см і 1 дм; 4) 4,1 дм і 0,32 м.

44.32. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює:
1) 7 см; 2) 29 мм;
3) 4,5 мм; 4) $\frac{5}{8}$ м.

Життєва математика

44.33. Тренажерний майданчик, що має форму прямокутника 8,5 м завдовжки і 3,5 м завширшки, потрібно покрити гумовою плиткою, що має форму квадрата, довжина сторони якого 50 см. Скільки грошей буде витрачено на це, якщо одна плитка коштує 50 грн, а вартість додаткових матеріалів та укладання становить 40 % від вартості плитки?

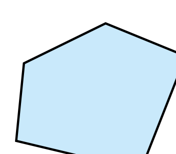
Цікаві задачі – поміркуй одначе

44.34. (*Національна олімпіада Бразилії, 1983 р.*) Доведіть, що всі точки кола можна розбити на дві множини так, що серед вершин будь-якого вписаного в коло прямокутного трикутника знайдуться точки з обох множин.

§ 45. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

1. Поняття площі многокутника. Основні властивості площ

Будь-який многокутник обмежує деяку частину площини. Цю частину площини називають *внутрішньою областю многокутника*. На малюнку 45.1 внутрішню область многокутника зафарбовано. Будемо розглядати многокутник разом з його внутрішньою областю.



Мал. 45.1

Кожному многокутнику можна поставити у відповідність значення його *площі*, вважаючи, що площа многокутника – це та частина площини, яку займає многокутник. Поняття площі нам відомо з повсякденного життя (площа кімнати, площа городу, площа аркуша). Також з поняттям площі ви ознайомилися на уроках математики в 5–6-х класах.

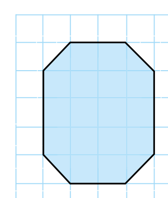
Сформулюємо *основні властивості площі*:

1) площа кожного многокутника є додатним числом;
2) рівні між собою многокутники мають рівні площі;
3) якщо многокутник розбито на кілька многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;
4) одиницею вимірювання площі є площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці вимірювання довжини (такий квадрат ще називають ***одиничним квадратом***).

Наприклад, якщо за одиницю вимірювання довжини взяти 1 см, то відповідною одиницею вимірювання площі буде площа квадрата зі стороною 1 см. Такий квадрат має площу 1 см^2 (читають: *один квадратний сантиметр*). Іншими одиницями вимірювання площі є 1 мм^2, 1 дм^2, 1 м^2, 1 км^2. Для площ ділянок землі використовують одиниці вимірювання *ар* і *гектар*: 1 а = 100 м^2, 1 га = 100 а = 10 000 м^2.

Площу фігури прийнято позначати літерою S.

Приклад 1. Знайти площу многокутника, зображеного на малюнку 45.2, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.



Мал. 45.2

Розв'язання. Внутрішня область многокутника складається із шістнадцяти клітинок зі стороною 1 см завдовжки, площа кожної з яких – 1 см^2, і чотирьох трикутників, площа кожного з яких дорівнює половині площі клітинки. Отже, площа фігури

$$S = 16 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 18 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 18 см^2.

2. Площа прямокутника. Площа квадрата

Площі деяких фігур можна знаходити за формулами. Наприклад, з попередніх класів нам відомо формули для обчислення площі прямокутника, квадрата, круга.

Т Теорема (про площу прямокутника). **Площа S прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою $S = a \cdot b$.**

Доведення цієї теореми є досить громіздким, ознайомитися з ним можна в Додатку 2 (с. 200).

Якщо сторони прямокутника a = 1 дм і b = 6 см, то $S = 10 \times 6 = 60$ (см^2), а якщо $a = \sqrt{8}$ м і $b = \sqrt{2}$ м, то $S = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ (м^2).

Наслідок. Площа S квадрата зі стороною a обчислюється за формулою $S = a^2$.

Приклад 2. Квадрат і прямокутник мають однакові площі. Сторона квадрата дорівнює 6 см, а одна зі сторін прямокутника в 4 рази більша за іншу. Знайти периметр прямокутника.

Розв'язання. Нехай $S_к$ – площа квадрата, $S_п$ – площа прямокутника, P – периметр прямокутника.

1) $S_к = S_п = 6^2 = 36$ (см²).

2) Нехай одна зі сторін прямокутника дорівнює x см, тоді інша дорівнює $4x$ см. За формулою площі прямокутника маємо рівняння: $x \cdot 4x = 36$, тобто $4x^2 = 36$, звідки $x^2 = 9$.

Враховуючи, що $x > 0$, маємо: $x = 3$. Отже, сторони прямокутника дорівнюють 3 см і $4 \cdot 3 = 12$ (см).

3) $P = 2(3 + 12) = 30$ (см).

Відповідь: 30 см.

А ще раніше...

Дещо про вимірювання площ було відомо геометрам багато тисячоліть тому.

2–3 тисячі років до н. е. вавилоняни вже вміли обчислювати площі прямокутника та трапеції у квадратних одиницях. Еталоном обчислення площ для них був квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці довжини.

Для обчислення площ прямокутника, трикутника й трапеції давні єгиптяни 4000 років тому використовували ті самі формули, що й ми зараз.

У «Началах» Евклід не вживав термін «площа», оскільки під терміном «фігура» мав на увазі частину площини, що обмежена замкненою лінією, тобто площу. Евклід не подавав результат вимірювання площі числом, а порівнював площі різних фігур між собою, використовуючи термін «рівновеликі». Так, наприклад, у першій книзі «Начал» можна прочитати задачу 16: «Паралелограми, що містяться на рівних основах і між тими самими паралельними, рівновеликі. Доведіть!».

Як й інші вчені, Евклід досліджував питання перетворення одних фігур в інші, їм рівновеликі. Так, наприклад, він розв'язав задачу про побудову квадрата, рівновеликого даному многокутнику.

Поясніть, що таке площа многокутника. ○ Сформулюйте основні властивості площі. ○ Сформулюйте теорему про площу прямокутника та наслідок з неї.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

45.1. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює:
1) 3 см; 2) 5 дм; 3) 12 см; 4) 8 м.

45.2. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює:
1) 2 см; 2) 6 дм; 3) 9 см; 4) 7 м.

45.3. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють:
1) 7 см і 9 см; 2) 11 дм і 4 дм.

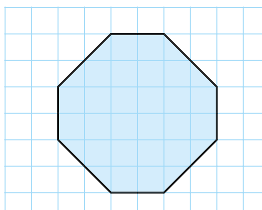
45.4. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють:
1) 8 см і 6 см;
2) 10 дм і 7 дм.

45.5. Площа прямокутника дорівнює 12 см^2, а одна з його сторін – 4 см. Знайдіть іншу сторону прямокутника.

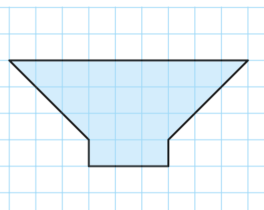
45.6. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 5 см, а його площа – 20 см^2. Знайдіть іншу сторону прямокутника.

2

45.7. (*Усно*.) Знайдіть площі многокутників, зображених на малюнках 45.3 і 45.4, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.



Мал. 45.3



Мал. 45.4

45.8. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:
1) 4 см^2; 2) 25 дм^2.

45.9. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:
1) 9 дм^2; 2) 100 см^2.

45.10. Розміри футбольного поля 110 м × 70 м. Більша чи менша за гектар його площа?

45.11. Квадрат і прямокутник мають однакові площі. Сторона квадрата дорівнює 4 см, а одна зі сторін прямокутника – 2 см. Знайдіть іншу сторону прямокутника.

45.12. Прямокутник і квадрат мають однакові площі. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 4 см, а сторона квадрата – 8 см. Знайдіть іншу сторону прямокутника.

45.13. Знайдіть площу прямокутника, одна зі сторін якого дорівнює 12 см, а діагональ – 13 см.

45.14. Діагональ прямокутника дорівнює 17 см, а одна з його сторін – 8 см. Знайдіть площу прямокутника.

3

45.15. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює:
1) 8 см;
2) d см.

45.16. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

45.17. Периметр прямокутника 26 см, а одна з його сторін на 5 см більша за іншу. Знайдіть сторону квадрата, що має таку саму площу, як і прямокутник.

45.18. Прямокутник і квадрат мають однакові площі. Периметр прямокутника дорівнює 50 см, а одна з його сторін на 15 см більша за іншу. Знайдіть сторону квадрата.

45.19. Як зміниться площа прямокутника, якщо:
1) одну з його сторін збільшити вдвічі;
2) одну з його сторін зменшити втричі;
3) кожну зі сторін збільшити в 4 рази;
4) одну сторону збільшити вдвічі, а іншу – у 5 разів;
5) одну зі сторін збільшити у 12 разів, а іншу – зменшити вдвічі?

45.20. Як зміниться площа квадрата, якщо кожну з його сторін:
1) збільшити в 5 разів; 2) зменшити втричі?

45.21. (*Усно.*) Чи можуть два не рівних між собою квадрати мати однакові площі?

45.22. 1) Чи можуть два не рівних між собою прямокутники мати однакові площі?
2) Два прямокутники мають однакові площі. Чи можна стверджувати, що вони рівні?
3) Два прямокутники мають однакові площі. Чи можна стверджувати, що вони рівні, якщо одна зі сторін першого прямокутника дорівнює стороні іншого?

45.23. Сторони квадратів 15 см і 17 см. Визначте сторону квадрата, площа якого дорівнює різниці площ цих квадратів.

45.24. Сторони квадратів 8 дм і 6 дм. Визначте сторону квадрата, площа якого дорівнює сумі площ цих квадратів.

45.25. Прямокутник, сторони якого 8 м і 6,5 м, розрізали на квадрати зі стороною 0,5 м. Скільки утворилося квадратів?

45.26. Знайдіть площу квадрата, описаного навколо кола, радіус якого r.

45.27. Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони відносяться як 3 : 4, а площа дорівнює 108 см^2.

45.28. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 24 см^2, а одна зі сторін у 1,5 раза більша за іншу.

45.29. Бісектриса AM кута прямокутника $ABCD$ поділяє сторону BC на відрізки BM = 3 см і MC = 5 см. Знайдіть площу прямокутника.

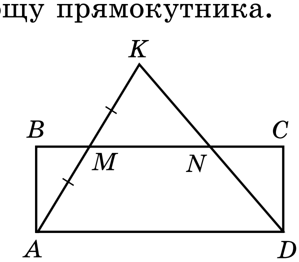
45.30. Бісектриса BK кута прямокутника $ABCD$ поділяє сторону AD на відрізки AK = 7 см і KD = 5 см. Знайдіть площу прямокутника.

45.31. Одна зі сторін прямокутника на 3 см більша за іншу, а діагональ прямокутника дорівнює 15 см. Знайдіть площу прямокутника.

45.32. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 7 см, а його діагональ на 1 см більша за іншу сторону. Знайдіть площу прямокутника.

4

45.33. На малюнку 45.5 $ABCD$ – прямокутник, M – середина відрізка AK. Доведіть, що $S_{ABCD} = S_{AKD}$.



Мал. 45.5

45.34. Відношення площ двох квадратів дорівнює 5. Знайдіть відношення їхніх периметрів.

45.35. Відношення периметрів двох квадратів дорівнює 3. Знайдіть відношення їхніх площ.

Вправи для повторення

45.36. Сума кутів одного опуклого многокутника дорівнює сумі кутів іншого опуклого многокутника. Чи можна стверджувати, що многокутники мають однакову кількість сторін?

45.37. Доведіть, що навколо паралелограма, який не має прямих кутів, не можна описати коло.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

45.38. Накресліть будь-який паралелограм, у якого одна зі сторін дорівнює 5 см, а висота, що проведена до цієї сторони, – 3 см.

Життєва математика

45.39. Басейн має форму прямокутного паралелепіпеда, довжина якого дорівнює 50 м, ширина – 25 м і глибина – 4 м. Скільки плиток квадратної форми розміром 50 см × 50 см потрібно для облицювання дна та стін басейну?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

45.40. Центри трьох рівних між собою кіл є вершинами рівностороннього трикутника. Ці кола не мають спільних точок. Скільки існує кіл, які мають зовнішній або внутрішній дотик із трьома цими колами?

§ 46. Площа паралелограма

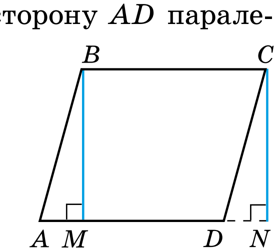
Теорема (про площу паралелограма). **Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.**

Доведення. Нехай $ABCD$ – довільний паралелограм, BM – його висота (мал. 46.1). Доведемо, що площу S паралелограма можна обчислити за формулою $S = AD \cdot BM$.

1) Проведемо висоту CN до прямої, що містить сторону AD паралелограма $ABCD$.

2) $\angle BAM = \angle CDN$ (як відповідні кути при паралельних прямих AB і CD та січній AN). Тому $\triangle BAM = \triangle CDN$ (за гіпотенузою і гострим кутом).

3) Паралелограм $ABCD$ складається з трапеції $MBCD$ і трикутника BAM, а прямокутник $MBCN$ – з трапеції $MBCD$ і трикутника CDN. Оскільки трикутники BAM і CDN між собою рівні, то рівні



Мал. 46.1

також їхні площі, а тому рівними є площі паралелограма $ABCD$ та прямокутника $MBCN$.

4) Площа прямокутника $MBCN$ дорівнює $MN \cdot BM$. Але $AM = DN$, а тому $MN = AD$. Отже, $S = AD \cdot BM$. ■

Зауважимо, що коли основа висоти BM – точка M – збігається з точкою D або лежить на продовженні сторони AD, то доведення теореми є аналогічним.

У загальному вигляді формулу площі S паралелограма можна записати так:

$$\boldsymbol{S = ah_a},$$

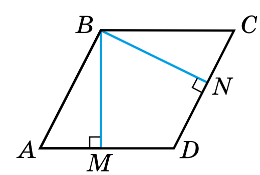
де a – сторона паралелограма, h_a – висота, проведена до неї.

Приклад 1. Довести, що висоти ромба, проведені з однієї вершини, між собою рівні.

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний ромб, BM і BN – його висоти (мал. 46.2). Оскільки ромб є паралелограмом, то

$$S_{ABCD} = AD \cdot BM = DC \cdot BN.$$

Але $AD = DC$, тому $BM = BN$. ■



Мал. 46.2

Приклад 2. Периметр паралелограма дорівнює 36 см, а його висоти – 4 см і 5 см. Знайти площу паралелограма.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCD$ – даний паралелограм, $BM = 4$ см і $BN = 5$ см – його висоти (мал. 46.2).

2) $P_{ABCD} = 2(AD + DC)$. За умовою $2(AD + DC) = 36$, тому $AD + DC = 18$ (см).

3) Нехай $AD = x$ см, тоді $DC = (18 - x)$ см.

4) За формулами площі паралелограма:

$$S_{ABCD} = AD \cdot BM \text{ або } S_{ABCD} = DC \cdot BN.$$

Тому маємо рівняння: $x \cdot 4 = (18 - x) \cdot 5$.

Тобто $4x = 90 - 5x$; звідки $x = 10$ (см).

5) Тоді $S = 10 \cdot 4 = 40$ (см^2).

Відповідь: 40 см^2. ■

Сформулюйте й доведіть теорему про площу паралелограма.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

46.1. Сторона паралелограма дорівнює a, h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 6$ см, $h = 5$ см;
2) $a = 7$ дм, $h = 3$ дм.

46.2. Сторона паралелограма дорівнює a, h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу паралелограма, якщо:
1) $a = 5$ см, $h = 4$ см; 2) $a = 6$ дм, $h = 8$ дм.

46.3. Площа паралелограма дорівнює 24 см^2, а одна з його сторін – 6 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до цієї сторони.

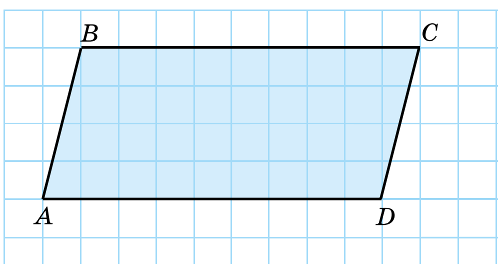
46.4. Площа паралелограма – 18 дм^2, а одна з його висот дорівнює 3 дм. Знайдіть довжину сторони, до якої проведено цю висоту.

2

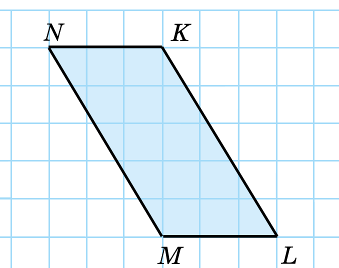
46.5. Діагональ паралелограма 5 см завдовжки перпендикулярна до сторони паралелограма, що дорівнює 6 см. Знайдіть площу паралелограма.

46.6. Сторона паралелограма 8 см завдовжки перпендикулярна до діагоналі паралелограма, що дорівнює 5 см. Знайдіть площу паралелограма.

46.7. Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 46.3 і 46.4, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.

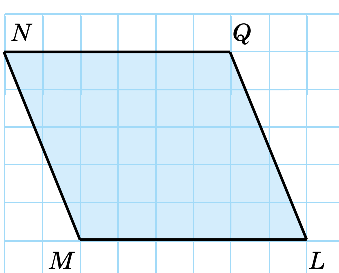


Мал. 46.3

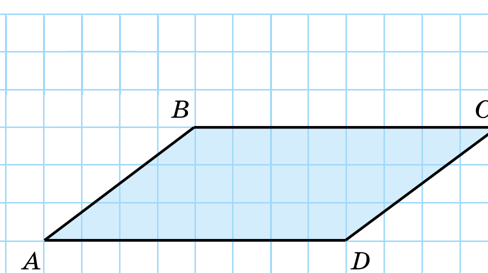


Мал. 46.4

46.8. Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 46.5 і 46.6, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.



Мал. 46.5



Мал. 46.6

46.9. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см, а висота, проведена до іншої сторони, – 4 см. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 36 см^2.

46.10. Площа паралелограма дорівнює 48 см^2. Одна з його сторін – 8 см, а одна з висот – 4 см. Знайдіть периметр паралелограма.

3

46.11. Сторони паралелограма дорівнюють 4 см і 5 см. Висота, проведена до меншої сторони, дорівнює 3 см. Знайдіть висоту, проведену до більшої сторони.

46.12. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 8 см, а висота, проведена до неї, – 6 см. Знайдіть другу сторону паралелограма, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 4,8 см.

46.13. Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см, а його гострий кут – 30°. Знайдіть площу паралелограма.

46.14. Сторона ромба дорівнює 4 см, а один з його кутів – 150°. Знайдіть площу ромба.

46.15. Висота паралелограма втричі більша за сторону, до якої вона проведена. Знайдіть цю висоту, якщо площа паралелограма дорівнює 12 см^2.

46.16. Сторона паралелограма в 5 разів більша за висоту, проведену до неї. Знайдіть цю сторону, якщо площа паралелограма дорівнює 45 см^2.

46.17. Периметр ромба дорівнює P см. Знайдіть його площу, якщо одна з діагоналей ромба утворює зі стороною кут 75°.

4

46.18. Дві сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см, а сума двох його висот, проведених з однієї вершини, дорівнює 15 см. Знайдіть площу паралелограма.

46.19. Дві висоти паралелограма дорівнюють 2 см і 3 см, а сума двох його суміжних сторін – 10 см. Знайдіть площу паралелограма.

46.20. Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 6 см, а кут між ними – 30°. Знайдіть площу паралелограма.

46.21. Дві сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 5 см. Чи може його площа дорівнювати:
1) 41 см^2;
2) 40 см^2;
3) 39 см^2?

46.22. Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а одна з його висот – 6 см. Знайдіть іншу висоту паралелограма. Скільки розв'язків має задача?

Вправи для повторення

46.23. Сума кутів одного з многокутників на 540° більша за суму кутів іншого многокутника. На скільки більше вершин у першого многокутника, ніж у другого?

46.24. Середини сторін ромба послідовно сполучено відрізками. Обчисліть площу чотирикутника, що утворився, якщо діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 10 см.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

46.25. Накресліть два нерівних між собою трикутники, у кожного з яких одна зі сторін дорівнює 4 см, а висоти, проведені до цих сторін, – 2,5 см.

Життєва математика

46.26. Відношення висоти до ширини екрана телевізора дорівнює 9 : 16. Діагональ екрана телевізора – 32 дюйми. Знайдіть ширину екрана в сантиметрах, якщо 1 дюйм = 2,54 см.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

46.27. (*Задача ал-Кораджи.*) Знайдіть площу прямокутника, основа якого вдвічі більша за висоту, а площа чисельно дорівнює периметру[1].

§ 47. Площа трикутника

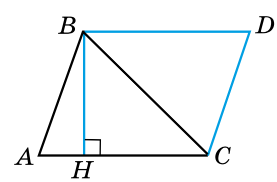
Т Теорема (про площу трикутника). **Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.**

Доведення. Нехай ABC – довільний трикутник, BH – його висота (мал. 47.1). Доведемо, що

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH.$$

1) Проведемо через вершину B пряму, паралельну AC, а через вершину C – пряму, паралельну AB. Одержимо паралелограм $ABDC$.

2) $\triangle ABC = \triangle DCB$ (за трьома сторонами). Тому $S_{ABDC} = 2S_{ABC}$, звідки



Мал. 47.1

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC}.$$

3) Оскільки $S_{ABDC} = AC \cdot BH$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$. ■

У загальному вигляді формулу площі трикутника S можна записати так:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} a h_a},$$

де a – сторона трикутника, h_a – висота, проведена до неї.

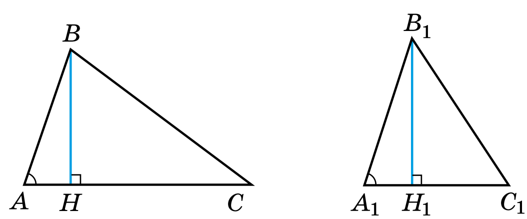
[1] Основою і висотою ал-Кораджи називав дві сторони прямокутника.

Н Наслідок 1. **Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку катетів.**

Н Наслідок 2. **Якщо сторона одного трикутника дорівнює стороні другого, то площі таких трикутників відносяться як їхні висоти, проведені до цих сторін.**

Н Наслідок 3. **Якщо висота одного трикутника дорівнює одній з висот другого трикутника, то площі цих трикутників відносяться як сторони, до яких проведено ці висоти.**

Приклад 1. Довести, що коли кут одного трикутника дорівнює куту другого трикутника, то площі цих трикутників відносяться як добутки сторін, що утворюють цей кут.



Мал. 47.2

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$. Проведемо висоти BH і B_1H_1 (мал. 47.2).

1) Маємо: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{\frac{1}{2}AC \cdot BH}{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \dfrac{AC \cdot BH}{A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} \cdot \dfrac{BH}{B_1H_1}$.

2) $\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1$ (як прямокутні, за гострим кутом). Тому $\dfrac{BH}{B_1H_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$.

3) Маємо: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AC}{A_1C_1} \cdot \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}$. ■

Приклад 2. Знайти площу рівностороннього трикутника зі стороною a.

Розв'язання. Нехай $\triangle ABC$ – рівносторонній зі стороною a завдовжки. Тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$. У рівносторонньому трикутнику $h_a = m_a$, де m_a –

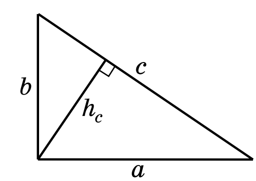
медіана. Але $m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (§ 36, приклад 4), тому й $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Отже, $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Відповідь: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. ■

Приклад 3. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 15 см і 17 см. Знайти висоту трикутника, проведену до найбільшої його сторони.

Розв'язання. Оскільки $17^2 = 8^2 + 15^2$ (289 = 289), то, за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник є прямокутним. Прямий кут лежить проти сторони, що дорівнює 17 см.

Скористаємося малюнком 47.3. Нехай c = 17 см – гіпотенуза, b = 8 см і a = 15 см – катети трикутника, h_c – його висота. Знайдемо h_c.



Мал. 47.3

Площу цього трикутника можна знайти за формулами: $S = \frac{1}{2}a \cdot b$ або $S = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

Тоді $\frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$, тобто $ab = ch_c$, звідки $h_c = \frac{ab}{c}$.

Отже, маємо: $h_c = \frac{8 \cdot 15}{17} = 7\frac{1}{17}$ (см).

Відповідь: $7\frac{1}{17}$ см.

Сформулюйте й доведіть теорему про площу трикутника. ○ Сформулюйте наслідки з теореми про площу трикутника.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

47.1. Сторона трикутника дорівнює a, h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) a = 9 см, h = 6 см; 2) a = 4 дм, h = 7 дм.

47.2. Нехай a – сторона трикутника, h – висота, проведена до цієї сторони. Знайдіть площу трикутника, якщо:
1) a = 7 дм, h = 3 дм; 2) a = 5 см, h = 2 см.

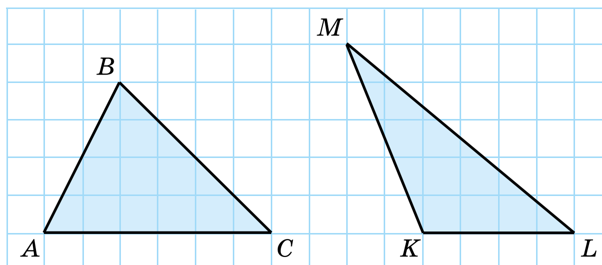
47.3. Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють:
1) 5 см і 4 см; 2) 8 дм і 7 дм.

47.4. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:
1) 6 см і 2 см; 2) 9 дм і 4 дм.

47.5. Площа трикутника дорівнює 36 дм^2, а одна з його висот – 8 дм. Знайдіть довжину сторони, до якої проведено цю висоту.

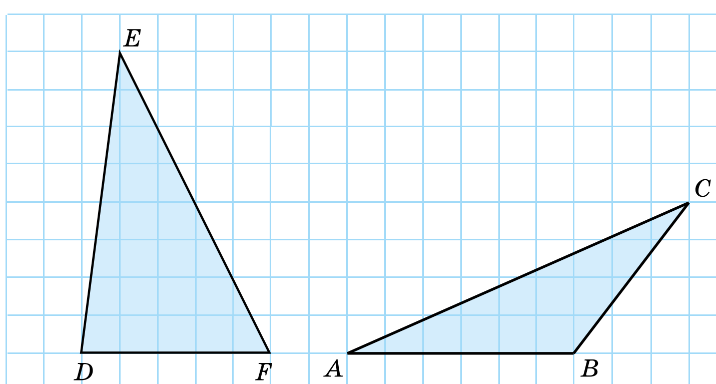
47.6. Площа трикутника дорівнює 20 см^2, а одна з його сторін – 8 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.

47.7. Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 47.4 і 47.5, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.



Мал. 47.4 Мал. 47.5

47.8. Знайдіть площі фігур, зображених на малюнках 47.6 і 47.7, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.



Мал. 47.6 Мал. 47.7

47.9. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а висота, проведена до основи, – 3 см. Знайдіть площу трикутника.

47.10. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 7 см, а гіпотенуза – 25 см. Знайдіть площу трикутника.

47.11. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть площу трикутника.

47.12. Висота рівнобедреного прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 6 см. Знайдіть площу трикутника.

47.13. 1) Діагоналі ромба дорівнюють 8 см і 10 см. Знайдіть площу ромба.
2) Використовуючи формулу площі прямокутного трикутника, виведіть формулу площі ромба через його діагоналі d_1 і d_2.

47.14. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 12 см і 6 см.

47.15. У прямокутнику $ABCD$ $BD = 10$ см. Вершина B віддалена від прямої AC на 3 см. Знайдіть площі трикутника ABC і прямокутника $ABCD$.

47.16. Сторона трикутника вдвічі більша за висоту, проведену до неї. Знайдіть цю сторону, якщо площа трикутника – 16 см^2.

47.17. Висота трикутника в 4 рази більша за сторону, до якої вона проведена. Знайдіть цю висоту, якщо площа трикутника дорівнює 18 см^2.

47.18. На стороні AC трикутника ABC, площа якого дорівнює 12 см^2, узято точку D так, що $AD : DC = 1 : 2$. Знайдіть площі трикутників ABD і DBC.

47.19. На стороні AB трикутника ABC, площа якого дорівнює 20 см^2, узято точку K так, що $AK : KB = 1 : 3$. Знайдіть площі трикутників ACK і CKB.

47.20. $ABCD$ – трапеція, $AD \parallel BC$. Доведіть, що $S_{ACD} = S_{ABD}$.

47.21. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки 4 см і 1 см, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайдіть площу трикутника.

47.22. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки 4 см і 6 см, починаючи від вершини при основі. Знайдіть площу трикутника.

47.23. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.

47.24. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.

4

47.25. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки 9 см і 6 см. Знайдіть площу трикутника.

47.26. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить катет на відрізки 3 см і 5 см. Знайдіть площу трикутника.

47.27. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 6 см. Чи може площа трикутника дорівнювати:
1) 11 см^2; 2) 12 см^2; 3) 13 см^2?

47.28. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою відрізка AB. Знайдіть відношення площ трикутників AOC і BOD, якщо $CO = 3$ см, $DO = 6$ см.

47.29. MN – середня лінія трикутника ABC, $M \in AB$, $N \in AC$. Знайдіть відношення площ трикутників AMN і ABC.

Вправи для повторення

47.30. Навколо кола, радіус якого дорівнює 3 см, описано квадрат. Знайдіть периметр і площу квадрата.

47.31. Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 1 : 2. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 48 см.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

47.32. Накресліть трапецію, основи якої дорівнюють 5 см і 3 см, а висота – 4 см.

Життєва математика

47.33. Чавунна труба має квадратний перетин, її зовнішня ширина дорівнює 25 см, товщина стінок – 3 см. Яка маса одного погонного метра труби? Густина чавуну становить 7,3 г/см^3.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

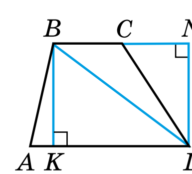
47.34. Стіна 3,5 м заввишки відкидає тінь від сонця 5 м завдовжки. Олександр Семенович, зріст якого 1 м 75 см, стоїть на відстані 10 м від краю тіні. Яку найменшу кількість кроків він має зробити, щоб повністю потрапити в тінь, якщо довжина його кроку 0,5 м?

§ 48. Площа трапеції

Теорема (про площу трапеції). **Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.**

Доведення. Нехай $ABCD$ – довільна трапеція з основами AD і BC, BK – її висота (мал. 48.1). Доведемо, що площу трапеції S можна знайти за формулою:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK.$$



Мал. 48.1

1) Діагональ BD розбиває трапецію на два трикутники ABD і BDC. Тому $S = S_{ABD} + S_{BDC}$.

2) BK – висота трикутника ABD, тому $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BK$.

3) Проведемо у трапеції висоту DN, вона є і висотою трикутника BDC, тому $S_{BDC} = \frac{1}{2} BC \cdot DN$.

4) $DN = BK$ (як висоти трапеції). Отже,

$$S = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2} AD \cdot BK + \frac{1}{2} BC \cdot DN = \frac{AD \cdot BK}{2} + \frac{BC \cdot BK}{2} =$$

$$= \frac{(AD + BC)BK}{2} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK. \blacksquare$$

У загальному вигляді формулу площі трапеції S можна записати так:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$ де a і b – основи трапеції, h – її висота.

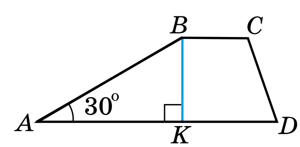
Наслідок. **Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.**

Приклад 1. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $AD = 8$ см, $BC = 5$ см, $AB = 12$ см, $\angle A = 30°$. Знайти площу трапеції.

Розв'язання. 1) Проведемо у трапеції $ABCD$ висоту BK (мал. 48.2). У $\triangle ABK$ ($\angle K = 90°$) $BK = \frac{AB}{2}$ (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°). Отже, $BK = \frac{12}{2} = 6$ (см).

2) $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BK = \frac{8+5}{2} \cdot 6 = 39$ (см^2).

Відповідь: 39 см^2.



Мал. 48.2

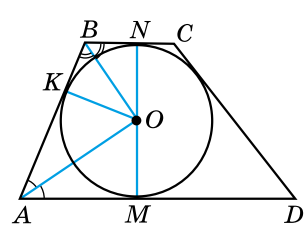
Приклад 2. Периметр трапеції 60 см, а точка дотику вписаного кола ділить одну з бічних сторін на відрізки 9 см і 4 см. Знайти площу трапеції.

Розв'язання. 1) Оскільки трапецію описано навколо кола (мал. 48.3), то

$$AD + BC = AB + CD = \frac{P}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ (см)}.$$

2) Центр вписаного кола – точка O – є точкою перетину бісектрис кутів трапеції, отже, і кутів BAD і ABC. Тому $\angle AOB = 90°$ (див. задачу 14.30, част. 1, с. 132).

3) Точка K – точка дотику кола до сторони AB, тому $OK \perp AB$. Отже, OK – радіус кола й висота прямокутного трикутника BOA, проведена до гіпотенузи. За теоремою про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику, маємо:
$OK^2 = AK \cdot KB = 9 \cdot 4 = 36$, звідки $OK = 6$ (см).



Мал. 48.3

4) MN – діаметр кола, а також висота трапеції, $MN = 2 \cdot OK = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

5) Отже, $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot MN = \frac{30}{2} \cdot 12 = 180$ (см^2).

Відповідь: 180 см^2.

Сформулюйте й доведіть теорему про площу трапеції. ○ Сформулюйте наслідок із цієї теореми.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

48.1. Нехай a і b – основи трапеції, h – її висота. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 8$ см, $h = 5$ см;
2) $a = 7$ дм, $b = 3$ дм, $h = 6$ дм.

48.2. Нехай a і b – основи трапеції, h – її висота. Знайдіть площу трапеції, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 3$ см, $h = 4$ см;
2) $a = 1$ дм, $b = 9$ дм, $h = 8$ дм.

48.3. Знайдіть площу трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 7 см, а висота – 6 см.

48.4. Висота трапеції дорівнює 4 см, а середня лінія – 10 см. Знайдіть площу трапеції.

2

48.5. Основи трапеції дорівнюють 7 см і 13 см, а її площа – 40 см^2. Знайдіть висоту трапеції.

48.6. Площа трапеції дорівнює 36 см^2, а її основи – 8 см і 10 см. Знайдіть висоту трапеції.

48.7. Висота трапеції дорівнює 6 см, а її площа – 24 см^2. Знайдіть суму основ трапеції.

48.8. Висота трапеції дорівнює 8 см, а площа – 40 см^2. Знайдіть середню лінію трапеції.

48.9. Площа трапеції дорівнює 63 см^2, одна з її основ – 5 см, а висота – 7 см. Знайдіть другу основу трапеції.

48.10. Одна з основ трапеції дорівнює 17 см, а її висота – 3 см. Знайдіть другу основу трапеції, якщо її площа дорівнює 33 см^2.

48.11. $ABCD$ ($AD \parallel BC$) – рівнобічна трапеція з тупим кутом B, BK – її висота, $AK = 3$ см, $BC = 5$ см, $BK = 4$ см. Знайдіть площу трапеції.

48.12. $ABCD$ ($AB \parallel CD$) – прямокутна трапеція з тупим кутом D, DK – висота трапеції, $AK = 4$ см, $CD = 7$ см, $DK = 5$ см. Знайдіть площу трапеції.

3

48.13. Площа прямокутної трапеції дорівнює 30 см^2, її периметр – 28 см, а менша бічна сторона – 3 см. Знайдіть більшу бічну сторону.

48.14. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 32 см, її бічна сторона – 5 см, а площа – 44 см^2. Знайдіть висоту трапеції.

48.15. У трапеції $ABCD$ менша основа AB дорівнює 6 см, а висота трапеції – 8 см. Знайдіть площу трапеції, якщо площа трикутника ADC дорівнює 40 см^2.

48.16. У трапеції $ABCD$ основи AD і BC дорівнюють відповідно 10 см і 8 см. Площа трикутника ABD дорівнює 25 см^2. Знайдіть площу трапеції.

48.17. Площа трапеції дорівнює 36 см^2, а її висота – 6 см. Знайдіть основи трапеції, якщо вони відносяться як 1 : 3.

48.18. Основи трапеції відносяться як 1 : 4. Знайдіть ці основи, якщо висота трапеції дорівнює 4 см, а площа трапеції – 50 см^2.

48.19. Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють a см і b см, а бічна сторона c см завдовжки утворює з меншою основою кут 150°.

48.20. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює 6 см й утворює з меншою діагоналлю кут 45°. Знайдіть площу трапеції, якщо її тупий кут дорівнює 135°.

48.21. У прямокутній трапеції менша бічна сторона дорівнює 4 см й утворює з меншою діагоналлю кут 45°. Гострий кут трапеції також дорівнює 45°. Знайдіть площу трапеції.

48.22. Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює 13 см, а більша основа – 12 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 4 см.

48.23. Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює 17 см, а висота – 8 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 5 см.

48.24. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 38 см і 52 см, а бічна сторона – 25 см. Знайдіть площу трапеції.

48.25. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 18 см, бічна сторона – 13 см, а висота – 12 см. Знайдіть площу трапеції.

48.26. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 6 см, бічна сторона – 5 см, а висота – 3 см. Знайдіть площу трапеції.

4

48.27. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 10 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 2 см і 3 см. Знайдіть площу трапеції.

48.28. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 18 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 5 см і 6 см. Знайдіть площу трапеції.

48.29. Діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, а висота дорівнює h см. Знайдіть площу трапеції.

48.30. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, а основи дорівнюють 10 см і 4 см.

48.31. Точка дотику кола, вписаного у прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки 1 см і 4 см. Знайдіть площу трапеції.

Вправи для повторення

48.32. Обчисліть суму кутів опуклого 17-кутника.

48.33. Скільки плиток квадратної форми зі стороною 20 см знадобиться, щоб викласти ними підлогу в кімнаті прямокутної форми, довжина якої дорівнює 4,6 м, а ширина – 3,4 м?

48.34. Один з кутів ромба на 120° більший за другий, а сторона ромба дорівнює 6 см. Знайдіть площу ромба.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

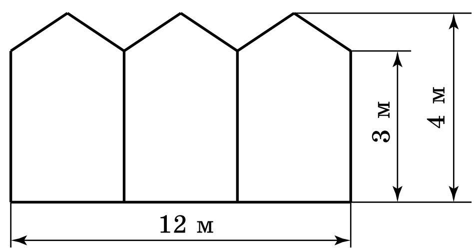
48.35. Розкладіть на множники многочлен:

1) $4x^2 - 5x$; 2) $7x^2 + 14x$; 3) $x^2 - 36$;

4) $\frac{1}{9}x^2 - 25$; 5) $x^2 - 10x + 25$; 6) $16x^2 + 8x + 1$.

Життєва математика

48.36. Скільки кілограмів фарби потрібно, щоб пофарбувати паркан (мал. 48.4) з одного боку, якщо для фарбування 1 м^2 паркана витрачається 250 г фарби?



Мал. 48.4

Цікаві задачі – поміркуй одначе

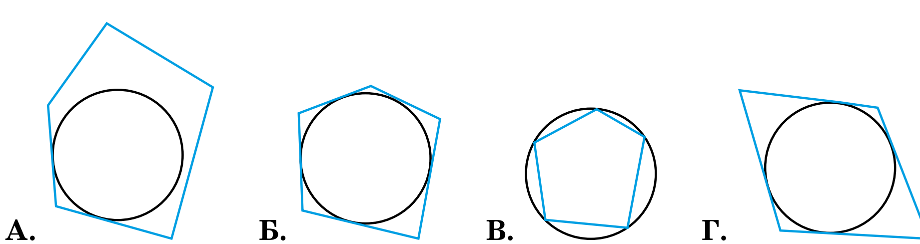
48.37. З трьох квадратів, довжина сторони кожного з яких є цілим числом сантиметрів, складено прямокутник, площа якого 150 см^2. Знайдіть периметр прямокутника.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 10 (§§ 44–48)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. На якому з малюнків (А–Г) зображено п’ятикутник, описаний навколо кола?



2. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють 7 см і 4 см.

А. 28 см **Б.** 22 см **В.** 28 см^2 **Г.** 11 см^2

3. Знайдіть площу паралелограма, одна зі сторін якого дорівнює 8 см, а висота, проведена до цієї сторони, – 5 см.

А. 40 см^2 **Б.** 26 см^2 **В.** 20 см^2 **Г.** 13 см^2

2

4. Обчисліть суму внутрішніх кутів опуклого 10-кутника.

А. 360° **Б.** 1800° **В.** 1620° **Г.** 1440°

5. Знайдіть сторону трикутника, якщо його площа дорівнює 24 см^2, а висота, проведена до цієї сторони, – 6 см.

А. 4 см **Б.** 18 см **В.** 8 см **Г.** 12 см

6. Одна з основ трапеції дорівнює 5 см, а її висота – 4 см. Знайдіть другу основу трапеції, якщо її площа дорівнює 28 см^2.

А. 11 см **Б.** 2 см **В.** 7 см **Г.** 9 см

3

7. Прямокутник, сторони якого дорівнюють 16 дм і 9,5 дм, розрізали на квадрати зі стороною 0,5 дм. Скільки отримали квадратів?

А. 612 **Б.** 608 **В.** 51 **Г.** 618

8. Більша діагональ прямокутної трапеції дорівнює 13 см, а висота – 5 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 8 см.

А. 50 см^2 **Б.** 52,5 см^2 **В.** 100 см^2 **Г.** 62,5 см^2

9. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 10 см.

А. 80 см^2 **Б.** 20 см^2 **В.** 40 см^2 **Г.** 36 см^2

4

10. У прямокутному трикутнику гіпотенуза точкою дотику вписаного кола ділиться на відрізки 3 см і 10 см. Знайдіть площу трикутника.

А. 60 см^2 **Б.** 50 см^2 **В.** 40 см^2 **Г.** 30 см^2

11. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 12 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 2 см і 3 см. Знайдіть площу трапеції.

А. 75 см^2 **Б.** 50 см^2 **В.** 100 см^2 **Г.** 150 см^2

12. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 9 см, а сума двох його висот, проведених з однієї вершини, – 7 см. Знайдіть площу паралелограма.

А. 108 см^2 **Б.** 48 см^2 **В.** 36 см^2 **Г.** 27 см^2

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3

13. Установіть відповідність між інформацією про многокутник (1–3) та кількістю його сторін (А–Г).

Інформація про многокутник	*Кількість сторін многокутника*
1. Сума внутрішніх кутів дорівнює 900°	**А.** 5
2. Усі зовнішні кути рівні між собою і становлять по 45°	**Б.** 6
3. Многокутник має 9 діагоналей	**В.** 7
	Г. 8

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 44–48

1 **1.** Накресліть коло, впишіть у нього п'ятикутник та опишіть навколо нього семикутник.

2. Знайдіть площу прямокутника, сторони якого дорівнюють 6 см і 9 см.

3. Знайдіть площу паралелограма, одна зі сторін якого дорівнює 7 см, а висота, проведена до цієї сторони, – 4 см.

2 **4.** Обчисліть суму кутів опуклого 15-кутника.

5. Площа трикутника дорівнює 30 см^2, а одна з його сторін – 12 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.

6. Площа трапеції дорівнює 35 см^2, одна з її основ – 8 см, а висота – 7 см. Знайдіть іншу основу трапеції.

3 **7.** Прямокутник, сторони якого 12 дм і 7,5 дм, розрізали на квадрати зі стороною 0,5 дм. Скільки утворилося квадратів?

8. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 12 см.

4 **9.** Менша основа трапеції дорівнює 12 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 3 см і 5 см. Знайдіть площу трапеції.

Додаткові завдання

4 **10.** Відношення площ двох квадратів дорівнює 7. Знайдіть відношення їхніх периметрів.

11. Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 6 см, а сума двох його суміжних сторін – 22 см. Знайдіть площу паралелограма.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 10

До § 44

1 **1.** Накресліть опуклий п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ та неопуклий шестикутник $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$. Проведіть усі діагоналі в п'ятикутнику, обчисліть їхню кількість.

2. Накресліть коло. Впишіть у нього та опишіть навколо нього будь-які многокутники з однаковою кількістю сторін.

2 **3.** Усі зовнішні кути п'ятикутника між собою рівні. Скільки градусів мають внутрішні кути цього п'ятикутника?

4. Знайдіть, скільки діагоналей у восьмикутника.

3 **5.** Усі внутрішні кути n-кутника дорівнюють по 135°. Знайдіть n.

6. Як зміниться сума внутрішніх кутів опуклого многокутника, якщо кількість його сторін збільшиться на дві?

4 **7.** Сума кутів опуклого n-кутника у k разів більша за суму кутів опуклого $(n - 1)$-кутника (k – натуральне число). Знайдіть k.

До § 45

8. Порівняйте площу квадрата зі стороною 6 см з площею прямокутника зі сторонами 4 см і 9 см.

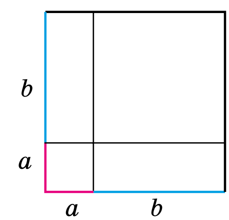
9. 1) Накресліть довільний прямокутник, площа якого 12 см^2.
2) Накресліть квадрат, площа якого 9 см^2.

10. На продовженні сторони AD квадрата $ABCD$ за вершину A взято точку P, $CP = 10$ см, $\angle CPD = 30°$. Знайдіть площу квадрата.

11. 1) Периметр квадрата дорівнює P см. Знайдіть його площу.
2) Площа квадрата дорівнює S см^2. Знайдіть його периметр.
3) Площа квадрата чисельно дорівнює його периметру. Знайдіть сторону квадрата.

12. На малюнку 1 зображено геометричне доведення формули $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Поясніть його.

13. Скільки треба плиток прямокутної форми зі сторонами 30 см і 20 см, щоб викласти ними частину стіни, що має форму прямокутника зі сторонами 2,4 м і 3,6 м?



Мал. 1

14. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону на відрізки 4 см і 5 см. Знайдіть площу цього прямокутника. Скільки розв’язків має задача?

15. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано квадрат $MNKL$ так, що точки N і K належать гіпотенузі (причому N лежить між A і K), M належить AC, L належить BC, $AN = m$, $KB = n$. Знайдіть площу квадрата.

До § 46

16. Накресліть паралелограм, одна зі сторін якого дорівнює 4 см, а висота, проведена до неї, – 2 см. Знайдіть площу паралелограма.

17. Знайдіть площу ромба $ABCD$, у якого $AB = 4$ см, а висота, проведена до сторони BC, дорівнює 3 см.

18. У паралелограмі $ABCD$ $\angle B$ – тупий, CE – висота паралелограма, $\angle DCE = 60°$, $AD = 5$ см, $AB = 4$ см. Знайдіть площу паралелограма.

19. Чи існує паралелограм, у якого:
1) сторони дорівнюють 6 см і 8 см, а висоти – 3 см і 4 см;
2) сторони дорівнюють 9 см і 6 см, а висоти – 4 см і 2 см?

20. Квадрат і ромб мають рівні між собою сторони, а тупий кут ромба дорівнює 150°. Яка з фігур має більшу площу? У скільки разів?

21. У паралелограмі $ABCD$ гострий кут дорівнює 30°, а бісектриса цього кута, перетинаючи сторону, ділить її навпіл. Знайдіть площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 24 см.

22. У ромб $ABCD$ вписано коло, радіус якого 8 см. K – точка дотику кола до сторони AB. Знайдіть площу ромба, якщо $AK : KB = 1 : 4$.

До § 47

23. Накресліть три різних трикутники (гострокутний, прямокутний і тупокутний), у кожного з яких одна зі сторін дорівнює 3 см, а висота, проведена до неї, – 4 см. Знайдіть площу кожного з трикутників.

24. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 9 см, а висота, проведена до більшої з них, – 4 см. Знайдіть висоту, проведену до меншої з них.

25. У трикутнику ABC: $\angle C = 135°$, $AC = 4$ см, BD – висота трикутника, $CD = 3$ см. Знайдіть площу трикутника.

26. У трикутнику проведено всі середні лінії. Доведіть, що площа кожного із чотирьох трикутників, які утворилися, дорівнює $\frac{1}{4}$ площі початкового трикутника.

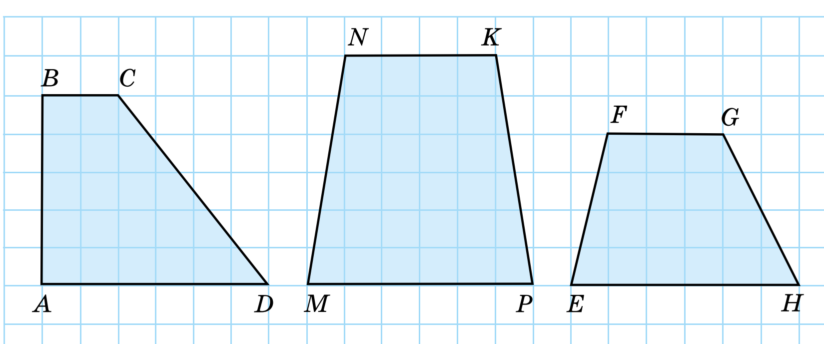
27. CK – медіана рівнобедреного трикутника ABC з основою AB. На цій медіані вибрано деяку точку M. Доведіть, що $S_{AMC} = S_{BMC}$.

До § 48

28. Накресліть трапецію, основи якої 4 см і 2 см, а висота – 3 см. Знайдіть площу цієї трапеції.

29. Площа трапеції дорівнює 32 см^2, а її середня лінія – 8 см. Знайдіть висоту трапеції.

30. Знайдіть площі трапецій, зображених на малюнках 2–4. Довжина однієї клітинки дорівнює 0,5 см.



Мал. 2 Мал. 3 Мал. 4

31. Висоти, проведені з вершин меншої основи рівнобічної трапеції, ділять більшу основу на три відрізки, сума двох з яких дорівнює третьому. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа й висота дорівнюють по a см.

32. Обчисліть площу прямокутної трапеції, у якої дві менші сторони дорівнюють по b см, а гострий кут – 45°.

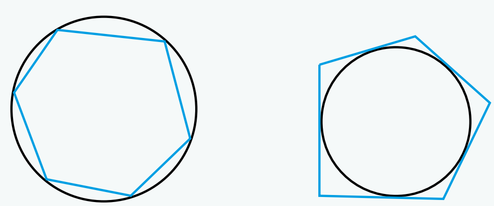
33. EF – середня лінія трикутника ABC, $EF \parallel AB$. У скільки разів площа трикутника CEF менша від площі трапеції $AEFB$?

34. У рівнобічну трапецію вписано коло, яке ділить бічну сторону на відрізки 2 см і 8 см завдовжки. Знайдіть площу трапеції.

Головне в темі 10

МНОГОКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. СУМА КУТІВ ОПУКЛОГО МНОГОКУТНИКА. МНОГОКУТНИК, ВПИСАНИЙ У КОЛО, І МНОГОКУТНИК, ОПИСАНИЙ НАВКОЛО КОЛА

Теорема (про суму кутів опуклого n-кутника). **Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n - 2)$.**



Многокутник – ***вписаний у коло***, якщо всі його вершини лежать на колі. ***Коло*** при цьому – ***описане*** навколо многокутника.

Многокутник – ***описаний навколо кола***, якщо всі його сторони дотикаються до кола. ***Коло*** при цьому – ***вписане*** в многокутник.

ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКА. ПЛОЩА ПРЯМОКУТНИКА

Сформулюємо *основні властивості площі*:

1) площа кожного многокутника є додатним числом;

2) рівні між собою многокутники мають рівні площі;

3) якщо многокутник розбито на кілька многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;

4) одиницею вимірювання площі є площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці вимірювання довжини (такий квадрат – одиничний квадрат).

Теорема (про площу прямокутника). **Площа S прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою**

$$S = a \cdot b.$$

Наслідок. **Площа S квадрата зі стороною a обчислюється за формулою $S = a^2$.**

ПЛОЩА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Теорема (про площу паралелограма). **Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.**

У загальному вигляді формулу площі S паралелограма записують так:

$$S = ah_a,$$

де a – сторона паралелограма, h_a – висота, проведена до неї.

ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Теорема (про площу трикутника). **Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.**

У загальному вигляді формулу площі трикутника S записують так:

$$S = \frac{1}{2}ah_a,$$

де a – сторона трикутника, h_a – висота, проведена до неї.

ПЛОЩА ТРАПЕЦІЇ

Теорема (про площу трапеції). **Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.**

У загальному вигляді формулу площі трапеції S записують так:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

де a і b – основи трапеції, h – її висота.

Наслідок. **Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.**

Найвеличніший геометр XX століття

На початку 1980-х років Американське математичне товариство видало багатотомник «Видатні математики XX століття». Четвертий його том було присвячено монографії «Проблема Монжа–Ампера» – праці Олексія Васильовича Погорєлова. В анотації до цього тому Погорєлова було названо «найвеличнішим геометром XX століття».

Саме так було оцінено внесок нашого видатного вченого в розвиток геометрії, однієї з найдавніших наук на Землі.

Народився Олексій Погорєлов 3 березня 1919 року в маленькому місті Короча тодішньої Білгородської губернії. У 1929 році сім'я Погорєлових переїжджає до Харкова. Батьки Олексія працювали спочатку на будівництві Харківського тракторного заводу, а потім на цьому заводі. Родина Погорєлових протягом довгого часу мешкала в крихітній, відгородженій від сусідів кімнатці барака. Ліжок на всіх у родині бракувало, і батькові доводилося спеціально працювати в нічну зміну, щоб його діти могли виспатися в нормальних умовах. Незважаючи на складні умови проживання, Олексій добре навчався у школі з усіх предметів, але найбільше його цікавила математика. Згодом на одному з ювілеїв шкільні друзі згадували, що ще у школі однокласники дали йому прізвисько Паскаль.

О. В. Погорєлов
(1919–2002)

У 1935 році в Києві було започатковано проведення математичних олімпіад[2]. А в 1937-му харківський десятикласник Олексій Погорєлов став переможцем такої олімпіади, і його запросили на навчання до Харківського державного університету (нині – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна). Отже, він став студентом математичного відділення. Олексій був дуже обдарованим студентом, про що свідчить той факт, що в 1943–1944 роках під час Другої світової війни його направили на навчання до Військово-повітряної академії ім. Жуковського – в один із найелітніших тодішніх військово-навчальних і наукових центрів. Після стажування в діючій армії та закінчення академії в 1945 році Олексія Погорєлова направляють на конструкторську роботу у відомий Центральний аерогідродинамічний інститут у Москві. У той самий час Олексій Васильович заочно навчається в аспірантурі Математичного інституту Московського держуніверситету. Саме в ці роки класичний математик-геометр Погорєлов сформувався і як інженер-конструктор, що має справу з конкретною технікою. У 1947 році Погорєлов починає викладацьку діяльність у Харківському університеті. У 1950-му йому було присвоєно звання професора. Із цього часу й протягом наступних двадцяти років його діяльність було відзначено багатьма державними та міжнародними преміями, він був членом-кореспондентом, а потім і дійсним членом Академії наук України та академіком АН СРСР.

[2] Про становлення і розвиток українського математичного олімпіадного руху можна знайти в підручнику «Математика (інтегрований курс). 7 клас», частина 2 (автор – О. С. Істер, видавництво «Генеза», 2024 р., с. 48).

У 1960 році в Харкові було створено Фізико-технічний інститут низьких температур (ФТІНТ), і Погорєлов очолив там відділ геометрії. В інституті він пропрацював 40 років, створивши новий напрям у механіці та геометрії – геометричну теорію стійкості тонких пружних оболонок, пошук якої розпочав ще академік О. Д. Александров, видатний математик, якого Погорєлов уважав своїм наставником у науці. Ця теорія підтвердилася під час досліджень, проведених у ФТІНТі. Інженерний талант класичного математика знайшов своє відображення у двох упроваджених авторських свідоцтвах, співпраці з машинобудівниками під час створення унікальних кріотурбогенераторів і надпровідних двигунів. А скільки оригінальних технічних ідей Погорєлова не було доведено до впровадження й офіційного визнання з виправдань, що це потребувало немалого клопоту та зусиль! Серед таких винаходів – безінерційна спінінгова котушка, незвичний новаторський плуг, двигун внутрішнього згоряння принципово нової схеми.

Але головною справою його життя, безперечно, була чиста математика, геометрія. Цілу бібліотеку – близько 40 монографій, перекладених мовами багатьох народів світу, залишив нам у спадок Олексій Васильович. Серед них є й такі, які зрозуміє лише коло спеціалізованих фахівців, а є й підручники з геометрії, написані для десятків тисяч студентів-математиків. А найвідомішим і найвизначнішим для класичної математики став його підручник з геометрії для середньої загальноосвітньої школи, перше видання якого вийшло друком у 1972 році та за яким протягом майже 20 років навчалися десятки мільйонів школярів СРСР та ще кілька років поспіль – українські школярі після здобуття Україною незалежності.

Помер Олексій Васильович Погорєлов у грудні 2002 року.

Нашому видатному земляку вдалося розв'язати задачі, які сформулювали найвідоміші математики XIX та початку XX століття: Коші, Дарбу, Гільберт, Вейль, Мінковський, Кон-Фессет і Бернштейн.

ТЕМА 11

КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН. РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **ознайомитеся** з поняттям квадратного тричлена;
- **навчитеся** розв’язувати рівняння, що зводяться до квадратних; розкладати квадратний тричлен на множники; розв’язувати текстові та прикладні задачі, математичними моделями яких є дробові раціональні рівняння.

§ 49. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

1. Квадратний тричлен

Вирази $5x^2 - 2x + 7$ і $-x^2 + 3x - 9$ є многочленами другого степеня з однією змінною стандартного вигляду. Такі многочлени називають ***квадратними тричленами***.

Квадратним тричленом **називають многочлен вигляду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a \neq 0$.**

Наприклад, вираз $x^2 + 2x - 3$ є квадратним тричленом, у якого $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

2. Корені та дискримінант квадратного тричлена

Приклад 1. Розглянемо квадратний тричлен $5x^2 - 3x - 8$. Якщо $x = -1$, то його значення дорівнює нулю. Дійсно, $5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 8 = 0$. У такому разі число -1 називають ***коренем*** цього ***квадратного тричлена***.

Коренем квадратного тричлена **називають значення змінної, для якого значення тричлена дорівнює нулю.**

Щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв’язати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Приклад 2. Знайти корені квадратного тричлена $3x^2+2x-16$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $3x^2+2x-16=0$. Одержимо $x_1=2$; $x_2=-2\frac{2}{3}$. Отже, коренями квадратного тричлена $3x^2+2x-16$ є числа 2 і $-2\frac{2}{3}$.

Відповідь: 2; $-2\frac{2}{3}$.

Квадратний тричлен, як і квадратне рівняння, може мати два різних корені, один корінь (тобто два однакових корені) або не мати коренів. Це залежить від знака дискримінанта квадратного рівняння $D=b^2-4ac$, який також називають і ***дискримінантом квадратного тричлена*** $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$.

Якщо $D>0$, то квадратний тричлен має два різних корені, якщо $D=0$, то квадратний тричлен має один корінь (тобто два однакових корені), якщо $D<0$, то квадратний тричлен не має коренів.

3. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

Якщо корені квадратного тричлена відомі, то його можна розкласти на лінійні множники, тобто на множники, які є многочленами першого степеня.

Т Теорема (про розкладання квадратного тричлена на множники). **Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, то справджується рівність**

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).}$$

Доведення. Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ (за теоремою Вієта).

Для доведення теореми розкриємо дужки у правій частині рівності:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-x_1x-xx_2+x_1x_2)=a(x^2-x(x_1+x_2)+x_1x_2)=$$
$$=a\left(x^2-x\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a}\right)=ax^2+bx+c.$$

Отже, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. ■

Якщо квадратний тричлен не має коренів, то його не можна розкласти на лінійні множники.

Приклад 3. Розкласти на множники квадратний тричлен:

1) $-2x^2 + 3x + 5$; 2) $x^2 - 2x + 5$; 3) $3x^2 - 12x + 12$.

Розв'язання. 1) Коренями тричлена $-2x^2 + 3x + 5$ є числа -1 і $2{,}5$. Тому $-2x^2 + 3x + 5 = -2(x + 1)(x - 2{,}5)$. Знайдений результат можна записати інакше, помноживши перший у розкладі множник -2 на двочлен $x - 2{,}5$. Матимемо:

$$-2x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(5 - 2x).$$

2) Квадратне рівняння $x^2 - 2x + 5 = 0$ не має коренів. Тому квадратний тричлен $x^2 - 2x + 5$ на множники розкласти не можна.

3) Квадратне рівняння $3x^2 - 12x + 12 = 0$ має два однакових корені $x_1 = x_2 = 2$. Тому $3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)(x - 2) = 3(x - 2)^2$.

Відповідь: 1) $-2(x+1)(x-2{,}5)$; 2) розкласти на множники не можна; 3) $3(x-2)^2$.

Неважко помітити, що коли квадратний тричлен має два однакових корені, то він є квадратом двочлена або добутком деякого числа на квадрат двочлена.

Приклад 4. Скоротити дріб $\dfrac{4x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники квадратний тричлен $4x^2 - 2x - 2$. Його коренями є числа 1 і $-0{,}5$. Тому

$$4x^2 - 2x - 2 = 4(x - 1)(x + 0{,}5).$$

Отже, $\dfrac{4x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1} = \dfrac{4(x - 1)(x + 0{,}5)}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{4(x + 0{,}5)}{x + 1} = \dfrac{4x + 2}{x + 1}$.

Відповідь: $\dfrac{4x + 2}{x + 1}$.

4. Виділення квадрата двочлена з квадратного тричлена

Під час розв'язування деяких задач, пов'язаних з квадратним тричленом $ax^2 + bx + c$, буває зручно подати його у вигляді $a(x - m)^2 + n$, де m і n – деякі числа. Таке перетворення називають ***виділенням квадрата двочлена*** з квадратного тричлена.

Приклад 5. Виділити з тричлена $2x^2 + 16x - 7$ квадрат двочлена.

Розв'язання. Винесемо за дужки множник 2:

$$2x^2 + 16x - 7 = 2(x^2 + 8x - 3{,}5).$$

Скориставшись формулою квадрата суми двох чисел $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, перетворимо вираз у дужках, вважаючи, що $x^2 = a^2$, а $8x = 2ab$. Тоді $8x = 2 \cdot x \cdot 4$, звідки визначаємо, що число 4 є другим доданком квадрата суми, тобто $b = 4$, а тому ще додамо і віднімемо 4^2:

$2(x^2 + 8x - 3{,}5) = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 - 3{,}5) = 2((x + 4)^2 - 19{,}5) = 2(x + 4)^2 - 39$.

Відповідь: $2(x + 4)^2 - 39$.

Приклад 6. Дано квадратний тричлен $-4x^2 + 24x - 20$. Для якого значення x він набуває найбільшого значення? Знайти це значення.

Розв'язання. Виділимо з тричлена квадрат двочлена:

$-4x^2 + 24x - 20 = -4(x^2 - 6x + 5) = -4(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5) =$
$= -4((x - 3)^2 - 4) = -4(x - 3)^2 + 16.$

Вираз $-4(x - 3)^2$ для будь-якого значення x набуває недодатного значення, тобто $-4(x - 3)^2 \leqslant 0$, причому дорівнює нулю цей вираз лише для $x = 3$. Тому для $x = 3$ значення даного в умові тричлена дорівнює 16 і є для нього найбільшим. Отже, квадратний тричлен $-4x^2 + 24x - 20$ набуває найбільшого значення, що дорівнює 16, якщо $x = 3$.

Відповідь: 16, якщо $x = 3$.

Що називають квадратним тричленом? ○ Що називають коренем квадратного тричлена? ○ Скільки коренів може мати квадратний тричлен? ○ Як розкласти квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ на множники? ○ Яке перетворення квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ називають виділенням квадрата двочлена?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

49.1. (*Усно.*) Чи є квадратним тричленом вираз:

1) $x^2 + x - 5$; 2) $x^3 - x + 9$; 3) $5x + 11$;

4) $x + 7$; 5) $\dfrac{1}{x^2 + x - 4}$; 6) $x^2 - x + x^3$;

7) $2x - 7 + 6x^2$; 8) $-7x^2 + 10x + \dfrac{1}{x}$; 9) $4 + 2x - 3x^2$?

49.2. З виразів випишіть ті, що є квадратними тричленами:

1) $x^3 - x$; 2) $x^2 - x - 7$; 3) $2x^2 + 17x + \dfrac{1}{5}$;

4) $4x + 13$; 5) $x^2 - x + x^7$; 6) $\dfrac{1}{3x^2 + x}$;

7) $-5x^2 + 18 + 4x$; 8) $-7 + 10x + 13x^2$; 9) $9x - x^2 + 7$.

49.3. Які із чисел 1; 2; 3 є коренями квадратного тричлена:

1) $x^2 - 2x + 1$; 2) $x^2 + 8x - 9$;
3) $x^2 - 5x + 6$; 4) $x^2 - 2x - 3$?

49.4. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:

1) $x^2 + 2x - 5$; 2) $x^2 + 3x + 7$;
3) $x^2 - 2x + 1$; 4) $x^2 - x - 2$.

49.5. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:

1) $x^2 + x - 6$; 2) $x^2 + 6x + 9$;
3) $x^2 - 2x + 5$; 4) $x^2 + 3x - 7$.

2

49.6. Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2 - 6x + 5$; 2) $x^2 - 4x - 12$;
3) $5x^2 - 10x + 5$; 4) $-2x^2 - 3x + 2$.

49.7. Знайдіть корені квадратного тричлена:
1) $x^2 - 7x + 12$; 2) $x^2 - x - 20$;
3) $6x^2 - 7x + 1$; 4) $-3x^2 + 6x - 3$.

49.8. Чи можна розкласти на множники квадратний тричлен:
1) $16x^2 - 5x + 1$; 2) $4x^2 + 4x + 1$; 3) $2x^2 + x - 19$?

49.9. Розкладіть на множники квадратний тричлен:
1) $x^2 - 5x + 4$; 2) $x^2 + 7x - 8$; 3) $2x^2 - 5x + 2$;
4) $-x^2 + 11x - 24$; 5) $-3x^2 + 8x + 3$; 6) $4x^2 + x - 3$.

49.10. Розкладіть на множники квадратний тричлен:
1) $x^2 - 8x + 7$; 2) $x^2 + 8x - 9$; 3) $2x^2 - 7x + 3$;
4) $-x^2 + x + 12$; 5) $-6x^2 - 5x + 1$; 6) $7x^2 + 19x - 6$.

49.11. Покажіть, що квадратні тричлени $x^2 - 2x - 3$, $3x^2 - 6x - 9$, $-4x^2 + 8x + 12$ мають одні й ті самі корені. Розкладіть на множники кожний із цих тричленів.

49.12. Чи правильно розкладено на множники квадратний тричлен:
1) $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$; 2) $4x^2 - 8x + 4 = 4(x - 1)^2$?

49.13. Чи правильно розкладено на множники квадратний тричлен:
1) $3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$; 2) $2x^2 - 8x + 8 = (x - 2)^2$?

49.14. Скоротіть дріб:
1) $\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$; 2) $\dfrac{x^2-5x-14}{x+2}$.

49.15. Скоротіть дріб:
1) $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$; 2) $\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}$.

49.16. Чому не можна подати у вигляді добутку лінійних множників квадратний тричлен:
1) $x^2 + 2x + 7$; 2) $-2x^2 + 4x - 7$?

49.17. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:
1) $x^2 + 2x - 5$; 2) $x^2 - 4x + 7$;
3) $2x^2 - 4x + 10$; 4) $3x^2 - 18x + 27$.

49.18. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:
1) $x^2 - 2x + 7$; 2) $x^2 + 4x - 13$;
3) $3x^2 - 24x + 3$; 4) $2x^2 + 4x + 2$.

49.19. Знайдіть корені квадратного тричлена:
1) $\dfrac{1}{3}x^2 - 2x - 7$; 2) $0{,}2x^2 + 7x + 40$.

49.20. Знайдіть корені квадратного тричлена:
1) $\dfrac{1}{4}x^2 + 2x - 15$; 2) $0{,}2x^2 - 3x - 9$.

49.21. Розкладіть тричлен на множники, якщо це можливо:
1) $x^2 - 2x - 11$; 2) $2x^2 - 3x + 7$;
3) $-2x^2 - 3x + 7$; 4) $-x^2 - 5x - 8$.

49.22. Розкладіть тричлен на множники, якщо це можливо:
1) $x^2 + 4x - 7$;
2) $-2x^2 + 3x - 6$.

49.23. Скоротіть дріб:
1) $\dfrac{4x-12}{x^2-5x+6}$; 2) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+3x}$; 3) $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$;
4) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+5x-14}$; 5) $\dfrac{2x^2+9x-5}{3x^2+14x-5}$; 6) $\dfrac{5x^2-37x+14}{22x-2x^2-56}$.

49.24. Скоротіть дріб:
1) $\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+5x}$; 2) $\dfrac{x^2-16}{3x^2-10x-8}$;
3) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$; 4) $\dfrac{2x^2+4x+2}{3x^2-6x-9}$.

49.25. Обчисліть значення дробу:
1) $\dfrac{2x^2+9x-5}{x^2+8x+15}$, якщо $x = 97$;
2) $\dfrac{3x^2-24x+48}{7x-3x^2+20}$, якщо $x = -\dfrac{2}{3}$.

49.26. Виконайте дії:
1) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x}{x^2+2x-8}$; 2) $\dfrac{1}{x+4} + \dfrac{2}{x^2+6x+8}$;
3) $\dfrac{x+4}{3x+2} \cdot \dfrac{3x^2-10x-8}{x^2-16}$; 4) $\dfrac{-2x^2+5x-2}{2x+10} : \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-25}$.

49.27. Виконайте дії:
1) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{7}{x^2-3x-10}$; 2) $\dfrac{1}{x^2-4} : \dfrac{3x-2}{3x^2+4x-4}$.

49.28. Виділіть з кожного квадратного тричлена квадрат двочлена та доведіть, що для будь-якого значення x квадратний тричлен:
1) $x^2 - 4x + 9$ набуває додатного значення;
2) $2x^2 + 8x + 8$ набуває невід'ємного значення;
3) $-x^2 + 6x - 16$ набуває від'ємного значення;
4) $-x^2 + 10x - 25$ набуває недодатного значення.

49.29. Виділіть з кожного квадратного тричлена квадрат двочлена та доведіть, що для будь-якого значення x квадратний тричлен:
1) $x^2 + 6x + 17$ набуває додатного значення;
2) $-x^2 + 12x - 37$ набуває від'ємного значення.

4

49.30. Розкладіть на множники многочлен:
1) $x^3 + 3x^2 + 2x$; 2) $-2x^3 - 5x^2 + 3x$;
3) $\dfrac{1}{4}x^4 + x^3 - \dfrac{5}{4}x^2$; 4) $-\dfrac{1}{2}x^5 + 2x^4 + 6x^3$.

49.31. Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^3 - 12x^2 + 32x$; 2) $\frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 9x^2$.

49.32. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$; 2) $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 + x}$.

49.33. Спростіть вираз:

1) $\frac{x^3 - 16x}{x + 40} \cdot \left(\frac{x - 4}{3x^2 + 11x - 4} - \frac{16}{16 - x^2}\right)$;

2) $\frac{1}{(2a - 2)^2} : \left(\frac{a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{a + 2}{a^2 + a - 2}\right)$.

49.34. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{x - 1}{2x^2 + 3x + 1} - \frac{1}{x^2 - 1}\right) : \frac{x - 4}{x^3 - x}$;

2) $(3b - 9)^2 \cdot \left(\frac{b}{b^2 - 6b + 9} - \frac{b + 2}{b^2 - b - 6}\right)$.

Вправи для повторення

49.35. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0,16a^6x^{14}}$, якщо $a > 0$, $x < 0$; 2) $\sqrt{8m^3p^6}$, якщо $p > 0$.

49.36. Числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - 2x - 10 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $x_1^3 + x_2^3$; 3) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$; 4) $x_1^4 + x_2^4$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

49.37. Розкладіть на множники:

1) $x^3 - 4x$; 2) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$;
3) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$; 4) $x^3 + x^2 - x - 1$.

49.38. Розв'яжіть рівняння, використавши умову рівності дробу нулю:

1) $\frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4} = 0$; 2) $\frac{2x^2 + x - 28}{2x + 8} = 0$.

49.39. Розв'яжіть рівняння, використавши основну властивість пропорції:

1) $\frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{2x - 2}{x + 5}$; 2) $\frac{x - 3}{x + 1} = \frac{x - 9}{2x + 3}$.

49.40. Розв'яжіть рівняння множенням обох його частин на спільний знаменник:

1) $\frac{1}{2x-10}+\frac{2}{3x-15}=\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x-1}$.

Життєва математика

49.41. У меблевому салоні меблі продають у розібраному вигляді. Придбавши меблі в цьому салоні, покупець може самостійно зібрати меблі або замовити послугу збирання меблів, вартість якої становить 12 % від вартості придбаних меблів. Покупець придбав шафу за 9700 грн. Скільки коштів він заощадить, якщо збере цю шафу самостійно?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

49.42. Вкладник поклав кошти на депозити в різні банки, перший з яких нараховує 10 % річних, а другий – 15 % річних. За рік його загальний прибуток становив 12 % від початкового розміру внесених коштів. Знайдіть відношення розміру вкладу в першому банку до розміру вкладу в другому банку.

§ 50. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних

1. Дробові раціональні рівняння

Розв'язування дробових раціональних рівнянь часто зводиться до розв'язування квадратних рівнянь. Нагадаємо, як можна розв'язувати дробово-раціональні рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x^2+2x}{x-1}=\frac{x-4}{1-x}$.

Розв'язання. Домножимо чисельник і знаменник дробу, що стоїть у правій частині рівняння, на -1. Маємо $\frac{x^2+2x}{x-1}=\frac{4-x}{x-1}$. Отримане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2+2x=4-x, \\ x-1\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+3x-4=0, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Рівняння $x^2+3x-4=0$ має корені $x_1=1$, $x_2=-3$. Проте лише другий корінь задовольняє умову $x\neq 1$. Запис розв'язування рівняння можна було закінчити так:

$$\begin{cases} x=1 \text{ або } x=-3, \\ x\neq 1; \end{cases} \quad x=-3.$$

Відповідь: -3.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x^2-2x}=\dfrac{8}{x^3-4x}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники знаменники дробів у рівнянні, щоб знайти область визначення рівняння і спільний знаменник:

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{8}{x(x-2)(x+2)}.$$

Домножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник дробів – вираз $x(x-2)(x+2)$, враховуючи область визначення рівняння (ОВР): $x \neq 0$, $x \neq 2$, $x \neq -2$. Матимемо:

$$\begin{cases} x(x-2)+x+2=8, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-x-6=0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \text{ або } x=-2, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

звідки $x = 3$.

Відповідь: 3.

2. Метод розкладання многочлена на множники

Деякі рівняння, права частина яких дорівнює нулю, можна розв'язати за допомогою розкладання многочлена на множники.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$.

Розв'язання. Винесемо в лівій частині рівняння спільний множник x за дужки. Матимемо: $x(x^2 + 2x - 15) = 0$,

$$x = 0 \text{ або } x^2 + 2x - 15 = 0,$$
$$x = 3 \text{ або } x = -5.$$

Отже, рівняння $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$ має три корені:
$x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = -5$.

Відповідь: 0; 3; –5.

3. Біквадратні рівняння

Рівняння вигляду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $a \neq 0$, називають ***біквадратним рівнянням***. Його можна розв'язати, увівши нову змінну, тобто позначивши $x^2 = t$. Тоді $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, а початкове рівняння набуде вигляду

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Такий метод розв'язування називають ***методом введення нової змінної***, або ***методом заміни змінної***.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x^2 = t$, одержимо рівняння $t^2 + 5t - 36 = 0$, коренями якого є числа $t_1 = 4$; $t_2 = -9$.

Повернемося до змінної x.

1) $t_1 = 4$, тоді $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$;

2) $t_2 = -9$, тоді $x^2 = -9$, коренів немає.

Отже, коренями початкового рівняння є числа 2 і –2.

Відповідь: 2; –2.

4. Метод заміни змінної

Не лише біквадратні, а й деякі інші види рівнянь можна розв'язувати за допомогою заміни змінної.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 4) = 12$.

Розв'язання. Якщо ми розкриємо дужки в лівій частині рівняння, одержимо рівняння четвертого степеня, яке не завжди можна розв'язати методами шкільної математики. Тому дужки розкривати не будемо. Помітимо, що вирази, які містять x, в обох дужках є однаковими, тому можна скористатися заміною $x^2 + 4x = t$. Одержимо рівняння $t(t + 4) = 12$, що є квадратним відносно змінної t. Перепишемо його у вигляді $t^2 + 4t - 12 = 0$, звідки $t_1 = 2$; $t_2 = -6$.

Повертаємося до змінної x.

1) $t_1 = 2$, тоді $x^2 + 4x = 2$, тобто $x^2 + 4x - 2 = 0$, звідки $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$;

2) $t_2 = -6$, тоді $x^2 + 4x = -6$, тобто $x^2 + 4x + 6 = 0$, але $D < 0$, тому коренів немає.

Отже, $-2 + \sqrt{6}$ і $-2 - \sqrt{6}$ – корені початкового рівняння.

Відповідь: $-2 \pm \sqrt{6}$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $x(x-2) = \dfrac{4}{(x+1)(x-3)}$.

Розв'язання. Розкриємо дужки в кожній частині рівняння, одержимо: $x^2 - 2x = \dfrac{4}{x^2 - 2x - 3}$.

Помітимо, що вирази, які містять змінну x, в обох частинах рівняння є однаковими, тому виконаємо заміну $x^2 - 2x = t$. Одержимо рівняння зі змінною t: $t = \dfrac{4}{t-3}$.

Розв'язавши його, матимемо корені $t_1 = -1$; $t_2 = 4$.

Повернемося до змінної x.

1) $t_1 = -1$, тоді $x^2 - 2x = -1$, тобто $x^2 - 2x + 1 = 0$, звідки $x = 1$;

2) $t_2 = 4$, тоді $x^2 - 2x = 4$, тобто $x^2 - 2x - 4 = 0$, звідки $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$.

Отже, початкове рівняння має три корені: 1; $1 \pm \sqrt{5}$.

Відповідь: 1; $1 \pm \sqrt{5}$.

? Якими методами можна розв'язувати рівняння? ○ Яке рівняння називають біквадратним? ○ Як розв'язують біквадратне рівняння?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

50.1. (*Усно.*) Які з рівнянь – біквадратні:

1) $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$; 2) $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$;

3) $x^2 + 7x - 1 = 0$; 4) $-5x^4 - 8x^2 - 11 = 0$;

5) $\dfrac{1}{x^4} + \dfrac{4}{x^2} - 9 = 0$; 6) $10x^2 - 9x^4 - 5 = 0$?

50.2. Випишіть біквадратні рівняння:

1) $x^2 + x - 11 = 0$;
2) $5x^4 - 4x^3 - 5 = 0$;
3) $x^4 - 7x^2 - 6 = 0$;
4) $x^5 - 9x^2 + 4 = 0$;
5) $7x^4 + 12x^2 - 9 = 0$;
6) $5 - 7x^4 - 6x^2 = 0$.

2

50.3. Розв'яжіть біквадратне рівняння:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;
4) $2x^4 - x^2 - 6 = 0$;
5) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$;
6) $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$.

50.4. Знайдіть корені біквадратного рівняння:

1) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;
2) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$;
3) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$;
4) $3x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;
5) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$;
6) $25x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

50.5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 3} = 0$;
2) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 0$.

50.6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 4} = 0$;
2) $\dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3} = 0$.

50.7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2}{x + 1} = \dfrac{x}{x + 1}$;
2) $\dfrac{x^2}{x - 2} = \dfrac{4}{x - 2}$;
3) $\dfrac{2x^2}{x - 1} = \dfrac{3x - 14}{1 - x}$;
4) $\dfrac{x^2 - 5}{x - 3} = \dfrac{2x - 10}{3 - x}$.

50.8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2}{x - 2} = \dfrac{3x}{x - 2}$;
2) $\dfrac{x^2}{x + 3} = \dfrac{9}{x + 3}$;
3) $\dfrac{3x^2}{1 - x} = \dfrac{x - 14}{x - 1}$;
4) $\dfrac{x^2 - 3}{x - 2} = \dfrac{2x - 5}{2 - x}$.

50.9. Знайдіть корені рівняння:

1) $\dfrac{x - 3}{x} = \dfrac{8}{x + 3}$;
2) $\dfrac{2x - 3}{x + 2} = \dfrac{x}{x + 6}$;
3) $\dfrac{10}{x - 3} = x$;
4) $\dfrac{8}{x} = 3x + 2$.

50.10. Знайдіть корені рівняння:

1) $\dfrac{x - 2}{x} = \dfrac{3}{x + 2}$;
2) $\dfrac{3x - 1}{x + 3} = \dfrac{x}{x + 1}$;
3) $\dfrac{3}{4 - x} = x$;
4) $\dfrac{6}{x} = 2x - 1$.

50.11. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^3 - 4x = 0$;
2) $x^3 + 9x = 0$;
3) $4x^4 - x^2 = 0$;
4) $x^3 + x^2 - 6x = 0$.

50.12. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^3 - 9x = 0$;
2) $x^3 + 4x = 0$;
3) $16x^4 - x^2 = 0$;
4) $x^3 + x^2 - 12x = 0$.

50.13. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{20}{x} - \dfrac{20}{x+1} = 1$;
2) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-2} = 1$.

50.14. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{12}{x} - \dfrac{12}{x+1} = 1$;
2) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x-4} = 1$.

50.15. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^4 - 10x^2 + 9}{x+3} = 0$;
2) $\dfrac{6x^2 + 19x - 7}{1-3x} = 5$;
3) $\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4} = 3$;
4) $\dfrac{4x+2}{1+2x} = 6x + 5$.

50.16. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^4 + x^2 - 2}{x+1} = 0$;
2) $\dfrac{6x^2 + 7x - 5}{1-2x} = 4$;
3) $\dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 9} = 2$;
4) $\dfrac{8x+2}{1+4x} = 12x + 5$.

50.17. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x+7}{x+2} + \dfrac{x-4}{x-2} = 1$;
2) $\dfrac{3x+3}{3x+2} + \dfrac{2x-6}{3x-2} = 2$;
3) $\dfrac{4}{x-5} - \dfrac{2}{x+5} = \dfrac{x^2+15}{x^2-25}$;
4) $\dfrac{2x+2}{x-3} - \dfrac{18}{x^2-9} = \dfrac{x+6}{x+3}$.

50.18. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x+9}{x+1} + \dfrac{x-6}{x-1} = 3$;
2) $\dfrac{2x+8}{x+5} + \dfrac{10}{x^2-25} = \dfrac{x-4}{x-5}$.

50.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2x-3}{x^2+4x+4} - \dfrac{x+1}{x^2+2x} = \dfrac{5}{x}$;
2) $\dfrac{6}{x^2-9} - \dfrac{4}{x^2+6x+9} = \dfrac{1}{x-3}$;
3) $\dfrac{6}{x^2-36} - \dfrac{3}{x^2+6x} = \dfrac{x+12}{x^2-6x}$;
4) $\dfrac{3x+2}{x+1} + \dfrac{x+4}{x-3} = \dfrac{3x^2+1}{x^2-2x-3}$.

50.20. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{21}{x^2 - 2x} - \frac{14}{x^2 + 2x} = \frac{5}{x}$;

2) $\frac{3}{x^2 - 4x + 4} + \frac{4}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2} = 0$;

3) $\frac{5}{x^2 + 10x} + \frac{x + 20}{x^2 - 10x} = \frac{10}{x^2 - 100}$;

4) $\frac{2x + 7}{x + 4} - \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{5}{x^2 + 3x - 4}$.

50.21. Для якого значення x:

1) сума дробів $\frac{6}{1 - x}$ і $\frac{x}{x + 2}$ дорівнює їх добутку;

2) сума дробів $\frac{2}{x - 3}$ і $\frac{6}{x + 3}$ дорівнює їх частці?

50.22. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$;
2) $3x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$.

50.23. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$;
2) $4x^3 + 8x^2 - 3x - 6 = 0$.

50.24. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 3)^2 - 3(x^2 + 3) - 4 = 0$;
2) $(x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) - 8 = 0$.

50.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 2)^2 - 2(x^2 + 2) - 3 = 0$;
2) $(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 6 = 0$.

4

50.26. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{1}{2(x^2 + 3)} - \frac{1}{3(x + 4)} = \frac{1}{x^3 + 4x^2 + 3x + 12}$;

2) $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{32}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

50.27. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{x - 3} - \frac{14}{x^3 - x^2 - 9x + 9} = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$.

50.28. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 5 = 0$;
2) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$.

50.29. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0$;
2) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

50.30. Розв'яжіть рівняння:

1) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$;
2) $(x^2 + 2x - 2)(x^2 + 2x - 4) = 8$;
3) $(x - 2)^4 - 2(x - 2)^2 - 3 = 0$;
4) $(x^2 + x + 1)^2 - 8x^2 - 8x - 1 = 0$.

50.31. Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$;
2) $(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 3) = 3$;
3) $(x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 - 6 = 0$;
4) $(x^2 - x - 1)^2 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$.

Вправи для повторення

50.32. Корені квадратного тричлена $3x^2 + bx + c$ дорівнюють -7 і $\frac{2}{3}$. Розкладіть цей квадратний тричлен на множники.

50.33. Сума двох чисел дорівнює 27, а сума їх квадратів дорівнює 369. Знайдіть ці числа.

50.34. Спростіть вираз $\frac{x-2}{3x+2} \cdot \frac{9x^2-4}{2x^2-5x+2} - \frac{x}{1-2x}$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

50.35. З двох райцентрів, відстань між якими 84 км, одночасно назустріч одна одній виїхали дві велосипедистки. Знайдіть швидкість кожної з них, якщо вони зустрілися через 3 год і швидкість однієї була на 4 км/год більшою за швидкість іншої.

Життєва математика

50.36. Заробітна плата менеджера супермаркету електроніки в 2024 році становила 18 000 грн щомісяця, з якої утримували 18 % податку на доходи фізичних осіб та 1,5 % військового збору. На початку року менеджер вирішив щомісяця відкладати 10 % від отриманих після утримання податків коштів на придбання ноутбука, роздрібна ціна якого в супермаркеті, де він працює, становить 13 500 грн. Через який час він придбає ноутбук, якщо супермаркет своїм співробітникам надає знижку 15 % від роздрібної ціни?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

50.37. (*Зовнішнє незалежне оцінювання з математики, 2014 р.*) Відомо, що $\frac{y-x}{2x} = \frac{3}{4}$, де $0 < x < y$. У скільки разів число y більше за число x?

§ 51. Розв'язування задач за допомогою дробових раціональних рівнянь

Дробові раціональні рівняння також можуть бути математичними моделями текстових задач.

Приклад 1. З одного міста до іншого, відстань між якими 560 км, виїхали одночасно легковик і вантажівка. Швидкість легковика на 10 км/год більша за швидкість вантажівки, тому він прибув до пункту призначення на 1 год раніше за вантажівку. Знайти швидкість вантажівки і швидкість легковика.

Розв'язання. Нехай швидкість вантажівки x км/год. Систематизуємо умову задачі у вигляді таблиці:

	s, км	v, км/год	t, год
Вантажівка	560	x	$\frac{560}{x}$
Легковик	560	$x + 10$	$\frac{560}{x+10}$

Оскільки значення величини $\frac{560}{x+10}$ на 1 год менше від значення величини $\frac{560}{x}$, то можемо скласти рівняння:

$$\frac{560}{x+10} + 1 = \frac{560}{x}.$$

Воно має два корені: $x_1 = 70$, $x_2 = -80$. Другий корінь не відповідає змісту задачі, тому швидкість вантажівки 70 км/год. Тоді швидкість легковика: $70 + 10 = 80$ (км/год).
Відповідь: 70 км/год; 80 км/год.

Приклад 2. Майстер і його учень, працюючи разом, можуть виконати завдання за 8 год. За скільки годин може виконати це завдання самостійно кожен з них, якщо майстру на це потрібно на 12 год менше, ніж його учню?

Розв'язання. Нехай майстру, щоб виконати завдання самостійно, потрібно x год, тоді учневі – $(x + 12)$ год. Коли вид і обсяг роботи в задачах на роботу не конкретизовано (як тут), його прийнято позначати одиницею. Нагадаємо, що *продуктивність праці* – це обсяг роботи, що виконується за одиницю часу. Тоді за 1 год майстер виконає $\frac{1}{x}$ частину завдання, а учень – $\frac{1}{x+12}$ частину, це і є продуктивність праці кожного з них. За умовою задачі майстер і учень пропрацювали 8 год, тому майстер виконав $8 \cdot \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$ частину завдання, а учень $8 \cdot \frac{1}{x+12} = \frac{8}{x+12}$. Враховуючи, що вони виконали весь обсяг завдання, маємо рівняння:

$$\frac{8}{x} + \frac{8}{x+12} = 1,$$

звідки: $x_1 = 12$, $x_2 = -8$.
Другий корінь не відповідає змісту задачі, оскільки є від'ємним.
Отже, майстер, працюючи окремо, може виконати завдання за 12 год, а його учень – за $12 + 12 = 24$ (год).
Умову цієї задачі, як і попередньої, можна також систематизувати в таблицю:

	Час для самостійного виконання, год	Продуктивність праці	Фактично витрачений час, год	Обсяг виконаної роботи
Майстер	x	$\frac{1}{x}$	8	$\frac{8}{x}$
Учень	$x + 12$	$\frac{1}{x+12}$	8	$\frac{8}{x+12}$

Відповідь: 12 год і 24 год.

Зверніть увагу, що умови більшості задач на рух або на роботу можна систематизувати в таблицю, що допоможе уникнути громіздких текстових записів.

Поясніть, як розв'язано задачі в прикладах 1 і 2.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2

51.1. Одне з натуральних чисел на 2 більше за інше. Знайдіть ці числа, якщо сума обернених їм чисел дорівнює $\frac{5}{12}$.

51.2. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20, а сума чисел, їм обернених, становить $\frac{5}{24}$. Знайдіть ці числа.

3

51.3. Чисельник звичайного нескоротного дробу на 1 менший від знаменника. Якщо від чисельника відняти 7, а від знаменника відняти 5, то дріб зменшиться на $\frac{1}{2}$. Знайдіть цей дріб.

51.4. Знаменник звичайного нескоротного дробу на 5 більший за чисельник. Якщо знаменник збільшити на 6, а чисельник збільшити на 4, то дріб збільшиться на $\frac{1}{4}$. Знайдіть цей дріб.

51.5. З міста в село, відстань між якими 48 км, виїхали одночасно два велосипедисти. Швидкість одного з них була на 4 км/год більшою за швидкість другого, і тому він прибув у село на 1 год раніше від другого. Знайдіть швидкість кожного з велосипедистів.

51.6. З міста A в місто B, відстань між якими 420 км, одночасно виїхали два легковики. Швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість другого, і тому він прибув у місто B на 1 год раніше, ніж другий. Знайдіть швидкість кожного з легковиків.

51.7. Щоб ліквідувати запізнення на 40 хв, поїзд на перегоні 300 км завдовжки збільшив швидкість на 5 км/год порівняно зі швидкістю за розкладом. Якою є швидкість поїзда за розкладом?

51.8. Автомобіль мав проїхати 810 км. Подолавши $\frac{5}{9}$ шляху, він зробив зупинку на 30 хв. Але потім, збільшивши швидкість на 10 км/год, прибув до пункту призначення вчасно. Якою була швидкість автомобіля до зупинки?

51.9. Поїзд мав проїхати 320 км. Проїхавши $\frac{3}{8}$ шляху, він зупинився на 1 год, а потім продовжив рух зі швидкістю, на 10 км/год меншою за початкову. Знайдіть швидкість поїзда, з якою він рухався до зупинки, якщо до пункту призначення він прибув через 7 год після виїзду.

51.10. Човен, власна швидкість якого 18 км/год, проплив 40 км за течією і 16 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Знайдіть швидкість течії, якщо вона менша від 4 км/год.

51.11. Відстань між двома пристанями 48 км. На човні шлях туди і назад можна подолати за 7 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

51.12. Моторний човен проплив 18 км за течією річки і 28 км проти течії за такий самий час, що й 48 км у стоячій воді. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год.

51.13. Катер пропливає 30 км за течією річки і 8 км проти течії річки за такий самий час, який потрібний плоту, щоб проплисти по цій річці 4 км. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість катера дорівнює 18 км/год.

51.14. Моторний човен проплив 40 км по озеру, а потім 18 км по річці, що впадає в це озеро, витративши на цей шлях 3 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

51.15. Дві бригади шляховиків мали заасфальтувати по 200 $м^2$ дорожнього полотна, причому перша бригада за день асфальтувала на 10 $м^2$ більше, ніж друга, і тому виконала завдання на 1 день раніше за другу. Скільки $м^2$ дорожнього полотна щодня асфальтувала кожна з бригад?

51.16. Для перевезення 60 т вантажу замовили деяку кількість вантажівок. Оскільки на кожну вантажили на 1 т більше, ніж передбачалося, то 3 вантажівки виявилися зайвими. Скільки вантажівок було використано для перевезення вантажу?

51.17. Майстер і учень, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 16 год. За скільки годин виконає це саме замовлення кожен з них самостійно, якщо майстру на це потрібно на 24 год менше, ніж учню?

51.18. Два малярі, працюючи разом, можуть пофарбувати певну будівлю за 20 год. За скільки годин може виконати цю роботу кожний з малярів самостійно, якщо одному з них для цього потрібно на 9 год більше, ніж іншому?

51.19. Через один кран басейн наповнювали 9 хв, після чого відкрили другий кран. Через 6 хв їх спільної роботи виявилося, що наповнено тільки половину басейну. За скільки хвилин можна наповнити басейн через кожний із цих кранів окремо, якщо першому на це треба на 9 хв більше, ніж другому?

51.20. Одна з операторок комп'ютерного набору може набрати рукопис на 12 днів швидше, ніж інша. Через 6 днів роботи другої операторки до неї приєдналася перша. Через 10 днів спільної роботи виявилося, що набрано $\frac{5}{7}$ рукопису. За скільки днів може набрати рукопис кожна з операторок окремо?

4

51.21. Пішохід рухався із села A в село B 4 год. На зворотному шляху перші 10 км він пройшов з тією самою швидкістю, а потім зменшив її на 1 км/год і тому на зворотний шлях витратив на 30 хв більше. Знайдіть відстань між селами.

51.22. Відстань від пристані M до пристані N за течією річки човен долає за 3 год. Одного разу, не дійшовши 30 км до пристані N, човен повернув назад і прибув до пристані M через 4,5 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

Вправи для повторення

51.23. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^4 + 3x^2 - 5 = 0$; 2) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}$.

51.24. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 2x}$; 2) $\frac{x^2 - 9}{2x^2 - 4x - 6}$.

51.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$; 2) $(x + 7)^4 - 5(x + 7)^2 - 6 = 0$.

Життєва математика

51.26. Керамічну плитку однієї і тієї самої торгової марки виробляють трьох різних розмірів. Магазин продає плитку тільки пачками. Подружжя вирішило укласти цією плиткою підлогу на кухні. Користуючись даними таблиці, з'ясуйте, як подружжю придбати плитку найдешевше, якщо кухня має форму квадрата зі стороною 3 м.

Розмір плитки (см × см)	Кількість плиток у пачці	Ціна пачки
20 × 20	25	300 грн
20 × 30	16	290 грн
30 × 30	11	280 грн

Цікаві задачі – поміркуй одначе

51.27. Побудуйте графік функції $y = \dfrac{x^2 + 2x}{|x|} - 2.$

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 11 (§§ 49–51)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Укажіть вираз, який є квадратним тричленом.

А. $2x^2 + x - 3x^3$ **Б.** $2x^2 + x - 3$ **В.** $\dfrac{1}{2x^2 + x - 3}$ **Г.** $\dfrac{2}{x^2} + x - 3$

2. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена $2x^2 - 3x - 7$.

А. 47 **Б.** –47 **В.** 64 **Г.** 65

3. Укажіть біквадратне рівняння.

А. $4x^2 + x - 3 = 0$ **Б.** $4x^4 + x^2 - 3 = 0$
В. $4x^3 + x^2 - 3 = 0$ **Г.** $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 5 = 0$

2

4. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен $-2x^2 + 3x + 5$.

А. $-2(x+1)(x-2,5)$ **Б.** $2(x+1)(x-2,5)$
В. $-2(x-1)(x+2,5)$ **Г.** $-2(x+1)(x+2,5)$

5. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{x^2}{x-7} = \dfrac{49}{x-7}.$

А. Коренів немає **Б.** 7 **В.** –7 **Г.** –7; 7

6. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$, розклавши його ліву частину на множники.

А. –3; 1 **Б.** –1; 3 **В.** –1; 0; 3 **Г.** –3; 0; 1

3

7. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}.$

А. $\dfrac{x+2}{x+3}$ **Б.** $\dfrac{x-2}{x+3}$ **В.** $\dfrac{x-2}{x-3}$ **Г.** $\dfrac{x+2}{x-3}$

8. Для яких значень x сума дробів $\dfrac{6}{1+x}$ і $\dfrac{x}{3-x}$ дорівнює їх добутку?

А. Таких значень x не існує **Б.** 2
В. 2; 9 **Г.** –9; –2

9. З міста A в місто B, відстань між якими 360 км, одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість одного з них була на 10 км/год більшою за швидкість іншого, і тому він прибув до пункту призначення на 30 хв раніше. Знайдіть швидкість автомобіля, який рухався повільніше.

А. 70 км/год **Б.** 80 км/год
В. 90 км/год **Г.** 100 км/год

4

10. Розкладіть на множники многочлен $-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 3x^2$.

А. $-\frac{1}{4}x^2(x-2)(x+6)$ **Б.** $-\frac{1}{4}(x-2)(x+6)$

В. $-\frac{1}{4}x^2(x+2)(x-6)$ **Г.** $-\frac{1}{4}x(x-2)(x+6)$

11. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$.

А. Розв'язків немає **Б.** -4; -1; 2
В. 1; 2; 4 **Г.** -2; 1; 4

12. Відстань від пристані A до пристані B проти течії річки човен долає за 3 год. Одного разу, не допливши 24 км до пристані B, човен повернув назад і прибув до пристані A через 3 год 18 хв. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнювала 2 км/год.

А. 20 км/год **Б.** 22 км/год
В. 24 км/год **Г.** 26 км/год

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3

13. Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та його коренями (А–Г).

Рівняння	*Корені рівняння*
1. $\frac{x-7}{x-2} + \frac{x+4}{x+2} = 1$	**А.** -3; 3
2. $x^3 + 6x^2 - 9x - 54 = 0$	**Б.** -3; 6
3. $(x^2-2)^2 - 4(x^2-2) - 21 = 0$	**В.** 3; 6
	Г. -6; -3; 3

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 49–51

1

1. З даних виразів випишіть ті, що є квадратними тричленами:

1) $2x^2 - 3x + 7$; 2) $\frac{1}{2x^2 - 3x + 7}$;

3) $2x^2 - 3x + 7x^3$; 4) $-8 + 2x^2 - 3x$.

2. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:
1) $x^2 + 3x - 7$; 2) $x^2 + x + 9$.

3. Чи є біквадратним рівняння:
1) $x^2 + 8x - 9 = 0$; 2) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$;
3) $x^3 + 8x^2 - 9 = 0$; 4) $7x^2 - x^4 - 5 = 0$?

2

4. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 4x - 5$;

2) $-2x^2 + 5x - 2$.

5. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;

2) $\dfrac{x^2}{x+4} = \dfrac{16}{x+4}$.

6. Розв'яжіть рівняння $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, розклавши його ліву частину на множники.

3 **7.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$; 2) $\dfrac{x^2 - 4}{2x^2 + 7x - 22}$.

8. З одного міста в інше одночасно виїхали дві велосипедистки. Швидкість першої була на 3 км/год більшою, ніж швидкість другої, тому до пункту призначення вона прибула на 1 год раніше, ніж друга. Знайдіть швидкість кожної з велосипедисток, якщо відстань між містами 60 км.

4 **9.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$;

2) $(x - 3)^4 - 7(x - 3)^2 - 8 = 0$.

Додаткові завдання

4 **10.** Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^3 - 4x^2 - 5x$; 2) $-\dfrac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x^2$.

11. Побудуйте графік функції $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 2x}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 11

До § 49

1 **1.** Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте, чи можна розкласти цей тричлен на лінійні множники:

1) $x^2 + x - 5$;

2) $x^2 + 2x + 7$;

3) $9x^2 + 6x + 1$.

2 **2.** Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2 + 5x + 4$; 2) $x^2 - 4x - 12$;

3) $2x^2 - 12x + 18$; 4) $-4x^2 + 7x + 2$.

3. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 3x - 4$; 2) $2x^2 - 7x - 4$;

3) $-x^2 + 3x + 18$; 4) $-4x^2 + 9x - 2$.

4. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:

1) $x^2 + 6x - 7$; 2) $x^2 - 8x - 9$.

3 **5.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4x^2-81}{2x^2-5x-18}$; 2) $\dfrac{2x^2+6x-20}{x^3-8}$;

3) $\dfrac{2x^2-12x+18}{2x^2-x-15}$; 4) $\dfrac{4x^2-11x-3}{-3x^2+10x-3}$.

6. Виконайте дії:

1) $\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}+\dfrac{x+1}{x^2+4x+3}$; 2) $\dfrac{2x^2-7}{x^2-3x-4}-\dfrac{x+1}{x-4}$;

3) $\dfrac{x^2-x-20}{2-x}\cdot\dfrac{2x-x^2}{x+4}$; 4) $\dfrac{x+5}{2x-6}:\dfrac{x^2+11x+30}{x-3}$.

7. Один з коренів квадратного тричлена x^2+px+6 дорівнює -3. Знайдіть p та інший корінь.

8. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:

1) x^2+x-1; 2) $2x^2-3x+7$;

3) $3x^2-5x+7$; 4) $-4x^2+9x-2$.

4 **9.** Укажіть таке значення невідомого коефіцієнта, щоб тричлен мав один корінь:

1) x^2+bx+4; 2) $ax^2+8x+64$; 3) $x^2-18x+c$.

10. Розкладіть на множники квадратний тричлен відносно змінної x:

1) $x^2-5ax-6a^2$; 2) $x^2+3bx-10b^2$.

11. Якого найменшого значення може набувати квадратний тричлен $x^2-8x+19$? Для якого значення x воно досягається?

12. Для якого a квадратний тричлен $-a^2-4a-17$ набуває найбільшого значення? Знайдіть це значення.

До § 50

2 **13.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^4+x^2-3=0$; 2) $3x^4-2x^2-40=0$;

3) $x^4+x^2+9=0$; 4) $x^4-7x^2+10=0$.

14. Знайдіть корені рівняння:

1) $\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=0$; 2) $\dfrac{3x^2}{x+2}=\dfrac{5x}{x+2}$;

3) $\dfrac{x^2+1}{x-2}=\dfrac{1-3x}{2-x}$; 4) $\dfrac{21}{x}=2x+1$.

15. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4-16x^2=0$;

2) $x^3-x^2-6x=0$.

3 **16.** Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y=x^4-3x^2-4$ з віссю абсцис.

17. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{x+2} - \frac{4}{x+3} = \frac{1}{x}$; 2) $\frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2-x} = \frac{3}{3-x}$;

3) $\frac{18}{x^2+6x+9} + \frac{7}{x+3} = 1$; 4) $\frac{13x+4}{4x^2+4x+1} - \frac{1}{2x+1} = 4$;

5) $\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{9}{(x-2)^2} = \frac{6}{x^2-4}$; 6) $\frac{3}{3x^2-x} - \frac{4}{9x^2-1} = \frac{4}{9x^2-6x+1}$.

18. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{1}{2x+x^2} - \frac{1}{x-2} = \frac{8}{4x-x^3}$; 2) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+x^2} = \frac{10}{x-x^3}$;

3) $\frac{7x+6}{x^3-27} = \frac{1}{x^2+3x+9} + \frac{1}{x-3}$.

19. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - x^2 = x - 1$; 2) $(x^2+2x)^2 - 2(x^2+2x) - 3 = 0$.

4 **20.** Знайдіть координати точок перетину графіків $y = 4x$ і $y = \frac{7}{x+1} - 1$.

21. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{8x+29}{16x^4-1} + \frac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1} = \frac{25}{4x^2+1}$;

2) $\frac{3x}{27x^3+18x^2-12x-8} - \frac{1}{9x^2+12x+4} = \frac{x-1}{4x-9x^3}$.

22. Знайдіть корені рівняння:

1) $(x^2-4x)(x-2)^2 + 3 = 0$; 2) $x(x-1)(x-2)(x-3) = 24$;

3) $x^2 - 3x = \frac{8}{x^2-3x-2}$; 4) $(x+2)(x-7) = \frac{19}{(x-1)(x-4)}$;

5) $\frac{5}{x^2-x-1} + \frac{1}{x^2-x-5} = 2$;

6) $\frac{2}{x^2-11x+4} + \frac{3}{x^2-11x+1} = \frac{8}{x^2-11x-2}$.

4 **23.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-13}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-13} = 2{,}5$; 2) $\frac{x^2+3x}{1-x} + \frac{5x-5}{3x+x^2} = 4$.

До § 51

3 **24.** З міста в село, відстань між якими 16 км, вийшов пішохід. Через 2 год 40 хв у тому самому напрямку виїхала велосипедистка і прибула в село одночасно з пішоходом. Знайдіть швидкість велосипедистки, якщо вона на 8 км/год більша за швидкість пішохода.

25. Поїзд, який було затримано на 2 год, компенсував запізнення на перегоні 400 км завдовжки, збільшивши швидкість на 10 км/год. Знайдіть, за який час поїзд мав подолати цей перегін за розкладом.

26. Катер проплив 45 км за течією і 7 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Яка власна швидкість катера, якщо швидкість течії 2 км/год?

27. О 8-й годині ранку від пристані за течією річки відійшов пліт, а о 17-й годині в тому самому напрямку відійшов човен, який наздогнав пліт на відстані 20 км від пристані. О котрій годині човен наздогнав пліт, якщо власна швидкість човна дорівнює 18 км/год?

28. Рибалка відплив на човні з пункту A проти течії річки. Подолавши 5 км, він кинув весла, і через 3 год після відплиття з пункту A його знову віднесло до цього пункту. Швидкість човна у стоячій воді дорівнює 12 км/год. Знайдіть швидкість течії, якщо вона менша ніж 5 км/год.

29. Перша операторка комп'ютерного набору набрала 120 сторінок рукопису, а друга – 144 сторінки. Перша щодня набирала на 4 сторінки більше, ніж друга, і працювала на 3 дні менше, ніж друга. Скільки сторінок щодня набирала перша операторка і скільки – друга?

30. Робочий день становить 8 год. Щоб виготовити 15 деталей, Богдану треба на 1 год менше, ніж Михайлу. Скільки деталей за день виготовляє кожен з майстрів, якщо Богдан за робочий день виготовляє на 20 деталей більше, ніж Михайло?

31. Через перший кран водоочищувач на фермі наповнюється на 4 год швидше, ніж через другий спорожнюється. Якщо одночасно відкрити обидва крани, то водоочищувач наповниться за 3 год. За скільки годин водоочищувач може через перший кран наповнитися і за скільки годин через другий кран спорожнитися?

32. Майстер може виконати завдання на 3 год швидше, ніж учень. Якщо майстер пропрацює 4 год, а потім його замінить учень і пропрацює 3 год, то завдання буде виконано. За скільки годин самостійно може виконати завдання майстер і за скільки – учень?

33. Зливок міді й цинку, що містить 1 кг міді, сплавили з 2 кг міді. Отримали зливок, у якому міді на 25 % більше, ніж було в попередньому зливку. Якою була маса початкового зливка?

4 **34.** З міст A і B одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти і зустрілися через 5 год. Швидкість велосипедиста, який виїхав з міста A, на 5 км/год менша від швидкості другого велосипедиста. Якби другий велосипедист виїхав на 4,5 год пізніше, ніж перший, то вони зустрілися б на відстані 75 км від міста B. Знайдіть відстань між містами A і B.

35. Бригада робітників мала виготовити в певний термін 800 однакових віконних блоків. У перші 5 днів бригада щоденно виготовляла заплановану кількість блоків, а потім кожного дня – на 5 блоків більше, ніж планувала, тому вже за день до визначеного терміну було виготовлено 830 віконних блоків. Скільки віконних блоків мала щодня виготовляти бригада за планом?

Головне в темі II

КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН І РОЗКЛАДАННЯ ЙОГО НА ЛІНІЙНІ МНОЖНИКИ

Квадратним тричленом називають многочлен вигляду $ax^2 + bx + c$, де x – змінна, a, b, c – числа, причому $a \neq 0$.

Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, для якого значення тричлена дорівнює нулю.

Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС МАТЕМАТИКИ 8 КЛАСУ

1

1. Виконайте дії:

1) $\frac{3m-4}{a}+\frac{4}{a}$; 2) $\frac{2}{b}:\frac{6}{b^2}$.

2. Подайте у вигляді степеня з основою a:

1) $a^{-7}:a^3$; 2) $(a^{-2})^5$.

3. Один з кутів ромба дорівнює 46°. Знайдіть інші кути ромба.

2

4. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{2\frac{7}{9}}+10\sqrt{0,16}$; 2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{0,5}+(-\sqrt{7})^2$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2+13x+6=0$; 2) $\frac{x^2}{x-1}=\frac{3x-2}{x-1}$.

6. Середня лінія трапеції дорівнює 12 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 4 см більша за іншу.

3

7. У $\triangle ABC$: $\angle C=90^\circ$, $AC=6$ см, $AB=10$ см. Розв'яжіть цей трикутник (кути трикутника знайдіть з точністю до градуса).

8. Моторний човен подолав 36 км проти течії і повернувся назад, витративши на весь шлях 5 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

4

9. Побудуйте графік функції $y=\frac{8x-32}{4x-x^2}$.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ З АЛГЕБРИ

Раціональні вирази

1. Доведіть, що для додатних значень a і b ($a \neq b$) значення дробу $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$ більше за відповідне значення дробу $\dfrac{a^2 + b^2}{a + b}$.

2. Скоротіть дріб $\dfrac{m^4 + m^2n^2 + n^4}{m^3 + n^3}$.

3. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z}} \cdot \left(1 + \dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}\right) : \dfrac{x - y - z}{xyz}$;

2) $\dfrac{\dfrac{m - n}{2m - n} - \dfrac{m^2 + n^2 + m}{2m^2 + mn - n^2}}{(4n^4 + 4mn^2 + m^2) : (2n^2 + m)} \cdot (n^2 + n + mn + m)$;

3) $\dfrac{4}{x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}}} : \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{y}} - \dfrac{4}{y(xyz + x + z)}$;

4) $\left(\left(\dfrac{a}{b - a}\right)^{-2} - \dfrac{(a + b)^2 - 4ab}{a^2 - ab}\right)^2 \cdot \dfrac{a^4}{a^2b^2 - b^4}$;

5) $\dfrac{p^{-6} - 64}{4 + 2p^{-1} + p^{-2}} \cdot \dfrac{p^2}{4 - 4p^{-1} + p^{-2}} - \dfrac{4p^2(2p + 1)}{1 - 2p}$;

6) $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-3} + y^{-3}} : \dfrac{x^2y^2}{(x + y)^2 - 3xy} \cdot \left(\dfrac{x^2 - y^2}{xy}\right)^{-1}$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\left(x^2 - \dfrac{1}{y^2}\right)^x \cdot \left(y + \dfrac{1}{x}\right)^{y-x}}{\left(y^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)^y \cdot \left(x - \dfrac{1}{y}\right)^{x-y}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$;

2) $\left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \left(\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b + c}\right) : \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b + c}\right)\right) = \dfrac{(b + c - a)^2}{2bc}$;

3) $\dfrac{(x - y)^2 + xy}{(x + y)^2 - xy} : \dfrac{x^5 + y^5 + x^2y^3 + x^3y^2}{(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2)(x^3 - y^3)} = x - y$;

4) $\left(\frac{2-y}{y-1}+\frac{2(x-1)}{x-2}\right):\left(\frac{y(x-1)}{y-1}+\frac{x(2-y)}{x-2}\right)=\frac{1}{x-y}$.

5. Доведіть одну з тотожностей видатного математика Л. Ейлера (1707–1783):

$$\left(\frac{a(a^3+2b^3)}{a^3-b^3}\right)^3-\left(\frac{b(2a^3+b^3)}{a^3-b^3}\right)^3=a^3+b^3.$$

6. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}$$

є від'ємним для будь-якого значення $a>1$.

7. Доведіть, що коли $x+y=1$, то

$$\frac{x}{y^3-1}-\frac{y}{x^3-1}=\frac{2(y-x)}{x^2y^2+3}.$$

8. Доведіть, що коли для чисел x, y, z, m, n, p справджуються рівності $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$ і $\frac{m}{x}+\frac{n}{y}+\frac{p}{z}=0$, то для них справджується і рівність $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}=1$.

9. Доведіть, що коли $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$, то $a^2b^2c^2=1$ або $a=b=c$.

10. Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

1) $\frac{x-2}{x-a}=0$;
2) $\frac{x-a}{x^2-1}=0$;
3) $(a-2)x=a^2-4$;
4) $(a^2-1)x=a^2-2a+1$.

11. Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

1) $\frac{x}{a}-\frac{a}{2x}=\frac{2x+a}{2a}-\frac{a}{x}$;
2) $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a}{b}$;
3) $\frac{x-a}{a}-\frac{x}{x-a}=\frac{x+a}{a}$;
4) $\frac{3}{x-a}+\frac{2}{x+a}=\frac{4x+7a}{x^2-a^2}$.

12. Порядок числа a дорівнює -3, а порядок числа b дорівнює 5. Яким може бути порядок числа:

1) ab; 2) $\frac{a}{b}$; 3) $\frac{b}{a}$; 4) $a+b$?

Квадратні корені. Дійсні числа

13. Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

1) $\sqrt{x}=a+3$; 2) $a\sqrt{x}=a$; 3) $(a+3)\sqrt{x+2}=a^2-9$.

14. Укажіть ціле число, що є найближчим до кореня рівняння:

1) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3})x + 4 = 0$; 2) $(5\sqrt{2} + 7\sqrt{5})x = 13 + 2\sqrt{3}$.

15. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{6 - \sqrt{25 - 4\sqrt{6}}}}$;

3) $\sqrt{\left|30\sqrt{3} - 52\right|} - \sqrt{52 + 30\sqrt{3}}$.

16. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$, якщо $1 \leqslant x \leqslant 2$;

2) $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$.

17. Обчисліть:

1) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$;

2) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

18. Побудуйте графік функції:

1) $y = 4x - \sqrt{x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - x$.

19. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

1) $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}$; 2) $\dfrac{(1+\sqrt{3})^2 - 7}{\sqrt{7} + \sqrt{3} + 1}$;

3) $\dfrac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}}$; 4) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$.

20. Чи є взаємно оберненими числа $\sqrt{\dfrac{7 - 2\sqrt{10}}{3}}$ і $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$?

21. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4y}{(x-y) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)} : \dfrac{x + 9y + 6\sqrt{xy}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}}$;

2) $\dfrac{2\sqrt{1 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)^2}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)}$.

22. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x^2-x\sqrt{x^2-y^2}}\right)^2}{2\sqrt{x^3y}}:\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\right),$

якщо $x > y > 0$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}}+\dfrac{b-a}{\sqrt{b^2-a^2}+a-b}\right):\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}-1}$, якщо $b > a > 0$.

23. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{(a+2)^2-8a}}{\sqrt{a}-\dfrac{2}{\sqrt{a}}}$; 2) $\dfrac{x^2+4}{x\sqrt{\left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2+4}}$.

24. Доведіть тотожність:

1) $\left(1+\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right):\left(\dfrac{1}{1-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\sqrt{1-x^2}$;

2) $\dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}+\dfrac{a^2-\dfrac{ab}{\sqrt{b}}}{a-\sqrt{b}}-\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}+\dfrac{4a\sqrt{b}}{a^2-b}=a.$

25. Відомо, що $\sqrt{3-x}+\sqrt{5+x}=3$. Не знаходячи значення x, знайдіть значення виразу $\sqrt{(3-x)(5+x)}$.

26. Відомо, що $\sqrt{24-x^2}-\sqrt{12-x^2}=2$. Не знаходячи значення x, знайдіть значення виразу $\sqrt{24-x^2}+\sqrt{12-x^2}$.

27. Відомо, що $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$, $xy=9$. Не знаходячи значень x і y, знайдіть:

1) $x+y$; 2) $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$; 3) x^2+y^2.

Квадратні рівняння

28. Для якого значення a має лише один корінь рівняння:

1) $(a+4)x^2-(a+5)x+1=0$; 2) $(a-4)x^2+(2a-8)x+15=0$?

29. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(a-1)x^2+(a+1)x+1=0$; 2) $(a+1)x^2-(a-1)x-2a=0$.

30. Знайдіть корені рівняння:

1) $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-2x-3}=0$;

2) $x^2-4x+4+\left|x^2+2x-8\right|=0$;

3) $\left|x-\sqrt{x}-6\right|+\sqrt{x^2-4x}=0$.

31. Доведіть, що число 3 не може бути дискримінантом квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, якими б не були цілі числа a, b, c.

32. Для якого значення a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - (a + 2)x + a - 3 = 0$ буде найменшою?

33. Для якого значення b сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (b + 1)x + b^2 - 1,5 = 0$ буде найбільшою?

34. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + \sqrt{a-4} \cdot x - 5 = 0$ задовольняють умову $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{18}{25}$. Знайдіть a.

35. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 + 7x - 1 = 0$. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) $\frac{1}{x_1}$ і $\frac{1}{x_2}$; 2) $\frac{x_1}{x_2} - 3$ і $\frac{x_2}{x_1} - 3$; 3) $x_1x_2^3$ і $x_2x_1^3$.

36. Доведіть, що коли a, b і c – сторони трикутника, то рівняння $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ не має коренів.

37. Доведіть, що модуль різниці коренів рівняння $5x^2 - 2(5a + 3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0$ не залежить від значення a.

38. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - 7x + 6 = 0$; 2) $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$;

3) $x^3 - 5x^2 + 6 = 0$; 4) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$.

39. Розв'яжіть відносно x рівняння:

1) $(a^2 + a - 2)x = a - 1$; 2) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - a} = 0$;

3) $\frac{x - a}{x^2 - 4x + 3} = 0$; 4) $\frac{x^2 - (3a + 4)x + 12a}{x - 3} = 0$;

5) $\frac{a(x - a)}{x + 7} = 0$; 6) $\frac{a^2 - 1}{ax - 1} = \frac{x}{a}$, де $a \neq 0$.

40. Для яких значень a рівняння $\frac{x^2 + ax + 9}{x + 1} = 0$ має лише один корінь?

41. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{38}{x^4 - x^2 + 20x - 100} + \frac{x + 10}{x^2 - x + 10} = \frac{x + 10}{x^2 + x - 10}.$$

42. Для яких значень a і b тричлен $4x^2 + 36x + (a + b)$ є повним квадратом, якщо відомо, що $a - b = 3$?

43. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6}\right)^2 \cdot \frac{(x - 3)^2 + 12x}{2}$;

2) $\frac{3a^2 + 2ab - b^2}{a^2 + 4ab + 3b^2} - 2 + \frac{10(ab - 3b^2)}{a^2 - 9b^2}$.

44. Розв'яжіть відносно x рівняння:

1) $\dfrac{x^2+1}{a^2x-2a}-\dfrac{1}{2-ax}=\dfrac{x}{a}$;

2) $\dfrac{x+2}{3x-a}+\dfrac{3-x}{3x^2+2xa-a^2}=\dfrac{3x+2}{x+a}$, де $a \neq 0$.

45. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+6}{x+2}+\dfrac{x-6}{x-2}$;

2) $\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{28}{15}=\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x+4}{x+3}$.

46. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-5}=x-11$; 2) $\sqrt{x^2+20}=22-x^2$.

47. Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x^2+4x-5|=|x^2+x|$; 2) $3x^2-4=5|x-1|$.

48. Побудуйте графік рівняння $x^2-5xy+6y^2=0$.

49. Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\dfrac{2x+1}{3x-4}\right)^2+\left(\dfrac{3x-4}{2x+1}\right)^2=2$; 2) $\left(\dfrac{5x-6}{2-7x}\right)^2+\left(\dfrac{7x-2}{5x-6}\right)^2=4,25$;

3) $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9$; 4) $3\left(\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{x^2}{9}\right)+4\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{x}\right)-8=0$.

50. У супермаркет привезли яблука першого сорту на суму 2280 грн і другого сорту на суму 1800 грн. Якщо продати всі яблука оптом по одній ціні – на 9 грн нижчій від ціни кілограма першого сорту, то виручка складе заплановану суму. Скільки кілограмів яблук привезли в маркет, якщо яблук другого сорту було на 5 кг більше, ніж яблук першого сорту?

51. Загадали ціле додатне число. До нього праворуч дописали цифру 7 і від отриманого числа відняли квадрат числа, що загадали. Різницю зменшили на 75 % і одержали загадане число. Яке число загадали?

52. З міста A в місто B, відстань між якими 164 км, зі швидкістю 20 км/год виїхав велосипедист. Через 2 год у тому самому напрямку виїхав мотоцикліст, який, обігнавши велосипедиста, прибув у місто B й одразу повернув назад. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо він зустрів велосипедиста через 2 год 45 хв після того, як його обігнав.

53. З міста M у місто N зі швидкістю 12 км/год виїхав велосипедист. Через 1 год у тому самому напрямку зі швидкістю 15 км/год виїхала велосипедистка. Ще через 1 год з міста M у тому самому напрямку виїхав ще й мотоцикліст, який обігнав одного з велосипедистів через 10 хв після того, як обігнав іншого. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо вона більша за 50 км/год.

54. З містечка A до містечка B і з B до A одночасно вийшли два пішоходи. Перший прибув до B через 0,8 год після їхньої зустрічі, а другий прибув до A через 1,25 год після їхньої зустрічі. Скільки годин був у дорозі кожний з пішоходів?

55. По двох взаємно перпендикулярних дорогах рухаються в напрямку перехрестя пішохід і велосипедист. У деякий момент часу пішохід знаходиться на відстані 2 км, а велосипедист – на відстані 3,75 км від перехрестя доріг. Через який час відстань між ними дорівнюватиме 1,25 км, якщо швидкість пішохода 5 км/год, а велосипедиста – 15 км/год?

56. Іра та Олег мали разом набрати рукопис до певного терміну. Після того як було набрано половину рукопису, Олег захворів, і тому Іра закінчила роботу на 2 дні пізніше, ніж передбачалося. За скільки днів міг би набрати рукопис кожний з них самостійно, якщо Ірі на це знадобилося б на 5 днів менше, ніж Олегу?

57. Через перший кран можна наповнити резервуар водою на 24 хв швидше, ніж через другий. Якщо спочатку $\frac{2}{3}$ резервуара заповнять через перший кран, а потім частину, що залишилася, – через другий, то витрачений на це час буде на 33 хв більшим, ніж час наповнення резервуара одночасно через обидва крани. За який час можна наповнити резервуар через кожний кран окремо?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ З ГЕОМЕТРІЇ

Розділ 1

Чотирикутники

1. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ зовні нього побудовано два рівносторонніх трикутники ABK і CDL. Доведіть, що відрізок KL проходить через точку перетину діагоналей паралелограма.
2. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC взято довільну точку K. Через цю точку паралельно BC і AC проведено прямі, які перетинають сторони трикутника. Доведіть, що периметр паралелограма, який при цьому утворився, не залежить від положення точки K.
3. Точки A, B і C лежать на колі із центром O, $ABCO$ – паралелограм. Знайдіть його кути.
4. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями й висотою.
5. Діагоналі опуклого чотирикутника розбивають його на чотири трикутники, периметри яких однакові. Визначте вид чотирикутника.
6. Коло з діаметром AC проходить через середину сторони AB ромба $ABCD$. Знайдіть тупий кут ромба.
7. Зовні прямокутника $ABCD$ вибрано точку K так, що $\angle AKC = 90°$. Знайдіть $\angle DKB$.
8. На катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC побудовано квадрати $ACDE$ і $BCKL$. Прямі ED і KL перетинаються в точці P. Під яким кутом перетинаються прямі PC і AB?
9. Сторони прямокутника дорівнюють a і b ($a > b$). Бісектриси чотирьох кутів прямокутника, перетинаючись, утворюють чотирикутник. Знайдіть його діагоналі.
10. Доведіть, що бісектриса кута паралелограма ділить навпіл кут між висотами, проведеними з вершини цього кута.
11. Усередині квадрата $ABCD$ узято точку P і на відрізку AP, як на стороні, побудовано квадрат $APNM$, сторона якого PN перетинає сторону AD квадрата $ABCD$. Порівняйте між собою відрізки BP і DM.
12. Доведіть, що в будь-якій трапеції сума бічних сторін більша за різницю більшої і меншої основ.
13. Відомо, що існує точка, рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони трапеції. Знайдіть периметр трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см.
14. Відомо, що існує точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції, один з кутів якої дорівнює 40°. Знайдіть інші кути трапеції.
15. Основи трапеції дорівнюють a і b ($a > b$), а сума кутів, прилеглих до більшої основи, дорівнює 90°. Знайдіть відстань між серединами основ трапеції.
16. Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перетинаються в точці M. Відомо, що $\angle ABC = 73°$, $\angle BCD = 103°$, $\angle AMD = 110°$. Знайдіть $\angle ACD$.

17. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AH_1, BH_2 і CH_3. H – точка їхнього перетину. Серед семи точок A, B, C, H_1, H_2, H_3 і H укажіть усі такі їхні четвірки, через які можна провести коло.

Розділ 2

Подібність трикутників

18. У п'ятикутнику $ABCDE$ всі кути між собою та всі сторони між собою рівні. Діагоналі AD і BE перетинаються в точці O. Доведіть, що $\triangle AED \backsim \triangle AOE$.

19. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає продовження сторін CB і CD відповідно в точках N і M. Доведіть, що добуток $BN \cdot DM$ не залежить від того, як проведено цю пряму.

20. Діагональ трапеції ділить її на два подібних трикутники. Визначте довжину цієї діагоналі, якщо основи трапеції дорівнюють a і b.

21. Через середину найбільшої сторони трикутника проведено пряму, яка відтинає від нього трикутник, подібний даному. Знайдіть найменшу сторону трикутника, що відтинається, якщо сторони даного дорівнюють:
1) 42 см, 49 см, 56 см; 2) 42 см, 49 см, 63 см;
3) 42 см, 49 см, 70 см.
Скільки розв'язків має задача в кожному з випадків?

22. У трикутнику ABC кут B – тупий. Позначте на стороні AC таку точку D, щоб виконувалася рівність $AB^2 = AD \cdot AC$.

23. AD і BC – основи трапеції $ABCD$. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні, $AC = 15$ см, CE – висота трапеції, $AE = 9$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

Розділ 3

Розв'язування прямокутних трикутників

24. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ взаємно перпендикулярні. Доведіть, що $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

25. Точка M лежить усередині кута, який дорівнює 60°. Відстані від точки M до сторін кута дорівнюють a і b. Знайдіть відстань від точки M до вершини кута.

26. Два кола різних радіусів мають зовнішній дотик. MN – їхня спільна зовнішня дотична, M і N – точки дотику. Доведіть, що довжина відрізка MN є середнім геометричним діаметрів кіл.

27. 1) У гострокутному трикутнику ABC BH – висота. Доведіть, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$.
2) У трикутнику ABC $\angle A$ – тупий, BH – висота. Доведіть, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$.

28. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить гіпотенузу у відношенні 2 : 3. Знайдіть периметр трикутника, якщо центр вписаного кола міститься на відстані $m\sqrt{2}$ від вершини прямого кута.

29. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза, h – висота, проведена до гіпотенузи. Доведіть, що трикутник зі сторонами h, $c + h$ і $a + b$ – прямокутний.

30. $ABCD$ – прямокутна трапеція, $\angle A = \angle B = 90°$, $AB = a$, $CD = b$, $BC = c$, $BC < DA$. Знайдіть відстань від точки B до прямої, що містить CD.

31. Обчисліть: 1) $\sin 15°$; 2) $\sin 75°$.

Розділ 4

Многокутники. Площі многокутників

32. Чи існує многокутник, у якого:
1) 20 діагоналей; 2) 21 діагональ?

33. В опуклому n-кутнику п'ять кутів мають градусну міру 140° кожний, інші кути – гострі. Знайдіть n.

34. Доведіть, що відстані від довільної точки діагоналі паралелограма до непаралельних сторін обернено пропорційні довжинам цих сторін.

35. Усередині прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) узято точку M так, що площі трикутників AMB, BMC і CMA рівні між собою. Доведіть, що $MA^2 + MB^2 = 5MC^2$.

36. У скільки разів площа трикутника ABC більша за площу трикутника ABM, де M – точка перетину медіан трикутника ABC?

37. У трикутнику ABC h_1, h_2, h_3 – висоти, проведені відповідно до сторін AB, BC і CA, а d_1, d_2, d_3 – відстані від довільної точки P, що міститься всередині цього трикутника, до сторін AB, BC і CA відповідно. Доведіть, що $\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} = 1$.

38. Точка перетину бісектрис трикутника на 3 см віддалена від прямої, що містить одну зі сторін трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо його периметр дорівнює 36 см.

39. На сторонах AB, BC, AC трикутника ABC позначено точки M, K, P так, що $AM : MB = BK : KC = CP : PA = 2 : 1$. Площа трикутника ABC дорівнює S. Знайдіть площу чотирикутника $APKM$.

40. Бісектриси всіх кутів трапеції перетинаються в точці O, яка міститься на відстані d від більшої сторони трапеції. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють m і n.

41. AD і BC – основи трапеції $ABCD$, $CD = c$, точка K – середина бічної сторони AB. Відстань від точки K до прямої, що містить сторону CD, дорівнює d. Знайдіть площу трапеції.

42. У трапеції $ABCD$ M – середина більшої основи AD, $AB = BC = CD = a$. Точка перетину діагоналей трапеції збігається з точкою перетину висот трикутника BMC. Знайдіть площу трапеції.

Європейська математична олімпіада для дівчат

Міжнародні математичні олімпіади (ММО) запроваджено 1959 року. Перші пів століття їхніми учасниками були тільки хлопці. Щоб надихнути й дівчат брати участь у математичному русі, у 2012 році в Кембриджі (Велика Британія) вперше було проведено дівчачу Європейську математичну олімпіаду (*European Girl's Mathematical Olympiad*, *EGMO*). У ній взяли участь 70 дівчат з 19 країн. Наступні *EGMO* проходили у Люксембурзі, Туреччині, Білорусі, Румунії, Швейцарії та Італії. З того часу українські учасниці тричі набирали найвищу сумарну кількість балів у офіційному заліку й здобували статус найкращої команди. Досі жодній з інших країн не вдалося повторити такі високі результати.

VIII Європейська математична олімпіада для дівчат уперше була проведена в Україні, у Києві, у квітні 2019 року. Співорганізаторами олімпіади виступили Міністерство освіти і науки України, КНУ імені Тараса Шевченка, Мала академія наук (МАН). У ній взяли участь 49 міжнародних команд.

200 учасниць у віці від 13 до 20 років під час інтелектуальних змагань розв'язували доволі складні математичні завдання з алгебри, комбінаторики, геометрії та теорії чисел. Щодня дівчата вирішували по три задачі, за кожну з яких вони могли отримати від 0 до 7 балів. Оцінювалася не лише правильність, а й оригінальність рішень. Українська команда в цих змаганнях посіла почесне перше місце!

Хоча *EGMO* має статус європейської олімпіади, представники інших країн теж можуть брати в ній участь, але поза конкурсом. Так, у 2024 році XIII Європейська олімпіада для дівчат проходила в місті Цхалтубо (Грузія). У ній взяли участь 212 школярок з 54 країн світу, зокрема 151 дівчина з 38 країн Європи.

За підсумками EGMO-2024 перемогу в командному заліку вибороли чотири українки – Євгенія Франкевич (Львів, золото), Марина Спектрова (Харків, золото), Аліса Потьомкіна (Київ, золото) та Катерина Сидоренко (Київ, срібло). У напруженій боротьбі, відстаючи від румунок, у кінцевому підсумку наші дівчата випередили команду суперниць на 5 балів! Так, українська команда дівчат показала четвертий командний результат, пропустивши вперед тільки команди Сполучених Штатів, Австралії й Китаю. Але ці команди – неєвропейські. А от серед офіційних європейських учасниць команда України – перша!

Українська четвірка переможиць на EGMO-2024

ДОДАТОК 1

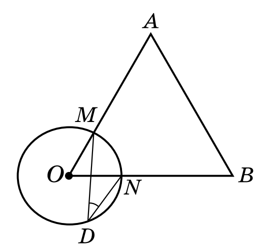
ГОТУЄМОСЯ ДО ЗНО (НМТ)

Розв'яжіть задачі, що пропонувалися на зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО) з математики минулих років, які охоплюють курс геометрії 8-го класу. У дужках указано, у якому році це завдання пропонувалося на ЗНО.

До кожного із завдань 1, 2, 4, 6, 9 оберіть правильний варіант відповіді з п'яти запропонованих варіантів (А–Д). До кожного із завдань 3, 5, 7, 8, 10–13 відповідь запишіть.

Тема «ЧОТИРИКУТНИКИ»

1. (2011 р.) На малюнку зображено коло із центром у точці O та рівносторонній трикутник AOB, що перетинає коло в точках M і N. Точка D належить колу. Знайдіть градусну міру кута MDN.



А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	120°

2. (2015 р.) На діагоналі AC квадрата $ABCD$ задано точку, відстань від якої до сторін AB і BC дорівнює 2 см і 6 см відповідно. Визначте периметр квадрата $ABCD$.

А	Б	В	Г	Д
16 см	24 см	32 см	48 см	64 см

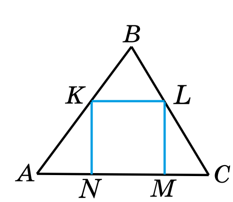
3. (2012 р.) Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає його більшу сторону BC в точці M. Визначте радіус кола (у см), описаного навколо прямокутника, якщо $BC = 24$ см, $AM = 10\sqrt{2}$ см.

Тема «ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ»

4. (2011 р.) У трикутнику ABC: $AB = 31$ см, $BC = 15$ см, $AC = 26$ см. Пряма a, паралельна стороні AB, перетинає сторони BC і AC у точках M і N відповідно. Обчисліть периметр трикутника MNC, якщо $MC = 5$ см.

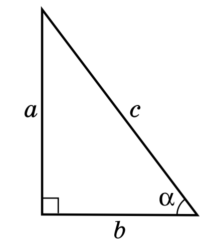
А	Б	В	Г	Д
15 см	24 см	48 см	21 см	26 см

5. (2013 р.) У трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. мал.). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр квадрата (у см), якщо $AC = 10$ см.



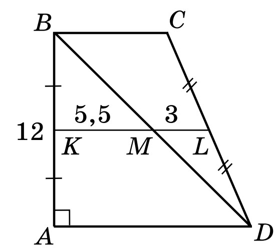
Тема «РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ»

6. (2015 р.) На малюнку зображено прямокутний трикутник з катетами a і b, гіпотенузою c та гострим кутом α. Укажіть правильну рівність.



А	Б	В	Г	Д
$\cos\alpha = \frac{a}{b}$	$\cos\alpha = \frac{c}{b}$	$\cos\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

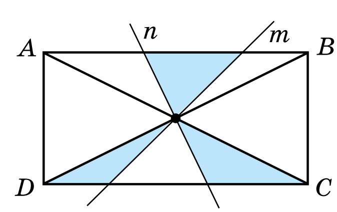
7. (2009 р.) У трапеції $ABCD$: $\angle A = 90°$, $AB = 12$ см (див. мал.). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML, причому $KM = 5{,}5$ см і $ML = 3$ см. Обчисліть периметр трапеції $ABCD$ (у см).



8. (2006 р.) (Задача Л. Пізанського, XII–XIII ст.) Дві вежі, одна з яких 40 футів, а друга – 30 футів заввишки, розташовано на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що розміщена між ними, одночасно з обох веж злетіло по пташці. Рухаючись з однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (у футах).

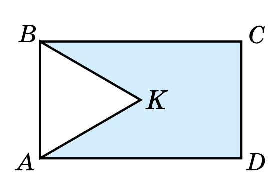
Тема «МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ»

9. (2006 р.) У прямокутнику $ABCD$ прямі m і n проходять через точку перетину діагоналей. Площа фігури, що складається з трьох зафарбованих трикутників, дорівнює 12 см^2. Обчисліть площу прямокутника $ABCD$.



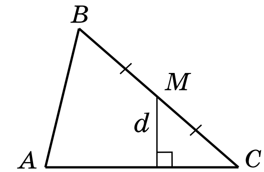
А	Б	В	Г	Д
24 см^2	30 см^2	36 см^2	42 см^2	48 см^2

10. (2010 р.) На малюнку зображено прямокутник $ABCD$ і рівносторонній трикутник ABK, периметри яких відповідно дорівнюють 20 см і 12 см. Знайдіть периметр п'ятикутника $AKBCD$ (у см).



11. (2013 р.) Менша сторона прямокутника дорівнює 16 м та утворює з його діагоналлю кут 60°. Середини всіх сторін прямокутника сполучено послідовно. Знайдіть значення виразу $\frac{S}{\sqrt{3}}$, де S – площа (у м^2) утвореного чотирикутника.

12. (2013 р.) У трикутнику ABC точка M – середина сторони BC, $AC = 24$ см (див. мал.). Знайдіть відстань d (у см) від точки M до сторони AC, якщо площа трикутника ABC дорівнює 96 см^2.



13. (2014 р.) Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута й ділить середню лінію трапеції на відрізки 13 см і 23 см завдовжки. Обчисліть (у см^2) площу трапеції.

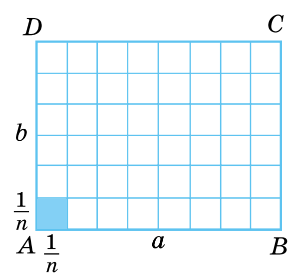
ДОДАТОК 2

ТЕОРЕМА ПРО ПЛОЩУ ПРЯМОКУТНИКА

Т **Площа S прямокутника зі сторонами a і b обчислюється за формулою $S = a \cdot b$.**

Доведення. Нехай $ABCD$ – довільний прямокутник, у якого $AB = a$, $AD = b$ (мал. 1). Доведемо, що $S = ab$.

1) Якщо довжини відрізків AB і AD є раціональними числами (цілими або дробовими), то існує відрізок такої довжини h, який можна відкласти ціле число разів і на відрізку AB, і на відрізку AD.



Мал. 1

Зведемо числа a і b до спільного знаменника n. Матимемо: $a = \dfrac{p}{n}$, $b = \dfrac{q}{n}$. Тоді $h = \dfrac{1}{n}$. Маємо $a = ph$, $b = qh$. Розіб'ємо відрізок AB на p рівних частин h завдовжки, а AD – на q рівних частин h завдовжки. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні сторонам прямокутника (мал. 1). Ці прямі розіб'ють увесь прямокутник на pq рівних між собою квадратів зі стороною $h = \dfrac{1}{n}$ (один з таких квадратів зафарбовано на мал. 1). Оскільки одиничний квадрат уміщує рівно n^2 квадратів зі стороною $\dfrac{1}{n}$, то площа одного квадрата з такою стороною дорівнює $\dfrac{1}{n^2}$. Площа прямокутника дорівнює сумі площ усіх квадратів. Маємо:

$$S = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

2) Розглянемо випадок, коли хоч одна з довжин відрізків AB або AD є числом ірраціональним (нескінченним десятковим дробом).

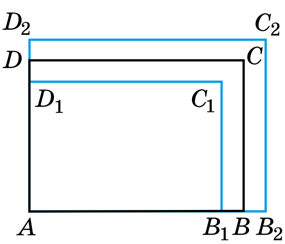
Нехай число a_n одержали із числа a відкиданням усіх десяткових знаків після коми, починаючи з $(n + 1)$-го. Оскільки a відрізняється від a_n не більше ніж на $\frac{1}{10^n}$, то

$$a_n \leqslant a \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Аналогічно розглянемо число b_n таке, що $b_n \leqslant b \leqslant b_n + \frac{1}{10^n}$. На прямих AB і AD відкладемо відрізки AB_1, AB_2, AD_1, AD_2, де $AB_1 = a_n$, $AB_2 = a_n + \frac{1}{10^n}$, $AD_1 = b_n$, $AD_2 = b_n + \frac{1}{10^n}$ і побудуємо прямокутники $AB_1C_1D_1$ і $AB_2C_2D_2$ (мал. 2). Тоді

$$S_{AB_1C_1D_1} \leqslant S_{ABCD} \leqslant S_{AB_2C_2D_2};$$

$$a_n b_n \leqslant S_{ABCD} \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)\left(b_n + \frac{1}{10^n}\right).$$



Мал. 2

Будемо необмежено збільшувати число n. Тоді число $\frac{1}{10^n}$ стає дуже малим, а тому число $a_n + \frac{1}{10^n}$ практично не відрізнятиметься від числа a_n, а число $b_n + \frac{1}{10^n}$ практично не відрізнятиметься від числа b_n. Тому добуток $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)\left(b_n + \frac{1}{10^n}\right)$ практично не відрізнятиметься від добутку $a_n b_n$. Отже, з останньої подвійної нерівності випливає, що площа прямокутника $ABCD$ практично не відрізняється від числа $a_n b_n$. Тому $S = a_n b_n$.

Але з нерівностей $a_n \leqslant a \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}$ і $b_n \leqslant b \leqslant b_n + \frac{1}{10^n}$ при необмеженому збільшенні числа n слідує, що число a практично не відрізняється від числа a_n, а число b – від числа b_n. Отже, число $a_n b_n$ практично не відрізняється від числа ab.

Остаточно маємо: $S = ab$. ■

Жінки в науці

Українка Катерина Пожарська, випускниця Волинського національного університету імені Лесі Українки, отримала престижну міжнародну премію з математики «Joseph F. Traub Information-Based Complexity Young Researcher Award 2023».

Така премія щороку присуджується одному молодому (до 35 років) вченому-математику за значний внесок у теорію інформаційної складності.

Катерина Пожарська

У 2015 році Катерина Пожарська вступила до аспірантури відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, де захистила кандидатську дисертацію на тему «Кращі наближення та ентропійні числа класів періодичних функцій багатьох змінних». Продовжила свої наукові дослідження на посаді наукового співробітника відділу теорії функцій Інституту математики. У 2020–2021 роках Катерина Пожарська отримувала стипендію НАН України для молодих науковців, а у 2021 році, у складі колективу співробітників відділу теорії функцій (Катерина Пожарська, Тетяна Степанюк і Сергій Янченко), була нагороджена премією президента України для молодих учених.

Нині вона є також постдокторським дослідником у місті Хемніц (Німеччина), як стипендіатка від фонду Гумбольдта. Команда, у якій вона працює, займається дослідженням сучасних задач теорії наближень і розробкою алгоритмів для зменшення інформаційної складності, що знаходять застосування в машинному навчанні.

«Бажаємо тобі стати другим Остроградським...»

Михайло Васильович Остроградський народився 12 вересня 1801 року в с. Пашенна Полтавської губернії (нині с. Пашенівка). Діди та прадіди Михайла Васильовича служили в козацькому війську, брали участь у багатьох боях, не раз виявляли військову доблесть і героїзм. Мабуть, саме тому в дитинстві Михайло Васильович так мріяв стати військовим. Але йому судилося стати всесвітньо відомим ученим.

У дитинстві Михайло виявляв виняткову спостережливість і захоплювався вимірюваннями. Навчався він у пансіоні при Полтавській гімназії, потім у самій гімназії. Закінчивши гімназію, став вільним слухачем Харківського університету, а згодом і його студентом. Після закінчення університету з відзнакою в серпні 1820 року менш ніж за рік потому (у квітні 1821 року) отримує ступінь кандидата наук за дослідження в галузі прикладної математики. У 1822 році Остроградський вирушає до Парижа з метою удосконалення своєї математичної освіти, ставши слухачем університету в Сорбонні. Саме там він публікує свої перші наукові праці, стає відомим науковцем та здобуває авторитет у французьких математиків. Але через постійний брак коштів Михайло Васильович був вимушений залишити Париж, майже пішки подолавши взимку 1828 року шлях від Парижа до Петербурга.


М. В. Остроградський
(1801–1862)

Наукові кола Петербурга зустріли молодого вченого з радістю і надією. Його авторитет серед петербурзьких діячів науки був високим і незаперечним. У тому ж 1828 році Остроградський починає викладацьку діяльність у Морському кадетському корпусі Петербурга та стає ад'юнктом Петербурзької академії наук. А з 1830 року викладає ще в чотирьох вищих навчальних закладах Петербурга. У 1834 році Остроградського було обрано членом Американської академії наук, у 1841 році – членом Туринської академії, у 1853 – членом Римської академії Лінчів і в 1856 році – членом-кореспондентом Паризької академії наук.

Лекції Остроградського відвідували не лише студенти, а й викладачі, професори, відомі математики. Усіх приваблювала його система викладання предмета – широка загальність теми, виразність і стислість викладу, а також веселий характер та гострий розум. На лекціях він обов'язково вживав українські слова, прислів'я та приказки. Тому студенти завжди згадували його лекції із захватом.

Улюбленим письменником Остроградського був Т. Г. Шевченко, з яким він був особисто знайомий та значну частину творів якого знав напам'ять і охоче декламував. У 1858 році, коли Тарас Григорович повертався із заслання через Петербург на батьківщину, Михайло Васильович запропонував Кобзареві для проживання свою петербурзьку квартиру.

Повернувшись із заслання, Шевченко писав у «Щоденнику»: «Великий математик прийняв мене з розпростертими обіймами, як земляка і як свого сім'янина, що надовго кудись виїжджав».

Михайло Васильович був визначною, оригінальною, усебічно обдарованою людиною. Його високо цінували не тільки за розум, а й за незалежність, демократизм, скромність, щирість і простоту, за повагу до людей праці, за його гідність. Перебуваючи на вершині слави, вшанований за свої наукові праці в усій Європі, Остроградський поводив себе надзвичайно просто і не любив говорити про свої заслуги.

І хоч які б проблеми розв'язував учений (він займався алгеброю, прикладною математикою, теорією чисел, теорією ймовірностей, механікою тощо), усі його наукові праці позначені глибиною думки й оригінальністю, у них незмінно присутня широта його поглядів, уміння глибоко зануритися в суть проблеми і знайти численні узагальнення.

На все життя Михайло Васильович зберіг любов до рідної Землі та рідної мови. Майже щороку влітку він виїжджав в Україну, щоб поринути в повний спокій та помилуватися чудовими краєвидами. Улітку 1861 року Остроградський, відвідуючи своє рідне село, захворів і 1 січня 1862 року помер.

За свою майже 40-річну наукову діяльність Михайло Васильович написав понад 50 наукових праць з різних галузей математики: математичного аналізу, аналітичної і небесної механіки, математичної фізики, теорії ймовірностей. Свої педагогічні погляди М. В. Остроградський виклав у підручниках з елементарної і вищої математики.

Ім'я М. В. Остроградського носить Кременчуцький національний університет.

Попри те, що майже все своє життя Михайло Остроградський займався наукою поза межами України, він став широко відомим серед своїх співвітчизників. Авторитет і популярність М.В. Остроградського були настільки значними, що саме його ім'я стало синонімом ученого. Батьки, віддаючи дитину на навчання, бажали їй «стати другим Остроградським».

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $a^0 = 1$	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

m і n – цілі числа, $a \neq 0$, $b \neq 0$

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad a \geqslant 0$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$a \geqslant 0, \quad b \geqslant 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$a \geqslant 0, \quad b > 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \sqrt{a^{2k}} = |a^k|$$

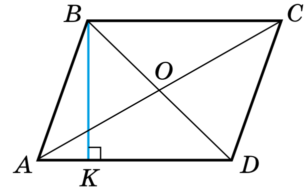
a – будь-яке число, k – натуральне число

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

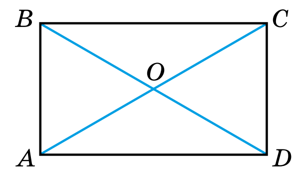
ЧОТИРИКУТНИКИ

Паралелограм



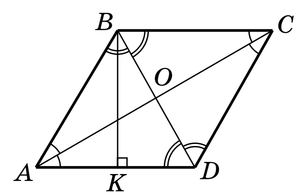
1. $AB = CD,\ \ AD = BC$
2. $\angle A = \angle C,\ \ \angle B = \angle D$
3. $AO = OC,\ \ BO = OD$
4. $P = 2(AB + AD)$
5. $S = AD \cdot BK$

Прямокутник



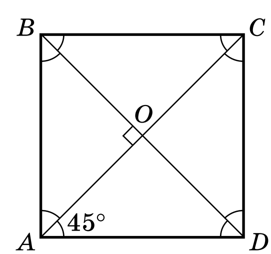
1. $AB = CD,\ \ AD = BC$
2. $AC = BD$
3. $AO = BO = CO = DO$
4. $P = 2(AB + AD)$
5. $S = AD \cdot AB$

Ромб



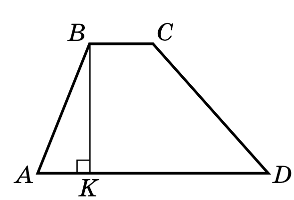
1. $AB = BC = CD = DA$
2. $\angle A = \angle C,\ \ \angle B = \angle D$
3. $AC \perp BD$
4. $AO = OC,\ \ BO = OD$
5. $\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA,$
   $\angle ABD = \angle DBC = \angle BDA = \angle BDC$
6. $P = 4AB$
7. $S = AD \cdot BK = \dfrac{AC \cdot BD}{2}$

Квадрат



1. $AB = BC = CD = DA$
2. $AC = BD$
3. $AO = BO = CO = DO$
4. $AC \perp BD$
5. Діагоналі утворюють зі сторонами кути по 45°
6. $P = 4AB$
7. $S = AB^2$

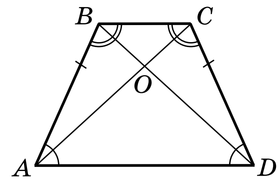
Трапеція



1. $\angle A + \angle B = 180°,\ \angle C + \angle D = 180°$
2. $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BK$

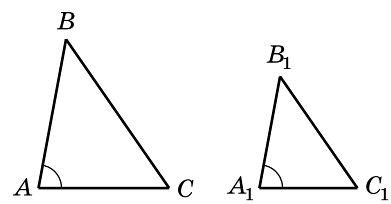
Рівнобічна трапеція

1. $AB = CD$
2. $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$
3. $AC = BD$

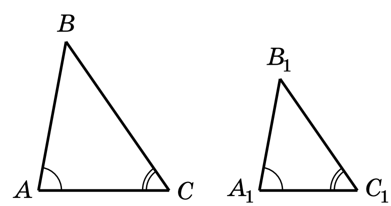


ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

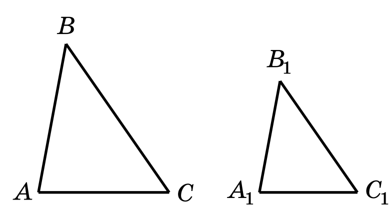
1. Якщо $\angle A = \angle A_1$,
$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



2. Якщо $\angle A = \angle A_1$,
$\angle C = \angle C_1$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

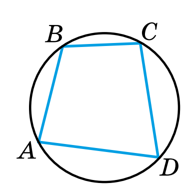


3. Якщо $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1}$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



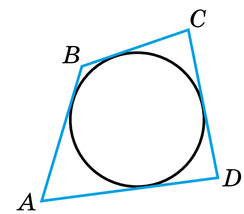
ВПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИК

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$



ОПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИК

$AB + CD = AD + BC$



ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Тема 7

§ 29

29.10. 1) $0 \leqslant y \leqslant 9$; 2) $0 \leqslant y \leqslant 4$. **29.12.** 1) 0; 3; 2) −2. **29.13.** 1) 2; −2; 2) 0; 2. **29.14.** 1) Графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотою» точкою (−1; 1); 2) графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотими» точками (−2; 4) і (2; 4). **29.15.** 1) Графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотою» точкою (0; 0); 2) графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотими» точками (−1; 1) і (1; 1). **29.22.** 250. **29.23.** 480 діб.

§ 30

30.18. 1) Ні; 2) так; 3) ні. **30.19.** 1) $x > 0$; 2) x – будь-яке число; 3) $x \geqslant 0$; 4) $x < 0$. **30.20.** 1) $y \geqslant 0$; 2) $y > 0$; 3) y – будь-яке число; 4) $y \leqslant 0$. **30.21.** 1) Коренів немає; 2) 32; 3) 13; 4) 4,5. **30.22.** 1) 12; 2) коренів немає; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 1. **30.23.** 1) $a = 0$; 2) $a = -3$; 3) a – будь-яке число; 4) $0 \leqslant a < 3$ або $a > 3$. **30.24.** 1) 5; −4; 2) 16; 3) 49. **30.25.** 1) 11; −14; 2) 49. **30.26.** −1. **30.27.** 1) $x = 3$; $y = 0$; 2) $x = -2$; $y = -1$. **30.31.** 2,457 тонни. **30.32.** Ні.

§ 31

31.16. 1), 3), 5) Так; 2), 4), 6) ні. **31.17.** 1), 3) Ні; 2), 4) так. **31.18.** $\frac{1}{2}$; 0,(1); 0,11; $\frac{1}{10}$; 0,01. **31.19.** 0,02; $\frac{1}{5}$; 0,22; 0,(2); $\frac{1}{4}$. **31.23.** 6,25 см; $9\frac{1}{9}$ дм. **31.24.** *Порада*. Нехай $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ – нескоротний дріб. Тоді $2n^2 = m^2$. **31.28.** 150 мг. **31.29.** 1) Другий; 2) перший.

§ 32

32.15. 1) 25; 2) −30; 3) 56; 4) 16,2; 5) 30; 6) 0. **32.16.** 1) 49; 2) −84; 3) 44; 4) −2,1; 5) 40; 6) $\frac{51}{65}$. **32.17.** 1) 8; −4; 2) −1; −5; 3) 1; 4) $-3 \pm \sqrt{7}$; 5) $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{3}$; 6) коренів немає. **32.18.** 1) 3; −5; 2) 7; −3; 3) −2; 4) $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$; 6) коренів немає. **32.20.** 1) 5; −5; 2) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **32.21.** 1) 8; −8; 2) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$. **32.22.** 1) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 2) 2; −2; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{6}$. **32.23.** 1) $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$;

2) 3; −3. **32.24.** 1) $b = 0$; 2) $b \geqslant 4$; 3) $b \geqslant 0$. **32.25.** 1) $m > 0$; 2) немає таких значень m; 3) $m \leqslant 0$. **32.26.** $\frac{x-3}{2x}$. **32.27.** 1) 8; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{5}$. **32.31.** 12 %. **32.32.** Так.

§ 33

33.21. 1) $15\frac{13}{32}$; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) 12; 4) 0,13. **33.22.** 1) $10\frac{34}{45}$; 2) $1\frac{1}{6}$; 3) 35; 4) 0,07. **33.23.** 1) 210; 2) 48; 3) 12,6; 4) 18; 5) 39; 6) 154. **33.24.** 1) 160; 2) 75; 3) 10,8; 4) 12; 5) 34; 6) 126. **33.25.** 1) 432; 2) 144; 3) 125; 4) 243. **33.26.** 1) 1; 2) 216. **33.27.** 1) 112; 2) 432. **33.28.** 1) $0{,}6x$; 2) $-11y$; 3) p; 4) $5x^2$; 5) $5a^3$; 6) $-\frac{5}{7}c^5$. **33.29.** 1) $0{,}7p$; 2) $-\frac{5}{8}m$; 3) $7b^4$; 4) $-0{,}1a^7$. **33.30.** 1) $-5mn^6$; 2) $-\frac{7}{13}m^7n^9$; 3) x^3y^4; 4) $-\frac{p^3m^6}{x^4}$; 5) $-2m^4p^{10}$; 6) $-x^4z$. **33.31.** 1) $8ab^4$; 2) $-\frac{1}{2}b^4c^6$; 3) $-\frac{x^4y^6}{z}$; 4) $3b^7$. **33.32.** 1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}$; 2) $\frac{\sqrt{-2x}}{\sqrt{-3y}}$. **33.33.** 1) $x - y$; 2) $n - m$; 3) $x - 5$; 4) $6 - a$; 5) 5; 6) −2. **33.34.** 1) $m - 2$; 2) $-p - 4$; 3) 1; 4) −3. **33.35.** 1) 4; 2) 1; 3) $9 - 2\sqrt{21}$; 4) $2 + \sqrt{3}$. *Порада.* $7 + 4\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = (2 + \sqrt{3})^2$. **33.36.** 1) −8; 2) $\sqrt{2} - 1$. **33.44.** 1) 672 л; 2) *Порада.* Врахуйте, що 1 м^3 = 1000 л. **33.45.** 96 грн.

§ 34

34.23. 1) $m\sqrt{13}$; 2) $b\sqrt{b}$; 3) $-a^3\sqrt{7}$; 4) $4x^3\sqrt{x}$. **34.24.** 1) $x\sqrt{11}$; 2) $c^2\sqrt{c}$; 3) $-p^5\sqrt{2}$; 4) $6m^5\sqrt{m}$. **34.25.** 1) $\sqrt{2a^2}$; 2) $-\sqrt{5b^6}$; 3) $\sqrt{3b}$; 4) $-\sqrt{-x^7}$. **34.26.** 1) $\sqrt{3b^2}$; 2) $-\sqrt{7c^{10}}$; 3) $\sqrt{5x^3}$; 4) $-\sqrt{-y^3}$. **34.27.** 1) 47; 2) $165 + 37\sqrt{6}$; 3) $36 - 12\sqrt{6}$. **34.28.** 1) $\sqrt{a}(1 - \sqrt{3})$; 2) $\sqrt{p}(\sqrt{7} + 2)$; 3) $\sqrt{7}(\sqrt{3} + 1)$; 4) $\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$; 5) $\sqrt{2m}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$; 6) $\sqrt{5x}(\sqrt{x} - \sqrt{2})$. **34.29.** 1) $\sqrt{p}(1 + \sqrt{2})$; 2) $\sqrt{6}(\sqrt{7} - 1)$; 3) $\sqrt{3a}(\sqrt{3} + \sqrt{2a})$. **34.30.** 1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 6}$; 2) $\frac{\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}{\sqrt{a} - 3\sqrt{b}}$; 3) $\sqrt{2{,}5}$. **34.31.** 1) $\frac{\sqrt{a} + 5}{\sqrt{a}}$; 2) $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt{5{,}5}$. **34.32.** 1) $3(\sqrt{6} + 1)$; 2) $\frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}$. **34.33.** 1) $5(\sqrt{3} - 1)$; 2) $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{30}$. **34.34.** 1) 2; 2) 330; 3) 8; 4) 14. **34.35.** 1) 16; 2) 60; 3) 26; 4) 7. **34.36.** 3. **34.37.** 1) $m - 1$;

2) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 3) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}$. **34.39.** $-\frac{1}{2}$. **34.40.** *Порада.* Використати те, що квадрат натурального числа не може закінчуватися цифрою 7. **34.43.** 101 250 грн.

§ 35

35.9. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{45} < \frac{1}{2}\sqrt{84}$; 2) $0,2\sqrt{1\frac{3}{8}} = 0,4\sqrt{\frac{11}{32}}$. **35.10.** 1) $\frac{3}{4}\sqrt{48} = \frac{3}{5}\sqrt{75}$; 2) $0,3\sqrt{1\frac{4}{9}} > 0,2\sqrt{1\frac{3}{4}}$. **35.11.** 1) $0 \leqslant y \leqslant 2$; 2) $1 \leqslant y \leqslant 3$. **35.12.** 4. **35.13.** 1. **35.19.** 56 грн. **35.20.** 244,85. *Порада.* Позначити $a = \frac{1}{1997}$; $b = \frac{3}{2000}$.

Вправи для повторення теми 7

4. 1) Збільшиться в 9 разів; зменшиться у 81 раз. 2) Збільшити у 2 рази; зменшити в 5 разів. **5.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **6.** (–2; 4), (3; 9). **11.** 1) 100; 2) 1. **12.** 1) 20; 2) 13,96. **13.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $x \geqslant 3$; 3) $x < -1$, $-1 < x \leqslant 0$; 4) $x = 0$. **14.** 1) Якщо $a = 0$, то $x \geqslant 0$; якщо $a \neq 0$, то $x = 0$; 2) якщо $a \leqslant 0$, то коренів немає; якщо $a > 0$, то $x = \frac{1}{a^2}$; 3) якщо $a \leqslant 0$, то коренів немає; якщо $a > 0$, то $x = \frac{25}{a^2} + 1$; 4) якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 0$. **18.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **21.** *Порада.* 1) Знайти $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$. **26.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $3\sqrt{2}$; 4) 5. **28.** 9 або –9. **29.** 1) $m > 1$; 2) $m = 1$; 3) $m < 1$. **36.** 15 см або $6\frac{2}{3}$ см. **37.** 1) 600; 2) 0,09; 3) 360; 4) 648. **38.** 1) $p^2c^4a^6$; 2) $-7xy^3$; 3) $\frac{m^{10}}{n^{12}}$; 4) $\frac{a^5}{b^7}$. **39.** 1) 0,4; 2) 0,3; 3) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{13}-\sqrt{11}$. **40.** 1) $\frac{x-7}{x+2}$; 2) $\frac{p-2}{p+3}$. **44.** 1) $2x^4\sqrt{7x}$; 2) $\frac{m\sqrt{7m}}{6}$; 3) $-5ab^2\sqrt{b}$; 4) $2xy^5\sqrt{2x}$; 5) $-2p^3\sqrt{-2p}$; 6) $xy\sqrt{xy}$. **46.** 1) 24; 2) $\frac{\sqrt{6}}{12}$. **48.** 1) $-\frac{1}{2+\sqrt{2x}+x}$; 2) $\sqrt{x+y}+1$. **49.** $\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. **50.** *Порада.* Позначити $\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}} = x$ та знайти x^2. **51.** 1) $\sqrt{3}$; 2) –1; 3) $\sqrt{7p^2}$; 4) $-\sqrt{\frac{3-b}{2}}$. **54.** 1) Так, (1; 1); 2) так, (64; 8); 3) так, (0; 0);

4) ні. **55.** 1) 3; $\sqrt{14}$; 4; $\sqrt{16,2}$; $\sqrt{19,1}$; 2) 0,2; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{\frac{1}{11}}$; $\sqrt{0,1}$. **56.** 1) $x \geqslant 1$; 2) $0 \leqslant x < 4$; 3) $1 < x \leqslant 16$; 4) $81 \leqslant x < 10\,000$; 5) $x \geqslant 0$; 6) таких значень x немає.

Тема 8

§ 36

36.7. 17 м. **36.8.** 2,4 м. **36.26.** $\sqrt{11}$ см або $\sqrt{61}$ см. **36.27.** $\sqrt{21}$ см або $\sqrt{29}$ см. **36.28.** 10 м. **36.29.** 8 м. **36.30.** 112 см. **36.31.** 80 см. **36.32.** 20; 16; $\sqrt{14}$; 13. **36.33.** 6; 10. **36.34.** 24 см. **36.35.** 30 см. **36.36.** 28 см. **36.37.** 11 см. **36.38.** $\sqrt{26}$ см. **36.39.** $\sqrt{50}$ см. **36.40.** 3 см і $\sqrt{73}$ см. **36.41.** $\sqrt{1850}$ см $= 5\sqrt{74}$ см. **36.42.** $\sqrt{468}$ см $= 6\sqrt{13}$ см. **36.45.** 90 см. **36.46.** 84 см. **36.47.** 30 см. **36.48.** 5 см. **36.50.** 162 см. **36.51.** 20 см. **36.52.** 6 см. **36.53.** 40 см. **36.54.** 60°; 60°; 120°; 120°. **36.58.** 3 банки. **36.59.** Так.

§ 37

37.13. 17 см або 3 см. **37.14.** 21 см або 9 см. **37.15.** 30°. **37.16.** 45°. **37.17.** 12 см. **37.18.** 10 см. **37.19.** 2 см; 10 см; $\sqrt{96}$ см $= 4\sqrt{6}$ см. **37.20.** 5 см; 7 см; $\sqrt{24}$ см $= 2\sqrt{6}$ см. **37.21.** 6,6 см; 8,4 см. **37.22.** 3,4 см; 21,6 см. **37.23.** 90°. **37.24.** 10 см. **37.25.** 4 см. **37.27.** 1) 90°; 30°; 60°; 2) 90°; 45°; 45°. **37.28.** 1) 90 млн м^3; 2) 3600 млн м^3. **37.29.** 11 ярдів.

§ 38

38.21. $2a(1 + \operatorname{tg}\beta)$. **38.22.** $\frac{b^2}{\operatorname{tg}\alpha}$. **38.23.** 15,63 см. **38.24.** 12,43 см. **38.25.** $c\sin\alpha\cos\alpha$. **38.26.** $\frac{h}{\sin\beta\cos\beta}$. **38.27.** 39° і 51°. **38.28.** 61° і 29°. **38.29.** 1) $AB = 10$ см; $BC = 8$ см; 2) $AC = 12$ см; $BC = 5$ см. **38.30.** 1) $AB = 5$ см; $BC = 3$ см; 2) $AC = 16$ см; $BC = 30$ см. **38.31.** $\frac{a-b}{\cos\alpha}$. **38.32.** $BC = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$; $CK = \frac{b\cos\gamma}{\operatorname{tg}\beta}$; $BK = \frac{b\sin\gamma}{\operatorname{tg}\beta}$. **38.33.** $BC = \frac{a}{\sin\alpha}$; $AC = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}$; $AB = \frac{a}{\sin\alpha\cos\beta}$. **38.34.** 41°36′. **38.35.** 79°36′ і 100°24′. **38.36.** $m\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **38.37.** $\frac{r}{\cos\beta\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$. **38.38.** $10(\sqrt{2}-1)$ см. **38.39.** $4\sqrt{3}$ см. **38.40.** $5(\sqrt{3}+1)$ см. **38.41.** $4(3-\sqrt{3})$ см. **38.43.** 48 см. **38.45.** 3°.

§ 39

39.8. 31,9 м. **39.9.** 27,5 м. **39.11.** 1) $AB = 8$ см, $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$; 2) $AB = 17$ дм, $\angle B \approx 28°4'$, $\angle A \approx 61°56'$; 3) $AB = 3\sqrt{10}$ см $\approx 9{,}49$ см, $\angle A \approx 71°34'$, $\angle B \approx 18°26'$; 4) $AB = 25m$ дм, $\angle A \approx 73°44'$, $\angle B \approx 16°16'$. **39.12.** 1) $AB = 4$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$; 2) $AB = 10$ см, $\angle A \approx 36°52'$, $\angle B \approx 53°8'$; 3) $AB = \sqrt{29}$ дм $\approx 5{,}39$ дм, $\angle A \approx 68°12'$, $\angle B \approx 21°48'$; 4) $AB = 41k$ дм, $\angle A \approx 77°19'$, $\angle B \approx 12°41'$. **39.13.** 1) $BC = 3$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$; 2) $AC = 63$ дм, $\angle A \approx 14°15'$, $\angle B \approx 75°45'$; 3) $BC = \sqrt{33}$ см $\approx 5{,}74$ см, $\angle A \approx 55°9'$, $\angle B \approx 34°51'$; 4) $AC = 12a$ см, $\angle A \approx 22°37'$, $\angle B \approx 67°23'$. **39.14.** 1) $BC = 4\sqrt{2}$ см, $\angle A = \angle B = 45°$; 2) $AC = 35$ дм, $\angle A \approx 18°55'$, $\angle B \approx 71°5'$; 3) $BC = \sqrt{51}$ см $\approx 7{,}14$ см, $\angle A \approx 45°34'$, $\angle B \approx 44°26'$; 4) $AC = 11b$ дм, $\angle A \approx 79°37'$, $\angle B \approx 10°23'$. **39.15.** $62°32'$. **39.16.** $\alpha \approx 1°9'$. **39.17.** $\approx 4{,}29$ м. **39.18.** $x = \frac{l}{2}$ м. **39.20.** 36 см. **39.21.** 42 см. **39.22.** 15 учнів. **39.23.** 18 прямих; 28 прямих.

Вправи для повторення теми 8

7. 52 см. **8.** 6 см; $\sqrt{244}$ см $= 2\sqrt{61}$ см. **9.** 72 см. **10.** 32 см. **11.** 78 см. **12.** 105°. **13.** 90°. **14.** 120 см. **18.** 7 см або 1 см. **19.** 26 см; 30 см; 24 см. **20.** 3,2 см. **24.** $4R(\sin\alpha + \cos\alpha)$. **25.** 31,11 см. **26.** $CK = b\sin\alpha$; $KB = b\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **27.** 50 см. **28.** $r\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}}\right)$. **29.** $\sqrt{3}$ см; $2\sqrt{43}$ см; $2\sqrt{31}$ см. **30.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ см або $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ см. **34.** $\dfrac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}$.

Тема 9

§ 40

40.15. $\frac{1}{9}$. **40.16.** -2. **40.17.** $a = 2$; $b = -6$. **40.18.** $b = -4$; $c = 3$. **40.19.** 1) 0; -1; 2) 0; -24; 3) -1; 1; 4) 0. **40.20.** 1) 0; 2; 2) 0; 24; 3) -1; 1; 4) 0. **40.21.** 0; $-4{,}5$; **40.22.** 0; -11. **40.23.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$. **40.24.** $\sqrt{2}$ і $\sqrt{2} + 2$ або $-\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2} + 2$. **40.25.** 1) 0; 5; -5; 2) 2. **40.26.** 1) 0; 3; -3; 2) 3. **40.32.** 1) 24 000 Вт. **40.33.** $2n - 3$.

§ 41

41.10. 1) -1; 3; 2) 1; $-2{,}5$; 3) 5. **41.11.** 1) 1; -5; 2) -1; 4,5; 3) 2; $-0{,}4$. **41.12.** 1) 2; 6; 2) -1; $-\frac{1}{3}$; 3) 2; 4; 4) 3; -8. **41.13.** 1) -1; 2) 2; 2,6; 3) 4; 3;

4) 1; −6. **41.14.** 1) 1; −0,6; 2) −1; $\frac{1}{3}$; 3) 23 км. **41.15.** 1) −1; $6\frac{2}{3}$; 2) 1; −3,5. **41.16.** 1) $1 \pm \sqrt{15}$; 2) $-1 \pm \sqrt{5}$; 3) $15 \pm 5\sqrt{11}$; 4) $\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$. **41.17.** 1) $-1 \pm \sqrt{7}$; 2) $1 \pm 2\sqrt{3}$; 3) $-5 \pm 2\sqrt{10}$; 4) $\frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$. **41.18.** 1) 4; 1; 2) 4; −4; 3) 1; 4) 2. **41.19.** 1) 9; 3; 2) 3; −3; 3) 5; 4) 2. **41.20.** 1) $-\frac{1}{8}$; 2) −4; 4. **41.21.** 1) $\frac{1}{16}$; 2) −6; 6. **41.23.** (0; −15), (75; 0). **41.24.** 1) −35; 2) 39. **41.27.** 18,75 %. **41.28.** 4; 10.

§ 42

42.12. 1) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; 2) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 3) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 4) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. **42.13.** 1) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 2) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; 3) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; 4) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. **42.14.** $x_2 = -2{,}5$; $q = 8{,}75$. **42.15.** $x_2 = -6$; $p = 4{,}5$. **42.16.** $x_1 = 5$; $x_2 = -2$; $p = -3$ або $x_1 = -5$; $x_2 = 2$; $p = 3$. **42.17.** $x_1 = 5$; $x_2 = -1$; $q = -5$. **42.18.** 1) $3x^2 - 14x - 5 = 0$; 2) $24x^2 + 26x + 5 = 0$; 3) $x^2 - 5 = 0$; 4) $x^2 - 4x + 1 = 0$. **42.19.** 1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; 2) $16x^2 - 10x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 7 = 0$; 4) $x^2 - 6x + 2 = 0$. **42.20.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) 12; 3) 22; 4) $-7\frac{1}{3}$; 5) $2\frac{4}{9}$; 6) 28. **42.21.** 1) −2,5; 2) −10; 3) 29; 4) −14,5; 5) 7,25; 6) 33. **42.22.** $x^2 - 7x + 1 = 0$. **42.23.** $x^2 + 8x + 8 = 0$. **42.24.** 80 кг; 120 кг. **42.25.** $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. **42.28.** −7 °C. **42.29.** На 12 років.

§ 43

43.1. 12 і 17. **43.2.** 12 і 15. **43.3.** 42 см. **43.4.** 80 м. **43.5.** 7 см і 10 см. **43.6.** 30 см. **43.7.** 48 см^2. **43.8.** 14 і 15. **43.9.** 70 см × 70 см. **43.10.** 15 дм. **43.11.** 19, 20, 21 або −13, −12, −11. **43.12.** 18, 19, 20 або −18, −17, −16. **43.13.** 5 і 7. **43.14.** 16 км/год і 12 км/год. **43.15.** 10 см і 12 см. **43.16.** 1 см. **43.17.** 1,5 м. **43.18.** 10 учасників. **43.19.** 5. **43.20.** 1,8 с; 1,2 с. *Порада.* Спочатку, виходячи з початкових умов, знайти v_0. **43.21.** 0,7 с. **43.22.** 2,6 с; 3,4 с. **43.23.** 3 л. *Порада.* Нехай першого разу використали x л кислоти. Ураховуючи те, що остаточно води в посудині стало 4,5 л, маємо рівняння $x - \frac{x}{6} \cdot x + x = 4{,}5$. **43.26.** $a = 0$ або $a = -2{,}25$. **43.27.** 62,25 %.

Вправи для повторення теми 9

3. Так. **4.** 1) $\pm\sqrt{2}$; 2) 0; $\frac{3}{4}$. **5.** 30 см. **6.** 1) 0; −9; 2) 2; −2. **7.** 1) $1\frac{1}{4}$;

2) $a > 0$. **11.** 1) 1; −3; 2) 2; −1,5. **12.** 1) 1; 2; 2) $5 \pm 2\sqrt{15}$; 3) $2\sqrt{2}$; $-3\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **15.** 1) $x_1 = 3$; $x_2 = -2a$ для будь-якого a; 2) якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то $x_1 = \frac{1}{a}$; $x_2 = \frac{2}{a}$. **16.** 1) 1; −6; 0; −5; 2) −1; 6; 0; 5; $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; 3) −3; 4) $\frac{1}{9}$. **19.** $x_1 = 2$; $x_2 = -4$; $q = -8$. **21.** $x_1 = 6$; $x_2 = 9$; $p = 4$ або $p = -4$. **22.** 1,6. **23.** $b = 15$ або $b = -15$. **24.** 1; $\frac{1}{2}$. **25.** $5x^2 - 8x + 1 = 0$. **26.** 6 см і 9 см. **27.** 9; 10; 11 або −11; −10; −9. **28.** 10; 11; 12; 13; 14 або −2; −1; 0; 1; 2. **29.** 24 см^2. **30.** 16 команд. **31.** 0,216 м^3 або $\frac{121}{375}$ м^3. **32.** 40 см; 80 см.

Тема 10

§ 44

44.13. 140°. **44.14.** 120°. **44.17.** Ні. **44.18.** Ні. **44.19.** 72°, 96°, 120°, 120°, 144°, 168°. **44.20.** 88°, 98°, 108°, 118°, 128°. **44.21.** 1) Так, 8 сторін, 20 діагоналей; 2) ні. **44.22.** 1) Ні; 2) так, 9 вершин, 27 діагоналей. **44.23.** 12. **44.24.** Чотирикутник. **44.25.** Так, це п'ятикутник. **44.26.** 12. **44.27.** 15. **44.28.** Периметри рівні. **44.30.** $\frac{P}{4}$ см. **44.33.** 8330 грн.

§ 45

45.13. 60 см^2. **45.14.** 120 см^2. **45.15.** 1) 32 см^2; 2) $\frac{1}{2}d^2$. **45.16.** 16 см^2. **45.17.** 6 см. **45.18.** 10 см. **45.19.** 3) Збільшиться в 16 разів; 4) збільшиться в 10 разів; 5) збільшиться в 6 разів. **45.21.** Ні. **45.22.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **45.23.** 8 см. **45.24.** 10 дм. **45.25.** 208. **45.26.** $4r^2$. **45.27.** 9 см і 12 см. **45.28.** 20 см. **45.29.** 24 см^2. **45.30.** 84 см^2. **45.31.** 108 см^2. **45.32.** 168 см^2. **45.34.** $\sqrt{5}$. **45.35.** 9. **45.36.** Так. **45.39.** 7400. **45.40.** 8.

§ 46

46.11. 2,4 см. **46.12.** 10 см. **46.13.** 60 см^2. **46.14.** 8 см^2. **46.15.** 6 см. **46.16.** 15 см. **46.17.** $\frac{P^2}{32}$ см^2. **46.18.** 72 см^2. **46.19.** 12 см^2. **46.20.** 96 см^2. **46.21.** 1) Ні; 2), 3) так. **46.22.** 8 см або 4,5 см. **46.23.** На 3 вершини. **46.24.** 15 см^2. **46.26.** ≈ 70,8 см. **46.27.** 18.

§ 47

47.11. 16 см^2. **47.12.** 36 см^2. **47.13.** 1) 40 см^2; 2) $\frac{d_1 d_2}{2}$. **47.14.** 36 см^2. **47.15.** 15 см^2; 30 см^2. **47.16.** 8 см. **47.17.** 12 см. **47.18.** 4 см^2 і 8 см^2.

47.19. 5 см^2 і 15 см^2. **47.21.** 7,5 см^2. **47.22.** 40 см^2. **47.23.** 4,8 см. **47.24.** 6,72 см. **47.25.** 54 см^2. **47.26.** 60 см^2. **47.27.** 1) і 2) Так; 3) ні. **47.28.** 1 : 2. **47.29.** 1 : 4. **47.31.** 128 см^2. **47.33.** 192,72 кг. **47.34.** 25 кроків.

§ 48

48.15. 64 см^2. **48.16.** 45 см^2. **48.17.** 3 см і 9 см. **48.18.** 5 см і 20 см. **48.19.** $\frac{(a+b)c}{4}$. **48.20.** 54 см^2. **48.21.** 24 см^2. **48.22.** 40 см^2. **48.23.** 80 см^2. **48.24.** 1080 см^2. **48.25.** 156 см^2. **48.26.** 30 см^2. **48.27.** 62,5 см^2. **48.28.** 181,5 см^2. **48.29.** h^2 см^2. **48.30.** 49 см^2. **48.31.** 18 см^2. **48.36.** 10,5 кг. **48.37.** 50 см. *Порада*. Потрібно розглянути два випадки розташування квадратів.

Вправи для повторення теми 10

3. По 108°. **4.** 20. **5.** 8. **6.** Збільшиться на 360°. **7.** $k = 2$. **11.** 1) $\frac{P^2}{16}$ см^2; 2) $4\sqrt{S}$ см; 3) 4. **13.** 144. **14.** 36 см^2 або 45 см^2. **15.** mn. **18.** 10 см^2. **19.** 1) Так; 2) ні. **20.** Квадрат, у 2 рази. **21.** 16 см^2. **22.** 320 см^2. **24.** 6 см. **25.** 6 см^2. **31.** $\frac{3a^2}{2}$ см^2. **32.** $\frac{3b^2}{2}$ см^2. **33.** У 3 рази. **34.** 80 см^2.

Тема 11

§ 49

49.19. 1) $3 \pm \sqrt{30}$; 2) $\frac{-35 \pm 5\sqrt{17}}{2}$. **49.20.** 1) $-4 \pm 2\sqrt{19}$; 2) $\frac{15 \pm 9\sqrt{5}}{2}$. **49.21.** 1) $(x - 1 - 2\sqrt{3})(x - 1 + 2\sqrt{3})$; 2) розкласти на множники не можна; 3) $-2\left(x + \frac{3+\sqrt{65}}{4}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{65}}{4}\right)$; 4) розкласти на множники не можна. **49.22.** 1) $(x + 2 - \sqrt{11})(x + 2 + \sqrt{11})$; 2) розкласти на множники не можна. **49.23.** 1) $\frac{4}{x-2}$; 2) $\frac{x-4}{x}$; 3) $\frac{2x-1}{x-3}$; 4) $\frac{x-2}{x+7}$; 5) $\frac{2x-1}{3x-1}$; 6) $\frac{5x-2}{8-2x}$. **49.24.** 1) $\frac{x+1}{x}$; 2) $\frac{x+4}{3x+2}$; 3) $\frac{x+3}{x-5}$; 4) $\frac{2(x+1)}{3(x-3)}$. **49.25.** 1) 1,93; 2) $4\frac{2}{3}$. **49.26.** 1) $\frac{4}{(x-2)(x+4)}$; 2) $\frac{1}{x+2}$; 3) 1; 4) $\frac{(x-2)(5-x)}{2(x+3)}$. **49.27.** 1) $\frac{1}{x-5}$; 2) $\frac{1}{x-2}$. **49.30.** 1) $x(x+1)(x+2)$; 2) $-2x(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ або $x(x+3)(1-2x)$; 3) $\frac{1}{4}x^2(x-1)(x+5)$; 4) $-\frac{1}{2}x^3(x+2)(x-6)$. **49.31.** 1) $x(x - 4)(x - 8)$;

2) $\frac{1}{3}x^2(x-9)(x-3)$. **49.32.** 1) Графіком є пряма $y = x + 2$ з «виколотою» точкою (1; 3); 2) графіком є пряма $y = x - 3$ з «виколотими» точками (0; −3) і (−1; −4). **49.33.** 1) $\frac{x^2}{3x-1}$; 2) $\frac{1}{4}$. **49.34.** 1) $\frac{x^2}{2x+1}$; 2) 27. **49.35.** 1) $-0{,}4a^3x^7$; 2) $2mp^3\sqrt{2m}$. **49.36.** 1) 24; 2) 68; 3) 0,68; 4) 376. **49.41.** 1164 грн. **49.42.** 3 : 2.

§ 50

50.9. 1) 9; −1; 2) 2; −9; 3) 5; −2; 4) −2; $1\frac{1}{3}$. **50.10.** 1) 4; −1; 2) 1; $-\frac{1}{2}$; 3) 1; 3; 4) 2; $-1\frac{1}{2}$. **50.11.** 1) 0; 2; −2; 2) 0; 3) 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 4) 0; 2; −3. **50.12.** 1) 0; 3; −3; 2) 0; 3) 0; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$; 4) 0; 3; −4. **50.13.** 1) 4; −5; 2) 1; 4. **50.14.** 1) 3; −4; 2) 2; 6. **50.15.** 1) 1; −1; 3; 2) −6; 3) −7; 4) коренів немає. **50.16.** 1) 1; 2) −3; 3) 7; 4) коренів немає. **50.17.** 1) −6; 3; 2) −2; $-1\frac{2}{3}$; 3) −3; 4) −2. **50.18.** 1) −4; 3; 2) −2. **50.19.** 1) −1; −5,5; 2) −7; 3) −9; 4) коренів немає. **50.20.** 1) 5; −3,6; 2) −1; 3) −15; 4) коренів немає. **50.21.** 1) −3; 4; 2) 15. **50.22.** 1) 2; 3; −3; 2) −1; $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **50.23.** 1) 1; 2; −2; 2) −2; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **50.24.** 1) 1; −1; 2) −1; 2. **50.25.** 1) 1; −1; 2) 2; −3. **50.26.** 1) 0; 1,5; 2) $-2 \pm \sqrt{35}$. **50.27.** $\frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$. **50.28.** 1) 1; −1; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; 2) 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. *Порада.* $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x^3 - 1) + (2x^2 - 2x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2x(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1 + 2x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 1)$. **50.29.** 1) 1; $\pm\sqrt{3}$; 2) −2; 1; 4. **50.30.** 1) 9. *Порада.* $\sqrt{x} = t$; 2) 0; −2; $-1 \pm \sqrt{7}$; 3) $2 \pm \sqrt{3}$; 4) 0; −1; 2; −3. **50.31.** 1) 4; 2) 0; 2; $1 \pm \sqrt{5}$; 3) $-1 \pm \sqrt{6}$; 4) 0; 1; −2; 3. **50.32.** $3(x+7)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x+7)(3x-2)$. **50.33.** 12 і 15. **50.34.** 2. **50.35.** 12 км/год; 16 км/год. **50.36.** Через 8 місяців. **50.37.** 2,5.

§ 51

51.1. 4 і 6. **51.2.** 8 і 12. **51.3.** $\frac{9}{10}$. **51.4.** $\frac{1}{6}$. **51.5.** 12 км/год; 16 км/год. **51.6.** 70 км/год; 60 км/год. **51.7.** 45 км/год. **51.8.** 80 км/год. **51.9.** 60 км/год. **51.10.** 2 км/год. **51.11.** 14 км/год. **51.12.** 24 км/год. **51.13.** 2 км/год. **51.14.** 20 км/год. **51.15.** 50 м^2, 40 м^2. **51.16.** 12 автомашин. **51.17.** 24 год; 48 год. **51.18.** 36 год; 45 год. **51.19.** 45 хв; 36 хв. **51.20.** 30 днів; 42 дні. **51.21.** 16 км або 20 км. *Порада.* Нехай

x км/год – початкова швидкість, тоді $4x$ км – відстань між селами. Маємо рівняння $\frac{10}{x}+\frac{4x-10}{x-1}=\frac{9}{2}$. **51.22.** 27 км/год. **51.24.** 1) $\frac{x+5}{x}$; 2) $\frac{x+3}{2x+2}$. **51.25.** 1) 16; 2) $-7\pm\sqrt{6}$. **51.26.** Придбати 9 пачок плитки 20 см × 20 см, витративши 2700 грн.

Вправи для повторення теми 11

5. 1) $\frac{2x+9}{x+2}$; 2) $\frac{2(x+5)}{x^2+2x+4}$; 3) $\frac{x-3}{x+2,5}$; 4) $\frac{4x+1}{1-3x}$. **6.** 1) $\frac{2}{x+3}$; 2) $\frac{x+2}{x+1}$; 3) $x(x-5)$; 4) $\frac{1}{2(x+6)}$. **7.** $p=5$; $x_2=-2$. **9.** 1) 4; −4; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 81. **10.** 1) $(x+a)\times$ $\times(x-6a)$; 2) $(x-2b)(x+5b)$. **11.** 3; $x=4$. **12.** $a=-2$; −13. **14.** 1) −2; 2) 0; $1\frac{2}{3}$; 3) 1; 4) 3; −3,5. **16.** (2; 0), (−2; 0). **17.** 1) −1; −1,5; 2) 0; $1\frac{2}{3}$; 3) −5; 6; 4) рівняння не має розв'язків; 5) −4; 6) 1; −1. **18.** 1) −3; 2) 3; −3; 3) 0. **19.** 1) 1; −1; 2) −1; 1; −3. **20.** (−2; −8); $\left(\frac{3}{4}; 3\right)$. **21.** 1) $\pm\frac{7}{8}$; 2) −1. *Порада.* $27x^3+18x^2-12x-8=(3x-2)(3x+2)^2$. **22.** 1) 1; 3; $2\pm\sqrt{3}$. *Порада.* $(x-2)^2=x^2-4x+4$ і далі $x^2-4x=t$; 2) −1; 4. *Порада.* $x(x-1)\times$ $\times(x-2)(x-3)=(x^2-3x)(x^2-3x+2)$, заміна: $x^2-3x=t$; 3) 1; 2; −1; 4; 4) $\frac{5\pm\sqrt{85}}{2}$; $\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$; 5) −2; 3; $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$; 6) 1; 10; $\frac{11\pm\sqrt{113}}{2}$. **23.** 1) 5; −3; $\frac{1\pm\sqrt{217}}{4}$; 2) −1; $-4\pm\sqrt{21}$. **24.** 12 км/год. **25.** 10 год. **26.** 16 км/год. **27.** О 18 год. **28.** 2 км/год. **29.** 20 с.; 16 с. **30.** Богдан – 60 деталей; Михайло – 40 деталей. **31.** 2 год; 6 год. **32.** 6 год; 9 год. **33.** 2 кг або 4 кг. **34.** 225 км. **35.** 40 віконних блоків. *Порада.* Нехай x віконних блоків – щоденна норма. Тоді $5x+\left(\frac{800}{x}-6\right)(x+5)=830$.

Задачі підвищеної складності з алгебри

1. *Порада.* $\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}>0$. **2.** $\frac{m^2+n^2+mn}{m+n}$. **3.** 1) $\frac{(x-y-z)x}{2}$; 2) $\frac{n+1}{n-2m}$; 3) 4; 4) $\frac{a-b}{a+b}$; 5) $1+2p$; 6) $-\frac{xy}{(x+y)^2}$. **6.** *Порада.* Після спрощення одержимо $\frac{16}{1-a^{16}}$. **8.** Піднесемо рівність $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$ до квадрата. Маємо $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}+\frac{z^2}{p^2}+$

$+\,2\cdot\dfrac{xyp+xzn+yzm}{mnp}=1.$ З рівності $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}+\dfrac{p}{z}=0$ знайдемо, що $xyp+xzn+yzm=0$. Отже, $\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{n^2}+\dfrac{z^2}{p^2}=1$. **9.** *Порада.* З умови випливає, що $a-b=\dfrac{b-c}{bc}$; $b-c=\dfrac{c-a}{ac}$; $c-a=\dfrac{a-b}{ab}$. Перемножити утворені рівності. **10.** 1) Якщо $a=2$, рівняння не має розв'язків; якщо $a\neq 2$, то $x=2$; 2) якщо $a=1$ або $a=-1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a\neq 1$ і $a\neq -1$, то $x=a$; 3) якщо $a=2$, то x – будь-яке число; якщо $a\neq 2$, то $x=a+2$; 4) якщо $a=1$, то x – будь-яке число; якщо $a=-1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a\neq 1$ і $a\neq -1$, то $x=\dfrac{a-1}{a+1}$. **11.** 1) Якщо $a\neq 0$, то $x=a$; 2) якщо $b\neq 0$ і $a=-b$, то рівняння не має розв'язків; якщо $b\neq 0$ і $a\neq -b$, то $x=\dfrac{a-b}{a+b}$; 3) якщо $a\neq 0$, то $x=\dfrac{2a}{3}$; 4) якщо $a=0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a\neq 0$, то $x=6a$. **12.** 1) 2 або 3; 2) -9 або -8; 3) 7 або 8; 4) 5 або 6. **13.** 1) Якщо $a<-3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a\geqslant -3$, то $x=(a+3)^2$; 2) якщо $a=0$, то $x\geqslant 0$; якщо $a\neq 0$, то $x=1$; 3) якщо $a=-3$, то $x\geqslant -2$; якщо $a<-3$ або $-3<a<3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a\geqslant 3$, то $x=a^2-6a+7$. **14.** 1) -2; 2) 1. **15.** 1) $\sqrt{3}-1$; 2) 1; 3) -10. **16.** 1) 2; 2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. **17.** 1) 1; 2) 8. **18.** 1) $y=\begin{cases}3x, & \text{якщо } x\geqslant 0,\\ 5x, & \text{якщо } x<0;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}-1, & \text{якщо } x\geqslant 1,\\ 1-2x, & \text{якщо } x<1.\end{cases}$ **19.** 1) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 2) $1+\sqrt{3}-\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{2}-1$; 4) $\dfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)}{2}$. **20.** Так. **21.** 1) $\dfrac{1}{xy}$; 2) $\dfrac{1+a}{a}$. **22.** 1) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$; 2) 1. **23.** 1) $-\sqrt{a}$, якщо $0<a<2$; $\sqrt{a}$, якщо $a>2$; 2) -2, якщо $x<0$; 2, якщо $x>0$. **25.** $\dfrac{1}{2}$. **26.** 6. **27.** 1) 19; 2) 80; 3) 343. **28.** 1) -4; -3; 2) 19. **29.** 1) Якщо $a=1$, то $x=-\dfrac{1}{2}$; якщо $a\neq 1$, то $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{1}{1-a}$; 2) якщо $a=-1$, то $x=-1$; якщо $a\neq -1$, $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{2a}{1+a}$. **30.** 1) -1; 2) 2; 3) рівняння не має розв'язків. **31.** Нехай $b^2-4ac=3$, тоді $b^2=3+4ac$. Права частина рівності – непарне число, отже, $b=2k+1$, $k\in \boldsymbol{Z}$. Тоді одержимо $2(k^2+k-ac)=1$, що неможливо. **32.** -1. **33.** 1. **34.** 12. **35.** 1) $x^2-7x-2=0$; 2) $2x^2+65x+179=0$; 3) $16x^2+106x+1=0$. **36.** *Порада.* $D=(b+c-a)(b+c+a)(b-c+a)(b-c-a)$. **37.** *Порада.* $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$. Далі використати теорему Вієта. **38.** 1) 1; 2; -3; 2) 1; $\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$; 3) -1; $3 \pm \sqrt{3}$; 4) $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. *Порада.* $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x^4 - 2x^3 + x^2) - (4x^2 + 4x + 1) = (x^2 - x)^2 - (2x + 1)^2$. **39.** 1) Якщо $a = 1$, то x – будь-яке число; якщо $a = -2$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -2$, то $x = \frac{1}{a+2}$; 2) якщо $a = 1$, то $x = 4$; якщо $a = 4$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 4$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; 3) якщо $a = 1$ або $a = 3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 3$, то $x = a$; 4) якщо $a = 1$, то $x = 4$; якщо $a \neq 1$, то $x_1 = 3a$, $x_2 = 4$; 5) якщо $a = 0$, то x – будь-яке число, крім -7; якщо $a = -7$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$ і $a \neq -7$, то $x = a$; 6) якщо $a = 1$ або $a = -1$, то $x = 0$; якщо $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, то $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1 - a^2}{a}$. **40.** 6; -6; 10. **41.** 9; -9. *Порада.* $x^4 - x^2 + 20x - 100 = x^4 - (x - 10)^2$. **42.** $a = 42$; $b = 39$. **43.** 1) 2; 2) 1. **44.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a = -2$, то $x = \frac{1}{3}$; якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -2$, то $x_1 = \frac{a+1}{a-1}$, $x_2 = -1$; 2) якщо $a = -\frac{9}{4}$ або $a = -\frac{1}{4}$, то $x = -1$; якщо $a = -3$, то $x = -\frac{9}{8}$; якщо $a = 1$, то $x = \frac{7}{8}$; якщо $a \neq -3$, $a \neq -\frac{9}{4}$; $a \neq -\frac{1}{4}$, $a \neq 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4a+3}{8}$. **45.** 1) 0; 2) 2; -2; $\pm\frac{3\sqrt{21}}{7}$. **46.** 1) 14. *Порада.* Нехай $\sqrt{x-5} = t$. Тоді $x = t^2 + 5$; 2) 4; -4. **47.** 1) $\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$; $\frac{-5 \pm \sqrt{85}}{6}$; 2) $\frac{5 + \sqrt{13}}{6}$; $\frac{-5 - \sqrt{133}}{6}$. **48.** *Порада.* Графіком рівняння є дві прямі $y = \frac{x}{3}$ і $y = \frac{x}{2}$. **49.** 1) 5; 0,6; 2) $-\frac{2}{9}$; $\frac{10}{19}$; $\frac{14}{17}$; $3\frac{1}{3}$; 3) 2; $\frac{1}{2}$. *Порада.* $x + \frac{1}{x} = t$, тоді $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; 4) $1 \pm \sqrt{7}$; $-3 \pm \sqrt{15}$. *Порада.* $\frac{x}{3} - \frac{2}{x} = t$, тоді $\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{9} = t^2 + \frac{4}{3}$. **50.** 85 кг. **51.** 7. **52.** 52 км/год або $38\frac{2}{11}$ км/год. **53.** 60 км/год. *Порада.* Слід розглянути дві можливості залежно від того, котрого велосипедиста мотоцикліст обігнав першим. **54.** 1,8 год і 2,25 год. **55.** 0,2 год або 0,33 год. **56.** Іра – за 10 днів, Олег – за 15 днів. **57.** 60 хв; 84 хв.

Задачі підвищеної складності з геометрії

3. 60°; 120°. **5.** Ромб. **6.** 120°. **7.** 90°. **9.** Кожна з діагоналей дорівнює $a - b$. **11.** $BP = DM$. **13.** 40 см. **14.** 140°, 40°, 140°. **15.** $\frac{a-b}{2}$. **16.** 53°.

17. A, H_3, H, H_2; B, H_3, H, H_1; C, H_1, H, H_2; A, H_3, H_1, C; A, H_2, H_1, B; B, H_3, H_2, C. **19.** *Порада.* Довести, що $BN \cdot DM = AB \cdot AD$. **20.** $\sqrt{ab}$. **21.** 1) 21 см, або 28 см, або 24 см; 2) 21 см або 27 см; 3) 21 см. *Порада.* Нехай AB – найбільша сторона трикутника. Пряма, що відтинає трикутник, подібний даному, може перетинати або сторону BC, або сторону AC, причому слід окремо розглянути випадок, коли ця пряма паралельна одній зі сторін трикутника. **22.** Необхідно побудувати коло, що проходить через точки B і C та дотикається до AB у точці B. Це коло перетне AC у шуканій точці D. **23.** 12,5 см. *Порада.* Через вершину C проведіть пряму, паралельну BD, що перетинає продовження AD у точці M, $\triangle ACM$ – прямокутний. **25.** $2\sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$. *Порада.* Нехай MA і MB перпендикуляри, проведені до прямих, що містять сторони заданого кута, а C – точка перетину AM і OB. Розгляньте трикутники BMC і OAC. **28.** $12m$. **29.** Доведіть, що $(c+h)^2 = (a+b)^2 + h^2$. **30.** $\dfrac{ac}{b}$. **31.** 1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. *Порада.* Розгляньте рівнобедрений прямокутний трикутник ABD ($\angle D = 90°$) і прямокутний трикутник BDC ($\angle D = 90°$), у якого $\angle DBC = 30°$. Точки A, D, C лежать на одній прямій. Тоді $\angle ABC = 75°$. **32.** 1) Так; 2) ні. **33.** 6. **36.** У 3 рази. **38.** 54 см^2. **39.** $\dfrac{5}{9}S$. **40.** $(m+n)d$. **41.** cd. *Порада.* Доведіть, що $S_{KCD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$. **42.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	В	Б	Г	А	Б	В	Г	Б	А	В	В	Г	1–Г; 2–А; 3–Б
8	Б	Б	А	Б	Г	В	Б	Б	Г	В	А	В	1–В; 2–Б; 3–Г
9	Б	В	Г	Б	А	В	Б	А	Б	Г	А	Б	1–Б; 2–А; 3–Г
10	Б	В	А	Г	В	Г	Б	А	В	Г	Б	В	1–В; 2–Г; 3–Б
11	Б	Г	Б	А	В	Г	Б	В	Б	А	Б	Б	1–Б; 2–Г; 3–А

ЗМІСТ

Тема 10. МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

Тема 11. КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН. РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ