Генеза

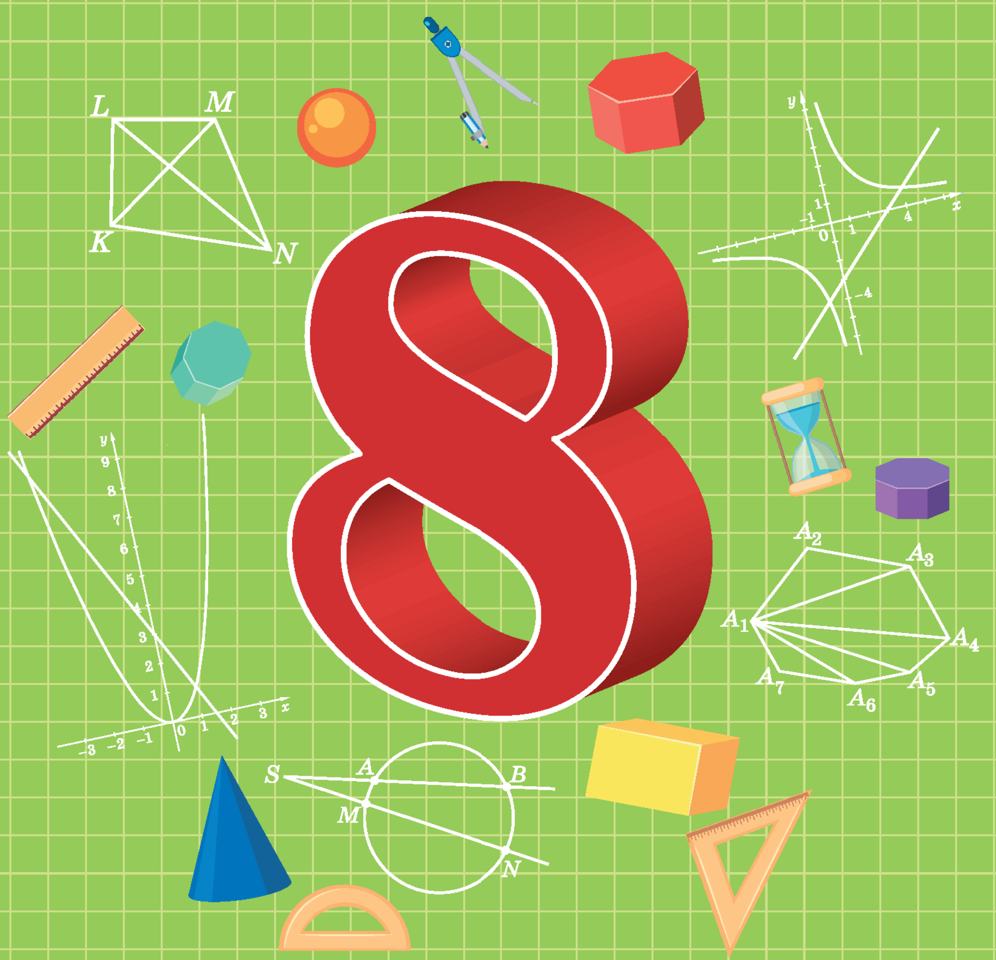
НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРОВАНИЙ КУРС

ЧАСТИНА 1



ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

Підручник інтегрованого курсу для 8 класу
закладів загальної середньої освіти
(у 2-х частинах)

Частина 1

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Київ
«Генеза»
2025

УДК 51(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 21.02.2025 р. № 347)

Відповідає модельній навчальній програмі
«Математика (інтегрований курс). 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)

Е-додаток до підручника можна знайти за адресою *https://sites.google.com/view/matematika-8-klas-2024?usp=sharing* або QR-кодом

Істер О. С.
І-89 Математика : підруч. інтегрованого курсу для 8-го кл. закл. заг. серед. освіти. У 2 ч. Ч. 1 / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2025. — 256 с. : іл.

ISBN 978-____-_____-__-_
ISBN 978-____-_____-__-_ (Ч.1).

УДК 51(075.3)

ISBN 978-____-_____-__-_
ISBN 978-____-_____-__-_ (Ч.1)

Шановні восьмикласниці та восьмикласники!

Продовжуємо вивчати курс математики, який міститиме дві складові частини – *алгебру* і *геометрію*. Допоможе вам у цьому навчальний посібник, який ви тримаєте в руках.

У навчальному посібнику використано такі умовні позначення:

– пригадай (раніше вивчене);

– зверни особливу увагу;

– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

1.13 – завдання для класної та 1.15 – домашньої роботи;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв'язування інших задач);

– рубрика «Україна – це ми»;

– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;

– рубрика «Життєва математика»;

– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

– вправи для повторення;

– рубрика «Головне в темі».

Текст, надрукований **жирним** шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня;

з позначки * починаються вправи підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «*Домашньої самостійної роботи*», які подано в тестовій формі, та «*Завдання для перевірки знань*».

Після кожної теми наведено вправи для її повторення, основний теоретичний матеріал (рубрика *«Головне в темі»*), а в кінці навчального посібника – *«Завдання для перевірки знань за курс математики 8 класу»*. *«Задачі підвищеної складності»* допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики.

Автор намагався подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Навчальний посібник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів та розвитку математики як науки ви знайдете в рубриці *«А ще раніше...»*.

Бажаємо успіхів в опануванні математики!

Шановні вчительки та вчителі!

Пропонований навчальний посібник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів / учениць, диференціації навчання тощо.

Додаткові вправи в *«Завданнях для перевірки знань»* призначено для учнів / учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Чи правильно їх розв'язано, учитель / учителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення тем можна запропонувати учням / ученицям, наприклад, під час узагальнювальних уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці *«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»* – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці навчального посібника, допоможуть підготувати учнів / учениць до різноманітних математичних змагань і підвищити їхню цікавість до математики.

«Завдання для перевірки знань за курс математики 8 класу», які також розміщено в кінці навчального посібника, можна запропонувати учням / ученицям для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за навчальним посібником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього потрібно розв'язати вправи, що посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж курсу математики 8 класу, який опрацьовує дитина, ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на *«Задачі підвищеної складності»*, які розміщено в кінці навчального посібника.

ПОВТОРЮЄМО АЛГЕБРУ ЗА 7 КЛАС

Лінійні рівняння з однією змінною

1 **1.** (*Усно.*) Яке з рівнянь є лінійним рівнянням з однією змінною:
1) $12x = 0$; 2) $4x + 2y = 9$; 3) $7x = x^2$;
4) $0x = 12$; 5) $\frac{1}{x} - 7 = 0$; 6) $0x = 0$?

2 **2.** Яке із чисел є коренем рівняння $x^2 - x = 2x + 4$:
1) 0; 2) –1; 3) 1;
4) 2; 5) 4; 6) –3?

3. Яке із чисел є коренем рівняння $x^2 - 3x = x + 5$:
1) 1; 2) 0; 3) –1;
4) 3; 5) 5; 6) –2?

4. Розв'яжіть рівняння:
1) $4x = -8$; 2) $9x - 13 = 3x + 5$; 3) $7 - (3x + 2) = 5$;
4) $-\frac{1}{8}x = -1\frac{1}{8}$; 5) $8 - 2x = -(4x + 3)$; 6) $3(x - 3) = 4x + 21$.

5. Розв'яжіть рівняння:
1) $-5x = -20$; 2) $7x - 11 = 2x + 1$; 3) $9 - (5x + 1) = 10$;
4) $2x = -1\frac{1}{5}$; 5) $7 - 3x = -(2x - 7)$; 6) $9(x - 1) = 8x + 13$.

6. Складіть лінійне рівняння, яке рівносильне рівнянню $9x + 36 = 0$.

7. У вазі тістечок утричі більше, ніж на тарілці. Скільки тістечок у вазі, якщо їх там на 12 більше, ніж на тарілці?

8. За два тижні магазин електроніки продав 48 ноутбуків, причому першого тижня було продано на 6 ноутбуків більше, ніж другого. Скільки ноутбуків продали другого тижня?

9. За 2 год велосипедистка долає ту саму відстань, що й пішохід за 5 год. Швидкість пішохода на 9 км/год менша від швидкості велосипедистки. Знайдіть швидкість кожного.

10. Ящик з яблуками на 8 кг важчий за ящик зі сливами. Яка маса кожного ящика, якщо маса двох ящиків з яблуками така сама, як і маса трьох ящиків зі сливами?

3 **11.** Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-5}{3} = \frac{5x+1}{9}$ і $7(y + 3) - 9(y - 1) = 24$. Знайдіть значення виразу $100x + 5y$ та дізнайтеся рік заснування Національного університету «Києво-Могилянська академія».

12. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-1}{3} = \frac{3+4x}{7}$ і $7(y - 2) - 3(y + 5) = 11$. Знайдіть значення виразу $200x + 11y$ та дізнайтеся рік прийняття першої Конституції Пилипа Орлика.

13. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| - 2 = 9$; 2) $5 - |x| = 7$; 3) $|x - 2| = 3$;

4) $|2x - 1| = 0$; 5) $|5x + 2| = 3$; 6) $\frac{1}{3}|x - 2| + 3 = 7$.

14. Одна сторона трикутника утричі менша від другої і на 12 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, периметр якого дорівнює 52 см.

15. В одному мішку на 6 кг борошна більше, ніж у другому, і вдвічі менше, ніж у третьому. Скільки кілограмів борошна в кожному мішку, якщо у трьох мішках разом 66 кг борошна?

4 **16.** За якого значення a рівняння $x + a = 9$ і $4x - a = 3x$ мають однакові корені?

17. За якого значення b рівняння $x - b = 7$ і $5x + b = 4x$ мають однакові корені?

Цілі вирази

1 **18.** Подайте у вигляді степеня:

1) c^3c^5; 2) m^9mm^{15}; 3) $p^{12} : p^3$; 4) $(x^9)^7$.

19. Подайте у вигляді степеня:

1) p^7p^2; 2) tt^2t^3; 3) $c^{15} : c^5$; 4) $(a^3)^8$.

20. Виконайте множення:

1) $p(x - 2)$; 2) $-c(m - 4)$; 3) $x(c - 3 - d)$.

21. Виконайте множення:

1) $t(3 - c)$; 2) $-x(p - 2)$; 3) $a(t - b - 9)$.

2 **22.** Знайдіть значення виразу:

1) $(-3)^4$; 2) $(-6)^3$; 3) $0{,}1 \cdot 10^3$; 4) $(2{,}6 - 2{,}7)^2$.

23. Знайдіть значення виразу:

1) $(-2)^4$; 2) $(-5)^3$; 3) $0{,}2 \cdot 5^3$; 4) $(1{,}5 - 1{,}8)^2$.

24. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $4a^2(3 - a)$; 2) $7(x - 2) - 2(x - 7)$;

3) $(x - 5)(x + 3)$; 4) $-5c^2(8 - c^3 + c)$;

5) $4(2x - 3) - (8x - 9)$; 6) $(2b - a)(a + b)$.

25. Перетворіть на многочлен вираз:

1) $7b^2(b - 3)$; 2) $4(b - 3) - 2(2b + 1)$;

3) $(m + 2)(m - 4)$; 4) $-2x^3(4 - x^2 + x)$;

5) $3(2c - 6) - (5c - 18)$; 6) $(3x + y)(x - y)$.

26. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(b - 6)^2$; 2) $(7x + 2)^2$; 3) $(4a - 1)^2 - 16a^2$;

4) $(p - 3)(p + 3)$; 5) $(7 + x)(x - 7)$; 6) $(2y - 3)(2y + 3) + 9$.

27. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(c + 5)^2$; 2) $(8b - 3)^2$; 3) $(4x + 3)^2 - 9$;

4) $(c + 2)(c - 2)$; 5) $(m - 9)(9 + m)$; 6) $(5p - 2)(5p + 2) - 25p^2$.

28. Розкладіть на множники:
1) $4a + 12b$; 2) $15ac - 20a$; 3) $a(c - x) + 9c - 9x$;
4) $-7c^2 - 21c^5$; 5) $a^3 + a^7 - a^5$; 6) $5a + 5b - ay - yb$.

29. Розкладіть на множники:
1) $9x - 18y$; 2) $4xm + 6m$; 3) $m(x - p) + 3x - 3p$;
4) $-2x^3 - 8x^5$; 5) $b^2 - b^5 + b^3$; 6) $7c + 7n - cx - xn$.

3

30. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:
1) $256 : 2^7 \cdot 8$; 2) $\dfrac{125 \cdot 5^7}{5^4 \cdot 625}$; 3) $0{,}5^9 \cdot 2^9$; 4) $\dfrac{27^8}{81^5}$.

31. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:
1) $3^9 : 81 : 27$; 2) $\dfrac{1000 \cdot 10^7}{10 \cdot 100^4}$; 3) $0{,}25^7 \cdot 4^7$; 4) $\dfrac{16^4}{8^5}$.

32. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:
1) $(x^2 - 3x)(x + 1) - x^2(x - 2)$; 2) $(2a - 3)^2 - (4a - 1)(a + 3)$.

33. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:
1) $m^2(m + 3) - (m^2 + 4m)(m - 1)$; 2) $(9x - 1)(x + 3) - (3x - 2)^2$.

34. Спростіть вираз $(9x - 1)(4x + 2) - (6x - 7)(6x + 7)$ та знайдіть його значення, якщо $x = -3$, відтак дізнаєтеся, скільки разів чоловіча збірна України із шахів ставала призером командного чемпіонату світу.

35. Спростіть вираз $(4a - 3)(4a + 3) - (8a - 7)(2a - 1)$ та знайдіть його значення, якщо $a = 1\dfrac{1}{11}$, відтак дізнаєтеся, скільки разів жіноча збірна України із шахів ставала призером всесвітніх шахових олімпіад.

36. Розкладіть многочлен на множники:
1) $6a^3 - 2a^2 - 12a$; 2) $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 6$;
3) $-4x^2 + 20x - 25$; 4) $0{,}36p^8 - c^{10}x^{12}$;
5) $64m^3c^9 + t^{30}$; 6) $c^2 + 2cd + d^2 - 25$.

37. Розкладіть многочлен на множники:
1) $8p^4 - 4p^5 + 12p$; 2) $a^5 - 2a^2 - 3a^3 + 6$; 3) $-9m^2 - 6m - 1$;
4) $0{,}49m^4 - t^{16}p^2$; 5) $125a^6 - b^9$; 6) $a^2 - 2ax + x^2 - 36$.

38. Розв'яжіть рівняння:
1) $4x^2 - x = 0$; 2) $25x^2 + 10x + 1 = 0$; 3) $(x - 1)^2 - 4 = 0$.

39. Розв'яжіть рівняння:
1) $2x^2 + x = 0$; 2) $36x^2 - 12x + 1 = 0$; 3) $(x + 2)^2 - 9 = 0$.

4

40. Доведіть, що якщо n – натуральне число, то значення виразу $(2n - 3)(5n - 1) - 2n(5n - 12) + n$ є непарним числом.

41. Доведіть, що якщо m – натуральне число, то значення виразу $(3m + 2)(4m - 1) - 2m(6m - 7) + m$ є парним числом.

42. Виконайте множення $(m^2 - 2m + 3)(m^2 + m - 5)$.

43. Відомо, що $2xy^2 = 5$. Знайдіть значення виразу:
1) xy^2; 2) $3xy^2$; 3) $-4x^2y^4$; 4) $8x^3y^6$.

44. Відомо, що $5ab^2 = 7$. Знайдіть значення виразу:
1) ab^2; 2) $4ab^2$; 3) $-25a^2b^4$; 4) $125a^3b^6$.

Функції

1

45. (*Усно.*) Які з поданих записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:
1) $m = 2p - 9$; 2) $4x - 9 = 9 - 4x$; 3) $y = \dfrac{2x}{x-3}$;
4) $36 : 9 - 4 = 0$; 5) $c = n^2 - n^3$; 6) $2x - 9 > 3$.

46. (*Усно.*) Чи є лінійною функція:
1) $y = 2x^2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = 2$;
4) $y = \dfrac{1}{2x-3}$; 5) $y = 2x - 3$; 6) $y = 2x^2 - 3$?

2

47. Функцію задано формулою $y = 3 - 2x$. Знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -4; $1{,}5$;
2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -7; 5.

48. Функцію задано формулою $y = 4x - 5$. Знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює $-1{,}5$; 6;
2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -9; 1.

49. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = 3x - 6$; 2) $y = \dfrac{3x-6}{5}$; 3) $y = \dfrac{5}{3x-6}$; 4) $y = \dfrac{7}{x+6}$.

50. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = 2x + 4$; 2) $y = \dfrac{2x+4}{7}$; 3) $y = \dfrac{7}{2x+4}$; 4) $y = \dfrac{9}{x-4}$.

51. Не виконуючи побудови графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = 7x$; 2) $y = 2x - 9$; 3) $y = -\dfrac{x}{7}$; 4) $y = \dfrac{x+9}{11}$.

52. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = -4x$; 2) $y = 7 + 14x$; 3) $y = \dfrac{x}{5}$; 4) $y = \dfrac{x-4}{5}$.

53. Побудуйте графік лінійної функції:
1) $y = x + 3$; 2) $y = 7 - 0{,}5x$;
3) $y = -4x$; 4) $y = 2$.

54. Побудуйте графік лінійної функції:
1) $y = 2 - x$; 2) $y = \dfrac{1}{3}x + 1$; 3) $y = 2x$; 4) $y = -3$.

55. На малюнку 1 зображено графік функції, визначеної для $-4 \leqslant x \leqslant 4$. За графіком знайдіть:

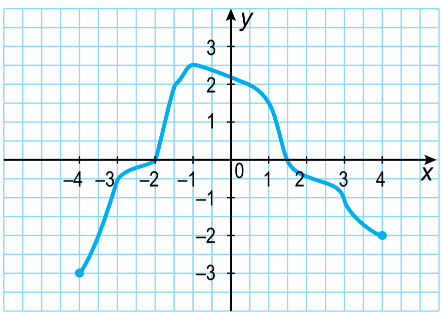
1) значення y, якщо $x = -3{,}5$; -1; $0{,}5$;

2) значення x, якщо $y = -0{,}5$; 2; $2{,}5$;

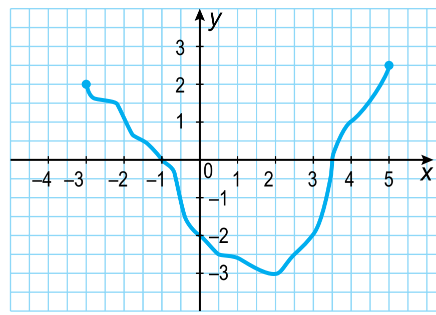
3) нулі функції;

4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.



Мал. 1



Мал. 2

56. На малюнку 2 зображено графік функції, визначеної для $-3 \leqslant x \leqslant 5$. За графіком знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -1$; $-0{,}5$; $2{,}5$;

2) значення x, якщо $y = -3$; -2; 1;

3) нулі функції;

4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.

57. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 0{,}5x - 4$;

2) $y = 16 - x^2$.

58. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 3 - 2x$;

2) $y = x^2 + 2x$.

4 **59.** Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -3x, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ 4 + x, \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$

60. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 4x, \text{ якщо } x < 1, \\ 5 - x, \text{ якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

1 **61.** (*Усно.*) Чи належить графіку рівняння $x + y = 7$ точка:
1) (6; 1); 2) (8; −2); 3) (1; −6); 4) (3; 4)?

62. (*Усно.*) Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$ пара чисел:
1) (4; 3); 2) (3; 2); 3) (4; 1)?

2 **63.** Побудуйте графік рівняння:
1) $x - y = 4$; 2) $0{,}5x + y = 1$; 3) $3x + 0y = -6$; 4) $6y = 18$.

64. Побудуйте графік рівняння:
1) $x + y = 3$; 2) $x - 0{,}5y = 2$; 3) $4x = 12$; 4) $0x + 2y = -8$.

65. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:
1) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 6 + x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2y = -6, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

66. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:
1) $\begin{cases} y = x, \\ y = 4 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + 2y = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x = 14, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$

67. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:
1) $\begin{cases} 3x = 12, \\ 2x + 3y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = y - 2, \\ 4x - 3y = -5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ 4x + 5y = -7. \end{cases}$

68. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:
1) $\begin{cases} 4y = -8, \\ 5x + 2y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x + 3, \\ 2x - 3y = -8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 5y = 4. \end{cases}$

69. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:
1) $\begin{cases} 3x + y = 2, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 2x - 4y = -13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 3y = 11, \\ 5x + 9y = 1. \end{cases}$

70. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:
1) $\begin{cases} x + 3y = 1, \\ -x + 4y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 5y = 11, \\ 4x - 5y = 13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 3y = 15, \\ 8x + 5y = 19. \end{cases}$

71. Два ящики з бананами й один з апельсинами важать 40 кг, а ящик з бананами і два ящики з апельсинами – 44 кг. Скільки важить один ящик з бананами і скільки – один ящик з апельсинами?

72. За 3 ручки і зошит заплатили 44 грн, а за ручку і 3 зошити – 68 грн. Скільки коштує одна ручка і скільки – один зошит?

3 **73.** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:
1) $2x - 3y = 24$; 2) $0x + 5y = 15$; 3) $-4x = 12$.

74. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

1) $4x + 5y = 40$; 2) $2x + 0y = -16$; 3) $3y = 6$.

75. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2a + 3b = 0, \\ 4a - 5b = -22; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 5y = 1, \\ 3x + 10y = 42; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ 4x - 3y = -17. \end{cases}$

76. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2m - 3n = 7, \\ 5m + 6n = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 8x + 5y = 24; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 5x - 3y = 18. \end{cases}$

77. Човен за 2 год руху за течією і 3 год руху проти течії долає 88 км. За 4 год руху за течією човен долає таку саму відстань, що й за 5 год проти течії. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії.

78. Складіть рівняння прямої, графік якої проходить через точки (–1; 11) і (2; 5).

79. Графік лінійної функції проходить через точки (–3; 2) і (4; 23). Задайте цю функцію формулою.

80. За 4 циркулі й 3 лінійки заплатили 195 грн. Після того як циркуль подорожчав на 10 %, а лінійка подешевшала на 20 %, один циркуль і одна лінійка разом стали коштувати 53 грн. Якою була початкова вартість циркуля і якою – лінійки?

ТЕМА 1

ДРОБОВІ ВИРАЗИ. ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ДРОБУ. ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** основну властивість звичайного дробу;
- **ознайомитеся** з поняттями раціонального виразу, раціонального дробу;
- **навчитеся** скорочувати раціональні дроби та зводити їх до нового знаменника; додавати та віднімати дроби.

§ 1. Раціональні вирази. Раціональні дроби

1. Раціональні вирази

З 7 класу ви вже знаєте, що вирази, які не містять ділення на вираз зі змінною, наприклад: $5m^2p$; $4c^3 + t^9$; $(m - n)(m^2 + n^7)$; $k^9 - \frac{p+l}{4}$ – ***цілі раціональні вирази.***

Будь-який цілий вираз можна подати у вигляді многочлена стандартного вигляду, наприклад:

$(m - n)(m^2 + n^7) = m^3 + mn^7 - nm^2 - n^8$;

$k^9 - \frac{p+l}{4} = k^9 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}l.$

На відміну від цілих виразів, вирази

$$5m - \frac{3}{p};\quad \frac{x+2}{y-9};\quad \frac{1}{5}x - \frac{19}{m^2};\quad \frac{a-b}{a^2+ab+b^2};\quad \frac{1}{(x-y)(x^2+7)}$$

містять ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають ***дробовими раціональними виразами.***

Цілі раціональні та дробові раціональні вирази називають ***раціональними виразами.***

Раціональні вирази **– це математичні вирази, які містять дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня.**

2. Область визначення виразу

Цілий раціональний вираз має зміст для будь-яких значень змінних, що до нього входять, оскільки для знаходження його значення треба виконати дії додавання, віднімання і множення та ділення на число, відмінне від нуля, що завжди можливо.

Вираз вигляду $\frac{P}{Q}$, де P і Q — многочлени, називають *раціональним дробом*.

Розглянемо раціональний дріб $\frac{5}{x-3}$. Його значення можна знайти для будь-якого значення x, крім $x = 3$, оскільки для $x = 3$ знаменник дробу дорівнюватиме нулю. У такому разі кажуть, що вираз $\frac{5}{x-3}$ має зміст для всіх значень змінної x, крім $x = 3$ (або для $x = 3$ вираз не має змісту).

Значення змінних, для яких вираз має зміст, називають *допустимими значеннями змінних* у виразі.

Ці значення утворюють ***область визначення виразу***, або ***область допустимих значень змінних*** у виразі.

Приклад 1. Знайти допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{m-3}{9}$; 2) $\frac{5}{p+2}$; 3) $\frac{x+7}{x(x-9)}$; 4) $\frac{7}{|y|-3}$.

Розв'язання. 1) Вираз має зміст для будь-яких значень змінної m.
2) Допустимі значення змінної p — усі числа, крім числа -2, оскільки це значення змінної перетворює знаменник дробу на нуль.
3) Знаменник дробу перетворюється на нуль, якщо $x = 0$ або $x = 9$. Тому допустимі значення змінної x — усі числа, крім чисел 0 і 9.
4) Допустимі значення змінної y — усі числа, крім 3 і -3.
Скорочено *відповіді* можна записати так:
1) m — будь-яке число; 2) $p \neq -2$; 3) $x \neq 0$; $x \neq 9$; 4) $y \neq 3$; $y \neq -3$.

3. Умова рівності дробу нулю

Розглянемо **умову рівності дробу нулю.** Оскільки $\frac{0}{Q} = 0$, якщо $Q \neq 0$, то

$\frac{P}{Q} = 0$ тоді й тільки тоді, коли $P = 0$, а $Q \neq 0$, тобто за умови $\begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$

Приклад 2. Для яких значень змінної дорівнює нулю значення дробу:

1) $\frac{x-3}{x+1}$; 2) $\frac{(a-2)(a+1)}{a+5}$; 3) $\frac{b(b-7)}{b-7}$?

Розв'язання. 1) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $x = 3$, водночас знаменник нулю не дорівнює. Тому число 3 є тим значенням змінної, за якого цей дріб дорівнює нулю.

2) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $a = 2$ або $a = -1$. Для кожного із цих значень знаменник дробу нулю не дорівнює. Тому числа 2 і -1 є тими значеннями змінної, для яких цей дріб дорівнює нулю.

3) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $b = 0$ або $b = 7$. Якщо $b = 0$, знаменник дробу нулю не дорівнює, а якщо $b = 7$, знаменник перетворюється на нуль, тобто дріб не має змісту. Отже, дріб дорівнює нулю лише при $b = 0$.

Відповідь: 1) $x = 3$; 2) $a = 2$, $a = -1$; 3) $b = 0$.

А ще раніше...

Давньогрецький математик Діофант (бл. III ст. н. е.) розглянув раціональні дроби та дії над ними у своїй праці «Арифметика». Зокрема, на сторінках цієї книжки можна зустріти доведення тотожностей

$$30 \cdot \frac{144}{x^4+900-60x^2} + \frac{60}{x^2-30} = \frac{60x^2+2520}{x^4+900-60x^2}$$

та $$\frac{96}{x^4+36-12x^2} - \frac{12}{6-x^2} = \frac{12x^2+24}{x^4+36-12x^2},$$

які записано тодішньою символікою.

Видатний англійський учений Ісаак Ньютон (1643–1727) у своїй монографії «Універсальна арифметика» (1707 р.) означує дріб так: «Запис однієї з двох величин під іншою, нижче якої між ними проведено риску, означає частку або ж величину, що виникає при діленні верхньої величини на нижню». У цій роботі Ньютон розглядає не тільки звичайні дроби, а й раціональні.

Які вирази називають цілими раціональними виразами, а які – дробовими раціональними виразами? Наведіть приклади таких виразів. ○ Які вирази називають раціональними виразами? ○ Що таке раціональний дріб? Наведіть приклади. ○ Що називають допустимими значеннями змінної? ○ Сформулюйте умову рівності дробу $\frac{P}{Q}$ нулю.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **1.1.** (*Усно.*) Які з виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{1}{7}m^3n$; 2) $\frac{a+1}{a}$; 3) $m^2 + 2m - 8$; 4) $\frac{b-2}{8}$;

5) $\frac{1}{x^2+m^2}$; 6) $\frac{x+y-a}{10}$; 7) $(p-2)^2 + 7p$; 8) $a^2 + \frac{2}{a}$?

1.2. Серед раціональних виразів $a^3 - ab$; $\frac{m}{17}$; $\frac{17}{a}$; $t(t-1) + \frac{t}{p}$; $\frac{1}{9}a - \frac{1}{8}b$; $\frac{7}{x^2+1} - 5$ знайдіть і випишіть ті, що є:

1) цілими; 2) дробовими.

1.3. Які з дробів є раціональними дробами:

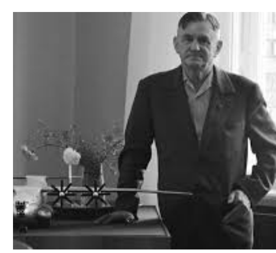
1) $\frac{a}{a^2-3}$; 2) $\frac{m\left(n+\frac{1}{k}\right)}{p^2-2}$; 3) $\frac{x^2-4x+5}{y^2-9}$; 4) $\frac{\frac{x}{x+2}}{m-3}$?

1.4. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3a+9}{a^2}$, якщо $a = 1; -2; -3$; 2) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-2}$, якщо $x = 4; -1$.

1.5. Дізнайтеся прізвище видатного українського авіаконструктора. Для цього знайдіть значення виразу з першої таблиці та перенесіть літери, що відповідають цим значенням, у другу таблицю. Користуючись будь-якими інформаційними джерелами, ознайомтеся з біографією цього авіаконструктора.

x	-3	-1	0	2	3
$\frac{1+x}{1-x}$					
Літери	Т	В	А	О	Н



1	−2	−0,5	−3	−2	−3	0

1.6. Складіть дріб:

1) чисельником якого є різниця змінних a і b, а знаменником – їх сума;

2) чисельником якого є добуток змінних x і y, а знаменником – сума їх квадратів.

1.7. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $m^2 - 5$; 2) $\frac{3a-5}{a}$; 3) $\frac{7b+9}{8}$; 4) $\frac{t-9}{t+1}$;

5) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{2}{x-7}$; 6) $\frac{p+2}{p(p-1)}$; 7) $\frac{3}{x^2+1}$; 8) $\frac{1}{m} + \frac{1}{|m|+5}$.

1.8. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $p + 9$; 2) $\frac{a-7}{a+4}$; 3) $\frac{b-9}{4}$;

4) $\frac{x^2-3}{x(x+2)}$; 5) $\frac{2y}{y-1} + \frac{3}{y+6}$; 6) $\frac{4}{m^2+2}$.

1.9. За t год автомобіль подолав 240 км. Складіть вираз для обчислення швидкості автомобіля (у км/год). Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 3;\ 4$.

1.10. Учениця витратила 48 грн для придбання n ручок. Складіть вираз для обчислення ціни ручки (у грн) та обчисліть його значення, якщо $n = 8;\ 10$.

3

1.11. Для якого значення змінної значення дробу $\frac{x+2}{8}$ дорівнює:

1) -2; 2) 9; 3) $0{,}01$; 4) $-4{,}9$?

1.12. Для якого значення змінної значення дробу $\frac{m-1}{10}$ дорівнює:

1) -8; 2) $0{,}25$?

1.13. Для якого значення x дорівнює нулю дріб:

1) $\frac{4x-8}{x}$; 2) $\frac{x(x+3)}{x^2}$; 3) $\frac{(x-1)(x+7)}{x+5}$; 4) $\frac{3x-6}{8-4x}$?

1.14. Для якого значення y дорівнює нулю дріб:

1) $\frac{y}{5y-7}$; 2) $\frac{(y+1)y}{y^7}$; 3) $\frac{(y+2)(y-3)}{y+4}$; 4) $\frac{y+1}{5y+5}$?

1.15. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{a+1}{(a-1)(2a+7)}$; 2) $\frac{t+2}{t^2-7t}$; 3) $\frac{m}{m^2-25}$; 4) $\frac{5}{(x-9)^2}$.

1.16. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{p-7}{(9-p)(4p+10)}$; 2) $\frac{a+2}{5a-a^2}$; 3) $\frac{c}{4-c^2}$; 4) $\frac{a}{(a+1)^2}$.

1.17. Складіть вираз зі змінною x, що мав би зміст для будь-яких значень x, крім:
1) $x = 2$;
2) $x = 1$ і $x = -4$.

4

1.18. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{37}{a(a-2)-3a+6}$; 2) $\frac{x}{|x|-1}$; 3) $\frac{5m}{1-\frac{1}{m}}$; 4) $\frac{4k}{4-|k-2|}$.

1.19. Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{12}{x(x+2)-4x-8}$; 2) $\frac{m}{4-|m|}$; 3) $\frac{7}{\frac{1}{x}+1}$; 4) $\frac{2a}{|a+2|-3}$.

1.20. Визначте знак дробу:

1) $\frac{x^7}{y^8}$, якщо $x > 0,\ y < 0$; 2) $\frac{m+1}{n^7}$, якщо $m > 0,\ n < 0$;

3) $\frac{|p-1|}{n^{19}}$, якщо $p < 0,\ n > 0$; 4) $\frac{|a|+1}{c^8}$, якщо $a < 0,\ c < 0$.

1.21. Доведіть, що для будь-якого значення змінної значення дробу:

1) $\dfrac{7}{a^2+1}$ є додатним; 2) $\dfrac{4}{-p^2-2}$ є від'ємним;

3) $\dfrac{(a+1)^2}{a^2+7}$ є невід'ємним; 4) $\dfrac{-(p^2-4)^2}{p^4+1}$ є недодатним.

Вправи для повторення

1.22. Перетворіть вираз на многочлен:
1) $(a^2+2a-7)-(a^2-4a-9)$; 2) $3x^2y(2x-3y+7)$;
3) $(x^2-2x)(x+9)$; 4) $(x^2-5)^2+10x^2$.

1.23. Розв'яжіть рівняння $4x(2x-7)+3x(5-2x)=2x^2+39$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.24. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{7}{14}$; 2) $\dfrac{25}{35}$; 3) $\dfrac{12}{18}$; 4) $\dfrac{30}{45}$; 5) $\dfrac{36}{48}$; 6) $\dfrac{51}{85}$.

1.25. Зведіть дріб:

1) $\dfrac{1}{8}$ до знаменника 24; 2) $\dfrac{2}{7}$ до знаменника 28;

3) $\dfrac{4}{15}$ до знаменника 30; 4) $\dfrac{8}{9}$ до знаменника 63.

1.26. Подайте у вигляді степеня вираз:
1) m^3m^4; 2) pp^7; 3) $x^9 : x^3$;
4) $(a^3)^7$; 5) $b^2\cdot(b^3)^4$; 6) $(c^4)^5 : c^{12}$.

1.27. На який вираз треба помножити одночлен $2a^2b$, щоб отримати:
1) $2a^3b$; 2) $2a^2b^4$; 3) $4a^5b$; 4) $16a^4b^3$?

1.28. Розкладіть на множники многочлен:
1) $ab-b^2$; 2) m^7+m^5; 3) $8m^2-4mn$;
4) $6a^3b-15a^2b^2$; 5) x^2+6x+9; 6) $c^2-10c+25$;
7) x^2-25; 8) p^4-49m^2; 9) $a^2+ab+7a+7b$.

Життєва математика

1.29. Лікарка Наталя Борисівна веде здоровий спосіб життя, тому на роботу і з роботи їздить на велосипеді. Вранці вона дістається до роботи за 15 хв, рухаючись зі швидкістю 12 км/год. З роботи повертається зі швидкістю 10 км/год. Скільки часу витрачає Наталя Борисівна на шлях з роботи додому?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1.30. Скільки існує двоцифрових натуральних чисел, які дорівнюють сумі добутку й суми своїх цифр?

§ 2. Основна властивість раціонального дробу

1. Основна властивість раціонального дробу

Основна властивість звичайного дробу: *якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то одержимо дріб, що дорівнює даному*. Або для будь-яких натуральних чисел a, b і c справджуються рівності:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \text{ і } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Доведемо, що ці рівності є правильними не тільки для натуральних значень a, b і c, а й для будь-яких інших значень за умови $b \neq 0$ і $c \neq 0$.

Доведемо спочатку, що $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Нехай $\frac{a}{b} = a : b = p$. Тоді, за означенням частки, $a = bp$. Помножимо обидві частини цієї рівності на c, матимемо: $ac = (bp)c$. Використовуючи переставну і сполучну властивості множення, одержимо: $ac = (bc)p$. Оскільки $b \neq 0$ і $c \neq 0$, то і $bc \neq 0$. З останньої рівності (за означенням частки) маємо: $\frac{ac}{bc} = p$. Оскільки $\frac{a}{b} = p$ і $\frac{ac}{bc} = p$, то $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Ця рівність є тотожністю, отже, можемо поміняти в ній ліву і праву частини місцями:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Ця тотожність дає змогу замінити дріб $\frac{ac}{bc}$ на дріб $\frac{a}{b}$, тобто *скоротити* дріб $\frac{ac}{bc}$ на спільний множник c чисельника і знаменника.

Властивість дробу, що записується рівностями $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ і $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, називають *основною властивістю раціонального дробу*.

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий відмінний від нуля вираз, то одержимо дріб, що дорівнює даному, тобто

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \text{ та } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

2. Скорочення раціонального дробу

Розглянемо приклади застосування цієї властивості для дробів на їх області допустимих значень.

Приклад 1. Скоротити дріб $\dfrac{24a^2}{16a}$.

Розв'язання. Подамо чисельник і знаменник цього дробу у вигляді добутків, що містять однаковий (спільний) множник $8a$, і скоротимо дріб на цей вираз:

$$\frac{24a^2}{16a} = \frac{8a \cdot 3a}{8a \cdot 2} = \frac{3a}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{3a}{2}$.

Приклад 2. Скоротити дріб $\dfrac{x^2 - 9y^2}{5x + 15y}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу та скоротимо дріб на спільний множник чисельника і знаменника:

$$\frac{x^2 - 9y^2}{5x + 15y} = \frac{(x - 3y)\cancel{(x + 3y)}}{5\cancel{(x + 3y)}} = \frac{x - 3y}{5}.$$

Відповідь: $\dfrac{x - 3y}{5}$.

Отже, щоб скоротити дріб, треба:

1) **розкласти на множники чисельник і знаменник дробу (за потреби);**
2) **виконати ділення чисельника і знаменника на їх спільний множник та записати результат.**

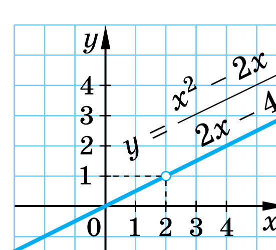
Приклад 3. Знайти область визначення функції $y = \dfrac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Областю визначення функції є усі числа, крім тих, що перетворюють знаменник $2x - 4$ на нуль. Оскільки $2x - 4 = 0$ для $x = 2$, то областю визначення функції є усі числа, крім числа 2.

Спростимо дріб у формулі функції:

$$\frac{x^2 - 2x}{2x - 4} = \frac{x\cancel{(x - 2)}}{2\cancel{(x - 2)}} = \frac{x}{2}.$$

Отже, функція $y = \dfrac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ має вигляд $y = \dfrac{x}{2}$ за умови $x \neq 2$, а її графіком є пряма $y = \dfrac{x}{2}$ без точки з абсцисою 2, тобто без точки (2; 1). Таку точку називають «виколотою» і обов'язково вилучають її з графіка, зображуючи «порожньою». Зрозуміло, що графік цієї функції не може міс-



Мал. 2.1

тити точку з абсцисою 2, оскільки число 2 не належить області визначення функції.

Графік функції $y = \dfrac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ зображено на малюнку 2.1.

3. Зведення раціонального дробу до нового знаменника

Тотожність $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$ дає змогу зводити дроби до іншого (нового) знаменника.

Приклад 4. Звести дріб $\dfrac{5m}{4p}$ до знаменника $12p^4$.

Розв'язання. Оскільки $12p^4 = 4p \cdot 3p^3$, то, помноживши чисельник і знаменник даного в умові дробу на $3p^3$, одержимо дріб зі знаменником $12p^4$:

$$\frac{5m}{4p} = \frac{5m \cdot 3p^3}{4p \cdot 3p^3} = \frac{15mp^3}{12p^4}.$$

Множник $3p^3$, як і для звичайних дробів, називають *додатковим множником* чисельника і знаменника дробу $\dfrac{5m}{4p}$.

Відповідь: $\dfrac{15mp^3}{12p^4}$.

Приклад 5. Звести дріб $\dfrac{7}{a-b}$ до знаменника $b - a$.

Розв'язання. Оскільки $b - a = -1 \cdot (a - b)$, то, помноживши чисельник і знаменник дробу $\dfrac{7}{a-b}$ на додатковий множник -1, одержимо дріб зі знаменником $b - a$: $\dfrac{7}{a-b} = \dfrac{7 \cdot (-1)}{(a-b) \cdot (-1)} = \dfrac{-7}{b-a}$.

Оскільки зміна знака перед дробом приводить до зміни знака в чисельнику або знаменнику, то $\dfrac{7}{a-b} = \dfrac{-7}{b-a} = -\dfrac{7}{b-a}$.

Відповідь: $-\dfrac{7}{b-a}$.

Якщо змінити знак у чисельнику (або знаменнику) дробу одночасно зі знаком перед дробом, то одержимо дріб, тотожно рівний даному, тобто

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}.$$

Наприклад, $\frac{c-2}{5} = -\frac{2-c}{5}$.

Якими рівностями записують основну властивість дробу? Сформулюйте цю властивість. Доведіть тотожність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$. Поясніть, як скоротити раціональний дріб.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

2.1. (*Усно.*) Скоротіть дріб:

1) $\frac{7x}{7y}$; 2) $\frac{3a}{15b}$; 3) $\frac{xy}{xm}$; 4) $\frac{ab}{b^2}$; 5) $\frac{5ac}{4ab}$; 6) $\frac{10xy}{10my}$.

2.2. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3m}{3p}$; 2) $\frac{4x}{12y}$; 3) $\frac{ab}{ap}$; 4) $\frac{t^2}{tx}$; 5) $\frac{9xy}{8xz}$; 6) $\frac{4mn}{4pn}$.

2

2.3. Скоротіть дріб:

1) $\frac{15ab}{20am}$; 2) $\frac{-2a^2m}{5ap}$; 3) $\frac{16ax^2}{20xb}$; 4) $\frac{-8m^2n}{-2n^3}$;

5) $\frac{-ap^2}{p^3c}$; 6) $\frac{4abc}{12ac^3}$; 7) $\frac{26m^2n}{39mn^2}$; 8) $\frac{a^5c^4}{-c^3a^6}$.

2.4. Скоротіть дріб:

1) $\frac{8at}{12ap}$; 2) $\frac{-3xy}{7x^2y}$; 3) $\frac{12m^2n}{20xm}$; 4) $\frac{-6p^3c}{-3p^4}$;

5) $\frac{-kp^3}{p^4t}$; 6) $\frac{5xyz}{15y^2z}$; 7) $\frac{22x^2y}{-33y^2x}$; 8) $\frac{t^7p^8}{p^6t^9}$.

2.5. Подайте частку у вигляді дробу і скоротіть цей дріб:

1) $12x^2y : (4xy^3)$; 2) $3a^2bc : (-18ab^2c^2)$;

3) $-10ap^3 : (-15a^2)$; 4) $-14x^9 : (2x^7y)$.

2.6. Зведіть дріб:

1) $\frac{5}{4m}$ до знаменника $20m$; 2) $\frac{p}{a^2}$ до знаменника a^5.

2.7. Зведіть дріб:

1) $\frac{4}{3p}$ до знаменника $15p$; 2) $\frac{x}{y^3}$ до знаменника y^7.

2.8. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m(a-2)}{p(a-2)}$; 2) $\frac{4(x+2)^2}{(x+2)^3}$;

3) $\frac{mn(p+7)}{m^2n(p+7)^2}$; 4) $\frac{16m^3(a+3)^2}{20m^4(a+3)}$.

2.9. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x(b+7)}{y(b+7)}$; 2) $\dfrac{5(m-3)^3}{(m-3)^4}$; 3) $\dfrac{a^2y(x-2)^2}{ay(x-2)}$; 4) $\dfrac{12x^3(y-7)}{16x^2(y-7)^2}$.

2.10. Розкладіть на множники чисельник і знаменник і скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4a+12b}{16ab}$; 2) $\dfrac{5x-5y}{7(x-y)}$; 3) $\dfrac{3m(x+2)}{x^2+2x}$; 4) $\dfrac{ax-a}{a}$;

5) $\dfrac{y}{y^2-yx}$; 6) $\dfrac{2x-6y}{5x-15y}$; 7) $\dfrac{a+2b}{a^2+2ab}$; 8) $\dfrac{2x^2-10xy}{x-5y}$.

2.11. Скоротіть дріб, попередньо розклавши його чисельник і знаменник на множники:

1) $\dfrac{3a+15b}{9ab}$; 2) $\dfrac{mn-m}{4(n-1)}$; 3) $\dfrac{p^2-3p}{4k(p-3)}$;

4) $\dfrac{xy-2x}{x}$; 5) $\dfrac{m}{m^2+mn}$; 6) $\dfrac{4a-12c}{7a-21c}$.

2.12. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a(x-y)}{5(y-x)}$; 2) $\dfrac{3a-9b}{15b-5a}$; 3) $\dfrac{7y-14}{y^2-4}$;

4) $\dfrac{m^2-9}{m^2-6m+9}$; 5) $\dfrac{p^2-1}{p^3-p^2}$; 6) $\dfrac{x^2+10x+25}{mx+5m}$.

2.13. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{m(p-2)}{a(2-p)}$; 2) $\dfrac{3a+12}{a^2-16}$; 3) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; 4) $\dfrac{mc+4c}{m^2+8m+16}$.

3

2.14. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{m^2n-m}{m^2-m^3n}$; 2) $\dfrac{15m^3-15mn}{10n^2-10nm^2}$; 3) $\dfrac{m^3+27}{m^2-3m+9}$;

4) $\dfrac{20+10a+5a^2}{a^3-8}$; 5) $\dfrac{3p+pn-3y-yn}{7p-7y}$; 6) $\dfrac{am+an-bm-bn}{am-an-bm+bn}$.

2.15. Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{16p^3-16pq}{12p^3q-12pq^2}$; 2) $\dfrac{a^2-2a+4}{a^3+8}$;

3) $\dfrac{7+7a+7a^2}{a^3-1}$; 4) $\dfrac{5m+an-5n-am}{a^2-10a+25}$.

2.16. Зведіть дріб: 1) $\dfrac{5}{a-b}$ до знаменника a^2-ab;

2) $\dfrac{4}{m+n}$ до знаменника $m^2+2mn+n^2$;

3) $\dfrac{9}{x-y}$ до знаменника x^2-y^2; 4) $\dfrac{4}{k-1}$ до знаменника k^3-1;

5) $\dfrac{a}{a-b}$ до знаменника $b-a$; 6) $\dfrac{p}{p-2}$ до знаменника $4-p^2$.

2.17. Зведіть дріб:

1) $\frac{7}{m+n}$ до знаменника $m^2 + mn$;

2) $\frac{4}{x-y}$ до знаменника $x^2 - 2xy + y^2$;

3) $\frac{a}{a+b}$ до знаменника $a^2 - b^2$;

4) $\frac{c}{c-7}$ до знаменника $7 - c$.

2.18. Знайдіть значення виразу $-\frac{(c^3)^5(x^{12})^2}{9(c^6)^2(x^3)^8}$, якщо $c = -3$, $x = 2025$, та дізнайтеся, скільки разів українські виконавці вигравали в пісенному конкурсі «Євробачення».

2.19. Обчисліть значення дробу $\frac{6x^2 - 3xy}{8xy - 4y^2}$, якщо $x = -4$, $y = -\frac{1}{4}$, та дізнайтеся, у якому столітті було засновано місто Кам'янець-Подільський (Хмельницька обл.).

Місто Кам'янець-Подільський

2.20. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^5 - a^3}{a^4 - a^2}$; 2) $\frac{p^9 + p^7}{p^5 + p^7}$; 3) $\frac{2a^2 - a^3}{a^6 - 2a^5}$; 4) $\frac{5c^5 - 10c^4}{12c^5 - 6c^6}$.

2.21. Спростіть вираз:

1) $\frac{t^9 - t^8}{t^8 - t^7}$; 2) $\frac{a^6 + a^3}{a^9 + a^6}$; 3) $\frac{3b^2 - b^3}{b^8 - 3b^7}$; 4) $\frac{4a^4 - 8a^3}{12a^2 - 6a^3}$.

4 **2.22.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{48x}$; 2) $\frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}$; 3) $\frac{(3b - 9c)^2}{5b - 15c}$.

2.23. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{(m+5)^2+(m-5)^2}{m^2+25}$; 2) $\dfrac{a^4-b^4}{a^3+b^3}$; 3) $\dfrac{6m+2n}{(12m+4n)^2}$.

2.24. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $y=\dfrac{x^2+6x}{6x+36}$; 2) $y=\dfrac{x^2-4x+4}{2-x}$.

2.25. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $y=\dfrac{x^2-5x}{25-5x}$; 2) $y=\dfrac{x^2+6x+9}{3+x}$.

Вправи для повторення

2.26. Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{2^{12}}{2^{14}}$; 2) $\dfrac{3^9}{3^6}$; 3) $\dfrac{7^4}{49}$; 4) $\dfrac{125}{5^5}$.

2.27. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+3y=2, \\ 3x-2y=17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2y=2, \\ 7x-2y=-22. \end{cases}$

2.28. Спростіть вираз:
1) $(2x+3y)^2-(x+7y)(4x-y)$; 2) $(m+3)(m^2-5)-m(m-4)^2$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.29. Обчисліть:

1) $\dfrac{1}{7}+\dfrac{3}{7}$; 2) $\dfrac{7}{13}+\dfrac{8}{13}$; 3) $\dfrac{9}{11}-\dfrac{5}{11}$; 4) $\dfrac{3}{17}-\dfrac{9}{17}$;

5) $\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}$; 6) $-\dfrac{11}{15}+\dfrac{2}{15}$; 7) $-\dfrac{3}{10}-\dfrac{7}{10}$; 8) $-\dfrac{2}{7}-\left(-\dfrac{1}{7}\right)$.

Життєва математика

2.30. На 1 січня 2016 року сільського населення в Україні було на 38,375094 % менше, ніж міського. Знайдіть кількість міського і кількість сільського населення в Україні станом на 1 січня 2016 року, якщо загальна кількість населення на цю дату складала 42 760 516 осіб.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

2.31. Катер за течією річки долає відстань від пункту A до пункту B за 2 год, а проти течії – за 3 год. За який час від пункту A до пункту B пропливе пліт?

§ 3. Додавання та віднімання дробів з однаковими знаменниками

1. Додавання дробів з однаковими знаменниками

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий. Наприклад:

$$\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=\frac{3+5}{11}=\frac{8}{11}, \text{ або у вигляді формули: } \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Ця формула справджується для будь-яких дробів за умови $c \neq 0$. Доведемо це.

Нехай $\frac{a}{c}=p$ і $\frac{b}{c}=q$. Тоді, за означенням, частки $a=cp$ і $b=cq$. Маємо: $a+b=cp+cq=c(p+q)$.

Оскільки $c \neq 0$, то, за означенням частки, $p+q=\frac{a+b}{c}$, отже, $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$. ■

Маємо *правило додавання дробів з однаковими знаменниками*.

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити без змін, тобто

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Приклад 1. $\frac{5p}{2x}+\frac{3p}{2x}=\frac{5p+3p}{2x}=\frac{8p}{2x}=\frac{4p}{x}$.

2. Віднімання дробів з однаковими знаменниками

Аналогічно можна довести тотожність $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$, якою записують правило віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Маємо *правило віднімання дробів з однаковими знаменниками*.

Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити без змін, тобто

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Приклад 2.

$$\frac{10x-14}{7p}-\frac{3x}{7p}=\frac{10x-14-3x}{7p}=\frac{7x-14}{7p}=\frac{7(x-2)}{7p}=\frac{x-2}{p}.$$

Розглянемо ще кілька прикладів.

3. Застосування правил додавання та віднімання многочленів під час розв'язування вправ

Приклад 3. Знайти суму та різницю дробів $\frac{2x+y}{2xy}$ і $\frac{2x-y}{2xy}$.

Розв'язання. $\frac{2x+y}{2xy}+\frac{2x-y}{2xy}=\frac{2x+y+2x-y}{2xy}=\frac{4x}{2xy}=\frac{2}{y}$;

$$\frac{2x+y}{2xy}-\frac{2x-y}{2xy}=\frac{2x+y-(2x-y)}{2xy}=\frac{2x+y-2x+y}{2xy}=\frac{2y}{2xy}=\frac{1}{x}.$$

Відповідь: $\frac{2}{y}$; $\frac{1}{x}$.

Приклад 4. Спростити вираз $\frac{m^2+5m}{m^2-3m}+\frac{7}{m^2-3m}-\frac{11m-2}{m^2-3m}$.

Розв'язання.

$$\frac{m^2+5m}{m^2-3m}+\frac{7}{m^2-3m}-\frac{11m-2}{m^2-3m}=\frac{m^2+5m+7-(11m-2)}{m^2-3m}=$$

$$=\frac{m^2+5m+7-11m+2}{m^2-3m}=\frac{m^2-6m+9}{m^2-3m}=\frac{(m-3)^2}{m(m-3)}=\frac{m-3}{m}.$$

Відповідь: $\frac{m-3}{m}$.

Приклад 5. Знайти суму $\frac{10x}{y-2x}+\frac{5y}{2x-y}$.

Розв'язання. Оскільки $2x-y=-(y-2x)$, то другий доданок можна подати з тим самим знаменником, що й у першого доданка (ми вже розглядали таку дію на с. 21): $\frac{5y}{2x-y}=\frac{5y}{-(y-2x)}=-\frac{5y}{y-2x}$.

Тоді $\frac{10x}{y-2x}+\frac{5y}{2x-y}=\frac{10x}{y-2x}-\frac{5y}{y-2x}=\frac{10x-5y}{y-2x}=\frac{-5(y-2x)}{y-2x}=-5.$

4. Подання дробу у вигляді суми або різниці кількох дробів

Якщо в тотожностях $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ та $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ поміняти місцями ліві та праві частини, то одержимо тотожності:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c} \text{ та } \frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}.$$

За допомогою цих тотожностей дріб, чисельник якого є сумою або різницею кількох виразів, можна записати у вигляді суми або різниці кількох дробів.

Приклад 6. $\dfrac{2x+5y-9}{xy}=\dfrac{2x}{xy}+\dfrac{5y}{xy}-\dfrac{9}{xy}=\dfrac{2}{y}+\dfrac{5}{x}-\dfrac{9}{xy}.$

Приклад 7. Записати дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу: 1) $\dfrac{a^2+2a-7}{a}$; 2) $\dfrac{5m+3n}{m+n}$.

Розв'язання.

1) $\dfrac{a^2+2a-7}{a}=\dfrac{a^2}{a}+\dfrac{2a}{a}-\dfrac{7}{a}=a+2-\dfrac{7}{a}$;

2) $\dfrac{5m+3n}{m+n}=\dfrac{2m+3m+3n}{m+n}=\dfrac{2m+3(m+n)}{m+n}=\dfrac{2m}{m+n}+\dfrac{3(m+n)}{m+n}=$

$=\dfrac{2m}{m+n}+3=3+\dfrac{2m}{m+n}.$

Відповідь: 1) $a+2-\dfrac{7}{a}$; 2) $3+\dfrac{2m}{m+n}$.

Сформулюйте правило додавання дробів з однаковими знаменниками. Доведіть його. Сформулюйте правило віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

3.1. (*Усно.*) Виконайте дію:

1) $\dfrac{a}{5}+\dfrac{b}{5}$; 2) $\dfrac{x}{9}-\dfrac{y}{9}$; 3) $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{a}$; 4) $\dfrac{7}{b}-\dfrac{5}{b}$.

3.2. Знайдіть суму або різницю:

1) $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{x}{5}$; 2) $\dfrac{7y}{3}-\dfrac{2y}{3}$; 3) $\dfrac{a+b}{x}-\dfrac{a}{x}$; 4) $\dfrac{7x^2}{y}+\dfrac{5x^2}{y}$.

3.3. Виконайте дію:

1) $\dfrac{3m}{8}+\dfrac{2m}{8}$; 2) $\dfrac{9p}{17}-\dfrac{p}{17}$;

3) $\dfrac{x-y}{m}+\dfrac{y}{m}$; 4) $\dfrac{5c^2}{n}-\dfrac{2c^2}{n}$.

2

3.4. Подайте у вигляді дробу:

1) $\dfrac{7a}{4x}-\dfrac{3a}{4x}$; 2) $\dfrac{x+y}{8}-\dfrac{x-3y}{8}$; 3) $\dfrac{a+4}{9}+\dfrac{5-a}{9}$;

4) $\dfrac{x+3y}{10}+\dfrac{4x+7y}{10}$; 5) $\dfrac{5m-2}{8m}-\dfrac{m-10}{8m}$; 6) $\dfrac{7a+13}{6a}+\dfrac{17-a}{6a}$.

3.5. Спростіть вираз:

1) $\frac{5x}{2a} + \frac{3x}{2a}$; 2) $\frac{a+b}{12} - \frac{a-5b}{12}$; 3) $\frac{b-3}{5} + \frac{13-b}{5}$;

4) $\frac{a+2b}{8} + \frac{3a+6b}{8}$; 5) $\frac{6m-3}{10m} - \frac{m-13}{10m}$; 6) $\frac{5x-3}{4x} + \frac{11-x}{4x}$.

3.6. Спростіть вираз:

1) $\frac{3x-7y}{4xy} + \frac{15y-3x}{4xy}$; 2) $\frac{7a+p^3}{3p} - \frac{7a-2p^3}{3p}$;

3) $\frac{5a-b^4}{6b^5} - \frac{b^4+5a}{6b^5}$; 4) $\frac{3a-4}{8a} + \frac{4a+5}{8a} - \frac{1-a}{8a}$.

3.7. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{3a-b}{ab} - \frac{5b+3a}{ab}$; 2) $\frac{9m+2k^2}{5k} - \frac{9m-3k^2}{5k}$;

3) $\frac{5b-m^2}{4m^3} - \frac{m^2+5b}{4m^3}$; 4) $\frac{4a-3}{6a} + \frac{a+8}{6a} - \frac{5-a}{6a}$.

3.8. Обчисліть значення виразу $\frac{7a-5}{4a^2} + \frac{5+a}{4a^2}$, якщо $a = \frac{1}{9}$, та дізнайтеся, у якому віці шахіст Руслан Пономарьов став чемпіоном світу за версією ФІДЕ.

Руслан Пономарьов

3.9. Обчисліть значення виразу $\frac{11b-7}{6b^2} + \frac{7+b}{6b^2}$, якщо $b = \frac{1}{11}$, та дізнайтеся, скільки золотих нагород виборола Паралімпійська збірна України на іграх 2024 року.

3.10. Виконайте дію:

1) $\frac{x^2}{x-5} - \frac{25}{x-5}$; 2) $\frac{36}{y+6} - \frac{y^2}{y+6}$;

3) $\frac{x-3}{x^2-9} + \frac{6}{x^2-9}$; 4) $\frac{7a-1}{a^2-b^2} - \frac{7b-1}{a^2-b^2}$;

5) $\frac{2x+y}{(x-y)^2} + \frac{x-4y}{(x-y)^2}$; 6) $\frac{9m+5n}{(m+n)^2} - \frac{m-3n}{(m+n)^2}$.

3.11. Спростіть вираз:

1) $\frac{49}{7-m} - \frac{m^2}{7-m}$; 2) $\frac{x+7}{x^2-1} - \frac{6}{x^2-1}$;

3) $\frac{5x-2}{x^2-y^2} - \frac{5y-2}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{3a-4b}{(a-b)^2} + \frac{2a-b}{(a-b)^2}$.

3.12. Спростіть вираз:

1) $\frac{a}{x-1}+\frac{5}{1-x}$; 2) $\frac{m}{c-3}-\frac{p}{3-c}$;

3) $\frac{5x}{x-y}+\frac{5y}{y-x}$; 4) $\frac{10p}{2p-m}+\frac{5m}{m-2p}$.

3.13. Виконайте дію:

1) $\frac{c}{a-2}+\frac{x}{2-a}$; 2) $\frac{a}{x-y}-\frac{8}{y-x}$;

3) $\frac{2m}{m-n}+\frac{2n}{n-m}$; 4) $\frac{16x}{4x-y}+\frac{4y}{y-4x}$.

3 **3.14.** Виконайте дію:

1) $\frac{m^2-m}{m^2+4m+4}-\frac{4-m}{m^2+4m+4}$; 2) $\frac{9c}{c^2-6c}-\frac{18+6c}{c^2-6c}$.

3.15. Знайдіть різницю:

1) $\frac{a^2+3a}{a^2+6a+9}-\frac{3a+9}{a^2+6a+9}$; 2) $\frac{3m}{m^2-5m}-\frac{m+10}{m^2-5m}$.

3.16. Доведіть тотожність:

1) $\frac{(a-b)^2}{2ab}-\frac{(a+b)^2}{2ab}=-2$; 2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

3.17. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{m^2}{2m-10}+\frac{25}{10-2m}$, якщо $m=25$;

2) $\frac{x^2+9y^2}{x-3y}+\frac{6xy}{3y-x}$, якщо $x=2026$, $y=\frac{1}{3}$.

3.18. Обчисліть:

1) $\frac{x^2}{3x-18}+\frac{36}{18-3x}$, якщо $x=-12$;

2) $\frac{c^2}{c-5k}-\frac{25k^2-10ck}{5k-c}$, якщо $c=199$, $k=0{,}2$.

3.19. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

1) $\frac{m+3}{m}$; 2) $\frac{a^4+a^3-5}{a^2}$;

3) $\frac{x^2+5x-3}{x+5}$; 4) $\frac{4a-4b+7}{a-b}$.

3.20. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

1) $\frac{a-7}{a}$; 2) $\frac{m^2-m^3+7}{m^2}$;

3) $\frac{y^2+y+2}{y+1}$; 4) $\frac{5p-5q-1}{p-q}$.

4

3.21. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\dfrac{7-4m}{(2-m)^2}-\dfrac{9-5m}{(m-2)^2}$; 2) $\dfrac{12a}{(2-a)^3}+\dfrac{3a^2+12}{(a-2)^3}$;

3) $\dfrac{m^2-6n}{(m-2)(n-3)}-\dfrac{2(m-3n)}{(2-m)(3-n)}$.

3.22. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{16-7a}{(3-a)^2}-\dfrac{13-6a}{(a-3)^2}$; 2) $\dfrac{15(2m-3)}{(3-m)^3}+\dfrac{5m^2}{(m-3)^3}$;

3) $\dfrac{p^2-9q}{(p-3)(q-4)}-\dfrac{3(p-3q)}{(3-p)(4-q)}$.

Вправи для повторення

3.23. Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $(a-1)(a+3)^2$; 2) $(x-4)^2(x+2)$.

3.24. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

3.25. Обчисліть: 1) $\dfrac{1}{7}+\dfrac{5}{14}$; 2) $\dfrac{5}{12}-\dfrac{3}{16}$; 3) $\dfrac{1}{8}-\dfrac{3}{16}+\dfrac{7}{24}$.

3.26. Подайте одночлен $15a^3b^7$ у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює:

1) $3ab^5$; 2) $-5a^2b^7$; 3) $-b^6$; 4) $15ab$.

Життєва математика

3.27. 1) На території шкільного подвір'я росте дерево білої акації (робінія звичайна). Через 5 год після поливу вода по її стовбуру піднялася на висоту 7 м 20 см. Обчисліть швидкість переміщення води у стовбурі білої акації.

2) *Практична діяльність*. Дізнайтеся з різноманітних джерел інформації про користь білої акації в житті людини та господарстві.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

3.28. (*Національна олімпіада Великої Британії, 1968 р.*) Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_7$ – цілі числа, а $b_1, b_2, \ldots, b_7$ – ті самі числа в іншому порядку. Доведіть, що число $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\ldots(a_7-b_7)$ є парним.

§ 4. Додавання та віднімання дробів з різними знаменниками

1. Найпростіші приклади додавання та віднімання дробів з різними знаменниками

Якщо дроби мають різні знаменники, то їх, як і звичайні дроби, спочатку зводять до спільного знаменника, а потім додають або віднімають за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Розглянемо, як додати дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$. Спочатку зведемо ці дроби до їх спільного знаменника bd. Для цього чисельник і знаменник дробу $\frac{a}{b}$ помножимо на додатковий множник d: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$. А чисельник і знаменник дробу $\frac{c}{d}$ помножимо на додатковий множник b: $\frac{c}{d} = \frac{cb}{db}$. Дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ *звели до спільного знаменника* bd, після чого додаємо їх.

Цю послідовність дій для додавання дробів з різними знаменниками можна записати так:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}, \text{ або скорочено: } {}^{d/}\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} + {}^{b/}\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{ad+bc}}{\boldsymbol{bd}}.$$

Аналогічно виконують і віднімання дробів з різними знаменниками:

$${}^{d/}\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} - {}^{b/}\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{ad-bc}}{\boldsymbol{bd}}.$$

Приклад 1. Виконати дію: 1) $\frac{3}{m}+\frac{4}{n}$; 2) $\frac{2}{a}-\frac{b}{7}$.

Розв'язання.

1) ${}^{n/}\frac{3}{m} + {}^{m/}\frac{4}{n} = \frac{3n+4m}{mn}$; 2) ${}^{7/}\frac{2}{a} - {}^{a/}\frac{b}{7} = \frac{14-ab}{7a}$.

Часто під час додавання та віднімання дробів з різними знаменниками вдається знайти простіший спільний знаменник, ніж добуток знаменників цих дробів. У такому разі кажуть про *найпростіший* спільний знаменник (аналогічно до *найменшого* спільного знаменника для числових дробів). Узагалі у дробів є безліч спільних знаменників.

2. Додавання та віднімання дробів, знаменниками яких є одночлени

Розглянемо приклад, де знаменники дробів – одночлени.

Приклад 2. Виконати дію $\frac{7}{6x^2y}+\frac{3}{8xy^3}$.

Розв'язання. Спільним знаменником цих дробів можна вважати одночлен $48x^3y^4$, що є добутком знаменників дробів, але в цьому разі він не буде найпростішим спільним знаменником.

Спробуємо знайти найпростіший спільний знаменник. Оскільки знаменники дробів є одночленами, то і найпростішим спільним знаменником також буде одночлен. Коефіцієнт цього одночлена має ділитися і на 6, і на 8. Найменшим таким числом є число 24. До спільного знаменника кожна зі змінних має входити з найбільшим з показників степеня, з якими вона входить до знаменників дробів. Так, найпростішим спільним знаменником буде одночлен $24x^2y^3$. Тоді додатковим множником для першого дробу є вираз $4y^2$, бо $24x^2y^3 = 6x^2y \cdot 4y^2$, а для другого – вираз $3x$, бо $24x^2y^3 = 8xy^3 \cdot 3x$. Отже, маємо:

$$\frac{^{4y^2/}7}{6x^2y}+\frac{^{3x/}3}{8xy^3}=\frac{4y^2\cdot 7+3x\cdot 3}{24x^2y^3}=\frac{28y^2+9x}{24x^2y^3}.$$

Відповідь: $\frac{28y^2+9x}{24x^2y^3}$.

Зверніть увагу, що у прикладі 2 під час зведення дробів до спільного знаменника додаткові множники $4y^2$ та $3x$ не містили жодного спільного множника, відмінного від одиниці. Це означає, що ми знайшли саме найпростіший спільний знаменник дробів.

3. Додавання та віднімання дробів, знаменниками яких є многочлени

Тепер розглянемо приклад, у якому знаменниками дробів є многочлени.

Приклад 3. Виконати віднімання $\frac{x+4}{xy-x^2}-\frac{y+4}{y^2-xy}$.

Розв'язання. Щоб знайти спільний знаменник, розкладемо знаменники на множники. Маємо:

$$xy-x^2=x(y-x) \text{ та } y^2-xy=y(y-x).$$

Найпростішим спільним знаменником дробів буде вираз $xy(y-x)$. Тоді додатковим множником для першого дробу є y, а для другого – x. Виконаємо віднімання:

$$\frac{x+4}{xy-x^2}-\frac{y+4}{y^2-xy}=\frac{^{y/}x+4}{x(y-x)}-\frac{^{x/}y+4}{y(y-x)}=\frac{y(x+4)-x(y+4)}{xy(y-x)}=$$

$$=\frac{xy+4y-xy-4x}{xy(y-x)}=\frac{4y-4x}{xy(y-x)}=\frac{4(y-x)}{xy(y-x)}=\frac{4}{xy}.$$

Відповідь: $\frac{4}{xy}$.

4. Алгоритм виконання додавання та віднімання дробів з різними знаменниками

Отже, щоб виконати додавання або віднімання дробів з різними знаменниками, треба:

1) розкласти на множники знаменники дробів, якщо це потрібно;
2) знайти спільний знаменник, бажано найпростіший;
3) знайти додаткові множники і звести дроби до спільного знаменника;
4) знайти суму або різницю отриманих дробів;
5) скоротити отриманий дріб, якщо він скоротний, та записати відповідь.

Розглянемо застосування алгоритму в такому прикладі.

Приклад 4. Подати вираз $\frac{2a}{a-6}-\frac{6}{a+6}+\frac{2a^2}{36-a^2}$ у вигляді дробу.

Розв'язання. 1) Розкладемо знаменник третього дробу на множники $36-a^2=(6-a)(6+a)$. Оскільки перший дріб має знаменник $a-6$, то знаменник третього дробу краще подати так: $36-a^2=-(a-6)(a+6)$.

Маємо: $\frac{2a}{a-6}-\frac{6}{a+6}-\frac{2a^2}{(a-6)(a+6)}$.

2) Найпростішим спільним знаменником трьох дробів є вираз
$(a-6)(a+6)$.

3) Додатковим множником до першого дробу є вираз $(a+6)$, до другого – $(a-6)$, до третього – 1. Запишемо це

$$\frac{^{a+6/}2a}{a-6}-\frac{^{a-6/}6}{a+6}-\frac{^{1/}2a^2}{(a-6)(a+6)}.$$

4) Маємо далі

$$\frac{2a(a+6)-6(a-6)-2a^2}{(a-6)(a+6)}=\frac{2a^2+12a-6a+36-2a^2}{(a-6)(a+6)}=\frac{6a+36}{(a-6)(a+6)}.$$

5) Скоротимо отриманий дріб $\frac{6(a+6)}{(a-6)(a+6)}=\frac{6}{a-6}$.

Коротко розв'язання можна записати так:

$$\frac{2a}{a-6}-\frac{6}{a+6}+\frac{2a^2}{36-a^2}=\frac{^{a+6/}2a}{a-6}-\frac{^{a-6/}6}{a+6}-\frac{^{1/}2a^2}{(a-6)(a+6)}=$$

$$=\frac{2a(a+6)-6(a-6)-2a^2}{(a-6)(a+6)}=\frac{2a^2+12a-6a+36-2a^2}{(a-6)(a+6)}=\frac{6a+36}{(a-6)(a+6)}=$$

$$=\frac{6(a+6)}{(a-6)(a+6)}=\frac{6}{a-6}.$$

Відповідь: $\frac{6}{a-6}$.

5. Додавання та віднімання цілого виразу і дробу

Аналогічно виконують додавання та віднімання цілого виразу і дробу.

Приклад 5. Спростити вираз $a+1-\dfrac{a^2-a}{a-2}$.

Розв'язання. Запишемо вираз $a + 1$ у вигляді дробу зі знаменником 1 та виконаємо віднімання:

$$a+1-\frac{a^2-a}{a-2}=\frac{^{a-2/}a+1}{1}-\frac{a^2-a}{a-2}=\frac{(a-2)(a+1)-(a^2-a)}{a-2}=$$

$$=\frac{a^2+a-2a-2-a^2+a}{a-2}=\frac{-2}{a-2}=-\frac{2}{a-2}=\frac{2}{2-a}.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{2-a}$.

? Який знаменник є спільним для дробів $\dfrac{2}{n}$ і $\dfrac{4}{m}$? ○ Як виконати додавання та віднімання дробів з різними знаменниками?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

4.1. (*Усно.*) Знайдіть спільний знаменник дробів:

1) $\dfrac{a}{3}$ і $\dfrac{b}{6}$; 2) $\dfrac{x}{12}$ і $\dfrac{y}{8}$; 3) $\dfrac{a}{x}$ і $\dfrac{b}{y}$; 4) $\dfrac{c}{m}$ і $\dfrac{x}{3}$.

4.2. Виконайте дію: 1) $\dfrac{m}{2}-\dfrac{y}{3}$; 2) $\dfrac{a}{4}+\dfrac{x}{8}$; 3) $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$; 4) $\dfrac{2}{c}+\dfrac{k}{3}$.

4.3. Виконайте дію: 1) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{a}{4}$; 2) $\dfrac{m}{6}-\dfrac{n}{3}$; 3) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$; 4) $\dfrac{t}{5}-\dfrac{4}{p}$.

2

4.4. Подайте у вигляді дробу:

1) $\dfrac{3}{5a}-\dfrac{1}{2a}$; 2) $\dfrac{a}{4b}+\dfrac{7a}{5b}$; 3) $\dfrac{2a^2}{9b}+\dfrac{5a^2}{18b}$; 4) $\dfrac{7m}{12n^2}-\dfrac{m}{18n^2}$.

4.5. Виконайте дію:

1) $\dfrac{3}{4m}+\dfrac{2}{5m}$; 2) $\dfrac{x}{6y}-\dfrac{3x}{8y}$; 3) $\dfrac{4a}{9m^2}+\dfrac{5a}{12m^2}$; 4) $\dfrac{4x^2}{15y}-\dfrac{x^2}{10y}$.

4.6. Перетворіть на дріб вираз:

1) $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{x-4}{5}$; 2) $\dfrac{4m-2n}{10}-\dfrac{m-n}{5}$; 3) $\dfrac{a+2}{4a}-\dfrac{3-7a}{6a}$;

4) $\dfrac{2-3y}{y}-\dfrac{5-3x}{x}$; 5) $\dfrac{x+7}{5x}-\dfrac{3y+4}{15y}$; 6) $\dfrac{4a+b}{2a}+\dfrac{a-6b}{3b}$.

4.7. Подайте у вигляді дробу:

1) $\dfrac{a}{4}+\dfrac{a-2}{3}$; 2) $\dfrac{2x-y}{14}-\dfrac{x-y}{7}$;

3) $\dfrac{x-6}{2x}+\dfrac{7-2y}{4y}$; 4) $\dfrac{6m-n}{3m}-\dfrac{8n-5m}{4n}$.

4.8. Виконайте дію:

1) $\frac{1}{a^2}+\frac{a-2}{a}$; 2) $\frac{2+m}{m^2}-\frac{m^2-5}{m^3}$; 3) $\frac{1}{2x^5}+\frac{1-3x^2}{x^7}$;

4) $\frac{a-b}{ab}-\frac{b-a}{b^2}$; 5) $\frac{3n+m}{mn^2}+\frac{n-3m}{m^2n}$; 6) $\frac{x-2y}{xy^2}-\frac{y-2x}{x^2y}$.

4.9. Спростіть:

1) $\frac{m+2}{m^2}-\frac{1}{m}$; 2) $\frac{5}{n^5}+\frac{3-4n^2}{n^7}$;

3) $\frac{x-y}{x^2}-\frac{y-x}{xy}$; 4) $\frac{c-2p}{cp^2}+\frac{2c-p}{pc^2}$.

4.10. Виконайте дії:

1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$; 2) $\frac{1}{c^3}-\frac{2}{c^2}+\frac{3}{c}$;

3) $\frac{1}{xy}-\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}$; 4) $\frac{a+b}{ab}-\frac{b+c}{bc}+\frac{a+c}{ac}$.

4.11. Виконайте дії:

1) $\frac{1}{p}-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$; 2) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}$;

3) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$; 4) $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}+\frac{x+z}{xz}$.

4.12. Доведіть тотожність $\frac{3x+1}{7x}-\frac{y-1}{2y}-\frac{7x+y}{14xy}=\frac{1-x}{14x}$.

4.13. Доведіть тотожність $\frac{3m+2}{5m}-\frac{n-1}{2n}-\frac{5m+3n}{10mn}=\frac{m+1}{10m}$.

4.14. Перетворіть на дріб вираз:

1) $x+\frac{2}{y}$; 2) $3m-\frac{1}{m}$; 3) $\frac{4}{p}-p^2$;

4) $\frac{a^2+y}{a}-a$; 5) $2x-\frac{6x^2+1}{3x}$; 6) $m+\frac{2-4mn}{4n}$.

4.15. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $m-\frac{3}{n}$; 2) $4p+\frac{1}{p}$; 3) $\frac{x+y^2}{y}-y$; 4) $7p-\frac{14p^2+3}{2p}$.

4.16. Спростіть вираз:

1) $1-\frac{m}{2}-\frac{n}{3}$; 2) $4+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$;

3) $\frac{m-2}{3}-1+\frac{m+2}{4}$; 4) $\frac{1}{a+b}+a-b$.

4.17. Виконайте дії:

1) $\frac{m}{3}+\frac{n}{4}-1$; 2) $5-\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$;

3) $\frac{a+3}{5}-1+\frac{a-2}{2}$; 4) $\frac{1}{x-y}+x+y$.

4.18. Знайдіть суму та різницю дробів:

1) $\frac{1}{x-y}$ і $\frac{1}{x+y}$; 2) $\frac{1}{a+b}$ і $\frac{1}{a}$.

4.19. Знайдіть суму та різницю дробів:

1) $\frac{1}{2a+b}$ і $\frac{1}{2a-b}$; 2) $\frac{1}{m-n}$ і $\frac{1}{m}$.

4.20. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{a}+\frac{3}{a-1}$; 2) $\frac{c}{a-c}-\frac{c}{a}$;

3) $\frac{3}{x+y}+\frac{2}{x-y}$; 4) $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-2}$;

5) $\frac{a+1}{a}-\frac{a}{a-1}$; 6) $\frac{a}{2a-1}-\frac{a}{2a+1}$.

4.21. Виконайте дію:

1) $\frac{4}{b}+\frac{7}{b+2}$; 2) $\frac{3}{m-n}-\frac{2}{m+n}$;

3) $\frac{p}{p-2}-\frac{3}{p+3}$; 4) $\frac{x}{1-x}+\frac{1+x}{x}$.

4.22. Виконайте дію:

1) $\frac{a-2}{2(a+1)}+\frac{a}{a+1}$; 2) $\frac{m}{4(a+b)}-\frac{3m}{5(a+b)}$;

3) $\frac{a-2}{2a+6}-\frac{a+1}{3a+9}$; 4) $\frac{4}{ax-ay}+\frac{5}{bx-by}$;

5) $\frac{5}{x}-\frac{30}{x(x+6)}$; 6) $\frac{6}{x^2+3x}-\frac{2}{x}$.

4.23. Виконайте дію:

1) $\frac{m-1}{3(m+2)}+\frac{m}{m+2}$; 2) $\frac{7a}{3(b+2a)}-\frac{4a}{9(b+2a)}$;

3) $\frac{x-2}{3x-12}-\frac{x+1}{2x-8}$; 4) $\frac{3}{mx+my}+\frac{2}{nx+ny}$;

5) $\frac{4}{a}-\frac{8}{a(a+2)}$; 6) $\frac{8}{m^2+8m}-\frac{1}{m}$.

4.24. Сучасна українська науковиця Марина В'язовська отримала медаль Філдса – найпрестижнішу премію для математиків у світі. Спростіть вираз $\frac{4n+m}{n^2-m^2}+\frac{1}{n+m}$ та обчисліть його значення, якщо $n=-2$, $m=-3$. Після виконаної роботи ви дізнаєтеся, скільки всього жінок-науковиць мають цю медаль.

4.25. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\frac{a-6}{a^2-4}+\frac{3}{a-2}$; 2) $\frac{x}{x-5}-\frac{x^2}{x^2-10x+25}$.

4.26. Перетворіть вираз на дріб:

1) $\frac{4a-b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a-b}$; 2) $\frac{2}{b+3}+\frac{b+6}{b^2-9}$;

3) $\frac{m}{m+4}-\frac{m^2}{m^2+8m+16}$.

3

4.27. Спростіть вираз:

1) $\frac{a+4}{ab-a^2}+\frac{b+4}{ab-b^2}$; 2) $\frac{m^2}{mx-x^2}+\frac{x}{x-m}$;

3) $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2+2x}$; 4) $\frac{3ab-27a^2}{b^2-3ab}-\frac{3a^2-b^2}{ab-3a^2}$.

4.28. Спростіть вираз:

1) $\frac{a-2}{ab-a^2}-\frac{2-b}{ab-b^2}$; 2) $\frac{t^2}{ta+a^2}-\frac{a}{t+a}$;

3) $\frac{4}{a^2-9}-\frac{2}{a^2+3a}$; 4) $\frac{3n^2-8m^2}{n^2-2mn}-\frac{3mn-n^2}{mn-2m^2}$.

4.29. Доведіть тотожність

$$\frac{(a-1)(a-2)}{12}-\frac{(a-1)(a-5)}{3}+\frac{(a-5)(a-2)}{4}=1.$$

4.30. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $m-n-\frac{m^2+n^2}{m+n}$; 2) $p-\frac{4}{p-2}-2$;

3) $a^2-\frac{a^4}{a^2-1}+1$; 4) $\frac{8p^2}{2p-3}-4p-1$.

4.31. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $m-\frac{9}{m+3}+3$; 2) $\frac{6m^2}{3m+1}-2m+4$.

4.32. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\frac{4m-5}{7m-21}-\frac{m-1}{2m-6}$ від значення m не залежить.

4.33. Спростіть вираз:

1) $\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{2-x}{x^3+1}$; 2) $\frac{2m}{m-5}-\frac{5}{m+5}+\frac{2m^2}{25-m^2}$;

3) $\frac{6}{m^2-6m}+\frac{m-12}{6m-36}$; 4) $\frac{3}{2a+6}+\frac{a^2-a-3}{a^2-9}-1$.

4.34. Спростіть вираз:

1) $\frac{a+1}{a^2+a+1}+\frac{a+2}{a^3-1}$; 2) $\frac{2a}{a-3}+\frac{a}{a+3}+\frac{2a^2}{9-a^2}$;

3) $\frac{4}{m^2+4m}+\frac{m+8}{4m+16}$; 4) $\frac{2}{3b+6}+\frac{b^2-b-2}{b^2-4}-1$.

4.35. Доведіть тотожність $\frac{0,9}{0,25a+0,5}-\frac{0,3a+0,6}{0,5a^2+2a+2}=\frac{3}{a+2}$.

4.36. Доведіть тотожність $\frac{0,35}{0,5a-1,5}-\frac{0,2a-0,6}{a^2-6a+9}=\frac{1}{2(a-3)}$.

4.37. Перетворіть вираз на дріб:

1) $\frac{a^2-2ab+4b^2}{a^2-4b^2}+\frac{a^2+2ab+4b^2}{(a+2b)^2}$; 2) $\frac{2}{(a-3)^2}-\frac{4}{a^2-9}+\frac{2}{(a+3)^2}$.

4.38. Перетворіть вираз на дріб:

1) $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}$; 2) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{(x+2)^2}$.

4.39. Для якого значення a вираз $2+\frac{a}{x-4}$ тотожно дорівнює дробу $\frac{2x}{x-4}$?

4

4.40. Доведіть, що значення виразу $\frac{a^3+3a}{a+2}-\frac{3a^2-14a+16}{a^2-4}+2a$ для всіх допустимих значень змінної є додатним.

4.41. Доведіть тотожність $a+a^2+\frac{2a^2+3a+1}{a^2-1}-\frac{a^3+2a}{a-1}=-1$.

4.42. Побудуйте графік функції $y=15\left(\frac{3x+4}{5x-10}-\frac{x+4}{3x-6}\right)$.

4.43. Знайдіть значення виразу

$$\frac{3a+0,5b}{9a^2-1,5ab}-\frac{12a}{9a^2-0,25b^2}-\frac{3a-0,5b}{9a^2+1,5ab},$$

якщо $a=\frac{1}{6}$, $b=-1\frac{4}{9}$. Відтак дізнаєтеся, у якому віці українець Руслан Пономарьов став наймолодшим в історії чемпіоном світу із шахів.

4.44. Знайдіть значення виразу

$$\frac{x+0,2y}{4x^2-0,8xy}-\frac{12,5x}{12,5x^2-0,5y^2}-\frac{x-0,2y}{4x^2+0,8xy},$$

якщо $x = -10$, $y = 49$.

4.45. Чи існує таке значення x, для якого значення виразу

$$\frac{1}{2-x}-\frac{1}{2+x}-\frac{x}{4-x^2}+\frac{x^2+4}{2x^3-8x}$$

дорівнює нулю?

Вправи для повторення

4.46. Скільки кілограмів солі міститься у 60 кг її 5-відсоткового розчину?

4.47. З двох міст одночасно назустріч одна одній виїхали дві велосипедистки. Відстань між містами становить s км, швидкості велосипедисток v_1 км/год і v_2 км/год. Через t год вони зустрілися. Складіть формулу для обчислення t. Знайдіть значення t, якщо $s = 150$ км, $v_1 = 12$ км/год, $v_2 = 13$ км/год.


4.48. Відомо, що $\frac{x}{y} = 3$. Знайдіть значення дробу:

1) $\frac{x+y}{y}$; 2) $\frac{x-y}{y}$; 3) $\frac{x+7y}{y}$; 4) $\frac{x^2+2xy}{xy}$.

Життєва математика

4.49. Після уроків у класах школи зібрано 0,7 кг паперового сміття.
1) Якщо учні та учениці школи залишатимуть щодня таку кількість паперу, то скільки його пропаде за 190 навчальних днів у одній школі? У 20 школах району?
2) Для виробництва 1 т паперу потрібно приблизно 900 м^2 лісу. Якщо учні та учениці шкіл району здадуть усі паперові відходи за рік, то скільки м^2 лісу вони збережуть від вирубування?
3) *Проєктна діяльність.* Як можна використати паперові відходи? Завітайте в сусідні супермаркети або крамниці з промисловими та канцелярськими товарами і складіть список товарів, які виробляють з макулатури.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

4.50. Для шкільної актової зали придбали люстру на 31 лампочку. Адміністрація школи хоче мати можливість вмикати будь-яку їх кількість, від 1 до 31. Яка найменша кількість звичайних вимикачів для цього знадобиться?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1 (§§ 1–4)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Укажіть вираз, що не є цілим раціональним виразом.

А. $\frac{1}{5}a^2xy$ **Б.** $\frac{m-3}{5}$ **В.** $\frac{5}{m-3}$ **Г.** $0,25x+y$

2. Скоротіть дріб $\frac{5ax}{5xy}$.

А. $\frac{5a}{y}$ **Б.** $\frac{a}{y}$ **В.** $\frac{y}{a}$ **Г.** $\frac{a}{5y}$

3. Виконайте дію $\frac{m}{3}-\frac{5}{b}$.

А. $\frac{m-5}{3-b}$ **Б.** $\frac{3m-5b}{3b}$ **В.** $\frac{15-mb}{3b}$ **Г.** $\frac{mb-15}{3b}$

2

4. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі $\frac{a-3}{a+2}$.

А. a – будь-яке число
Б. a – будь-яке число, крім 3
В. a – будь-яке число, крім –2
Г. a – будь-яке число, крім –2 і 3

5. Скоротіть дріб $\frac{2p+4}{p^2-4}$.

А. $\frac{2}{p-2}$ **Б.** $\frac{2}{p+2}$ **В.** $\frac{2}{p}$ **Г.** $\frac{2}{2-p}$

6. Виконайте дію $\frac{4m}{m-a}+\frac{4a}{a-m}$.

А. $\frac{4m+4a}{m-a}$ **Б.** 4 **В.** –4 **Г.** $\frac{4m+4a}{a-m}$

3

7. Для яких значень x дріб $\frac{(3+x)(1-x)}{5x-5}$ дорівнює нулю?

А. –3 і 1 **Б.** –3
В. 1 **Г.** Таких значень x немає

8. Спростіть вираз $\frac{2m}{m-3}+\frac{m}{m+3}+\frac{2m^2}{9-m^2}$.

А. $\frac{m}{m-3}$ **Б.** $\frac{m}{m+3}$
В. $\frac{5m^2+3m}{m^2-9}$ **Г.** $-\frac{1}{3}$

9. Подайте дріб $\dfrac{m^3 - m^4 + 3}{m^3}$ у вигляді суми цілого виразу та дробу.

А. $1 - \dfrac{1}{m} + \dfrac{3}{m^3}$ **Б.** $1 + \dfrac{3}{m^3}$

В. $1 - m + \dfrac{3}{m^3}$ **Г.** $1 - m + \dfrac{1}{m^3}$

4 **10.** Для яких значень x вираз $\dfrac{x^2 - 9}{|x + 1| - 4}$ має зміст?

А. x – будь-яке число
Б. x – будь-яке число, крім 3
В. x – будь-яке число, крім -5
Г. x – будь-яке число, крім 3 і -5

11. Для яких значень x дріб $\dfrac{x^2 - 9}{|x + 1| - 4}$ дорівнює нулю?

А. 3
Б. 3 і -3
В. -3
Г. 3; -5

12. Знайдіть значення виразу $\dfrac{2(x - 4y)}{(x - 2)(y - 1)} - \dfrac{x^2 - 8y}{(2 - x)(1 - y)}$, якщо $x = 13$, $y = 0,99$.

А. 1300
Б. -1300
В. 130
Г. -130

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між виразом (1–3) і його значенням (А–Г), якщо $x = 2,5$.

Вираз	*Значення виразу*
1. $\dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4}$	**А.** 4
2. $\dfrac{4x}{x - 2} + \dfrac{8}{2 - x}$	**Б.** 4,5
3. $\dfrac{100}{10x - x^2} + \dfrac{x}{x - 10}$	**В.** 5
	Г. 5,5

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–4

1

1. Які з виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{1}{3}a^2b$; 2) $\frac{x-y}{x}$; 3) $\frac{c+2}{9}$; 4) $p^2 - p - 19$?

2. Скоротіть дріб: 1) $\frac{m^2}{mn}$; 2) $\frac{4ab}{4bc}$.

3. Виконайте дію: 1) $\frac{a-b}{n} + \frac{b}{n}$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{3}{y}$.

2

4. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{5}{x(x-1)}$; 2) $\frac{2a}{a+2} + \frac{1}{a-3}$.

5. Скоротіть дріб:

1) $\frac{16am}{20bm}$; 2) $\frac{12am^2}{8mc}$; 3) $\frac{2m-6}{m^2-9}$; 4) $\frac{ax+2a}{x^2+4x+4}$.

6. Виконайте дію:

1) $\frac{3a}{a-b} + \frac{3b}{b-a}$; 2) $\frac{5x+y}{x^2y} + \frac{x-5y}{xy^2}$.

3

7. Спростіть вираз $\frac{2b}{b-4} + \frac{b}{b+4} + \frac{2b^2}{16-b^2}$.

8. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

1) $\frac{c^2 - c^3 + 5}{c^2}$; 2) $\frac{p^2 - p - 2}{p-1}$.

4

9. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - 4x}{16 - 4x}$.

Додаткові завдання

4

10. Знайдіть:

1) область визначення виразу $\frac{x^2 - 16}{|x+1| - 5}$;

2) значення x, для яких дріб $\frac{x^2 - 16}{|x+1| - 5}$ дорівнює нулю.

11. Спростіть вираз $\frac{3(a-2b)}{(a-3)(b-4)} - \frac{a^2 - 6b}{(3-a)(4-b)}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 1

До § 1

1 **1.** З раціональних виразів

$$m^3 - mp^2;\ \frac{t^2+2}{t-7};\ \frac{p\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x^2};\ \frac{17}{x-y};\ \frac{x^2+ax-a^2}{19};\ \frac{(x+p):y}{a-b}$$

випишіть:

1) цілі раціональні вирази;

2) дробові раціональні вирази;

3) раціональні дроби.

2 **2.** Знайдіть область визначення виразу:

1) $c^2 - 3c$; 2) $\frac{m+2}{m-8}$;

3) $\frac{a}{a-9} + \frac{a-9}{a}$; 4) $\frac{3+c}{c(c-1)}$.

3 **3.** Туристка пройшла 12 км уздовж шосе зі швидкістю a км/год і 8 км степовою дорогою зі швидкістю b км/год. Скільки часу витратила туристка на весь шлях? Складіть вираз і знайдіть його значення, якщо $a = 5$, $b = 4$.

4. Обчисліть значення дробу $\frac{x^2+2xy+y^2}{0,1x}$, якщо $x = -100$, $y = 99$.

4 **5.** Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{1}{|x|+7}$; 2) $\frac{p}{|m|-m}$; 3) $\frac{1}{1-\frac{1}{|a|}}$; 4) $\frac{3}{|2x-7|-3}$.

6. Для яких значень x дорівнює нулю дріб:

1) $\frac{x^2-1}{x+1}$; 2) $\frac{x+3}{x^2-9}$; 3) $\frac{|x|-2}{(x-2)(x+5)}$; 4) $\frac{|x|-x}{x(x-3)}$?

До § 2

1 **7.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{5m}{20n}$; 2) $\frac{4x}{5x}$; 3) $\frac{p}{10p}$; 4) $\frac{-3}{6t}$; 5) $\frac{ax}{xb}$; 6) $\frac{mn}{2m}$.

2 **8.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2b^3}{ab^7}$; 2) $\frac{-63xa^5}{81xa^6}$; 3) $\frac{p(a-2)}{m(a-2)}$; 4) $\frac{7a-14b}{3a-6b}$;

5) $\frac{a-2y}{a^2-2ay}$; 6) $\frac{m^2-1}{7m+7}$; 7) $\frac{x^2-4x+4}{3x-6}$; 8) $\frac{x^2-2xy}{2y-x}$.

9. Зведіть дріб:

1) $\dfrac{c}{a^2}$ до знаменника a^5; 2) $\dfrac{p}{3c}$ до знаменника $12c^7$.

3 **10.** Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть його:

1) $(x^3 + 8) : (x + 2)$;

2) $(a^2 - 5a + 25) : (a^3 + 125)$.

11. Обчисліть значення дробу:

1) $\dfrac{10xy - 5x^2}{8y^2 - 4xy}$, якщо $x = 0{,}2$, $y = 0{,}25$;

2) $\dfrac{a^2 - 4b^2}{3a^2b - 6ab^2}$, якщо $a = 20$, $b = -10$.

12. Зведіть дріб $\dfrac{3}{a - 2}$ до знаменника:

1) $7a - 14$; 2) $a^2 - 2a$; 3) $16 - 8a$; 4) $a^2 - 4$.

4 **13.** Доведіть тотожність $\dfrac{22{,}5a^2 - 2{,}5b^2}{7{,}5a^2 - 2{,}5ab} = \dfrac{3a + b}{a}$.

14. Знайдіть значення дробу $\dfrac{2x - 8y}{0{,}2x^2 - 3{,}2y^2}$, якщо $x + 4y = 5$.

15. Подайте вираз $5a + 4b$ у вигляді дробу зі знаменником:

1) 5; 2) $-a$;

3) $2b$; 4) $2a - 3b$.

16. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2 - y^2 - z^2 + 2yz}{y^2 - x^2 - z^2 - 2xz}$.

До § 3

1 **17.** Виконайте дію:

1) $\dfrac{4m}{7} + \dfrac{m}{7}$; 2) $\dfrac{9p}{8a} - \dfrac{2p}{8a}$; 3) $\dfrac{m - n}{p} + \dfrac{n}{p}$; 4) $\dfrac{12a^2}{5m} - \dfrac{3a^2}{5m}$.

2 **18.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{3m - 7}{12m} + \dfrac{13 - 5m}{12m} - \dfrac{6m - 2}{12m}$; 2) $\dfrac{m^2 + 1}{a(m - 1)} - \dfrac{2}{a(m - 1)}$;

3) $\dfrac{x - 8}{x^2 - 25} + \dfrac{13}{x^2 - 25}$; 4) $\dfrac{a - 4}{a - 2} - \dfrac{2}{2 - a}$.

19. Знайдіть значення виразу $\dfrac{m + 1}{m^2 - 16} + \dfrac{3}{m^2 - 16}$, якщо $m = 14$.

3 **20.** Перетворіть на дріб вираз:

1) $\dfrac{9b + 1}{b^2 - 4} + \dfrac{8 - b}{4 - b^2} - \dfrac{7b - 1}{b^2 - 4}$; 2) $\dfrac{5m}{m^3 - 1} - \dfrac{1 - 4m}{1 - m^3} + \dfrac{m^2}{m^3 - 1}$.

21. Для якого значення a вирази $\frac{2x+3}{x-2}$ і $\frac{2x}{x-2}+\frac{a}{2-x}$ є тотожно рівними?

22. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\frac{8+3a}{5-4a}+\frac{13a-14}{4a-5}-\frac{2a+7}{5-4a}$ від значення змінної не залежить.

4 **23.** Спростіть вираз:

1) $\frac{16m^2}{(4m-1)(4m+1)}-\frac{8m}{16m^2-1}-\frac{1}{(1-4m)(1+4m)}$;

2) $\frac{8x-9}{(2x+1)^2}-\frac{8x^3+3x-1}{(1+2x)^2}-\frac{5x-7}{1+4x^2+4x}$.

24. Доведіть, що вираз $\frac{x+6}{(2-x)^4}+\frac{x^2-3}{(x-2)^4}-\frac{5x-1}{(2-x)^4}$ набуває додатних значень для всіх значень x, за умови $x \neq 2$.

25. Знайдіть, для яких натуральних значень n натуральним числом є значення дробу:

1) $\frac{n+2}{n}$; 2) $\frac{n^2+6}{n}$; 3) $\frac{n^2-10n+16}{n}$.

26. Побудуйте графік функції $y=\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{1-x}$.

До § 4

1 **27.** Виконайте дію:

1) $\frac{c}{5}-\frac{a}{4}$; 2) $\frac{a}{3}+\frac{b}{12}$; 3) $\frac{p}{x}-\frac{x}{a}$; 4) $\frac{4}{m}+\frac{n}{7}$.

2 **28.** Виконайте дію:

1) $\frac{2}{3p}-\frac{4}{9p}$; 2) $\frac{7x^2}{12m}+\frac{x^2}{m}$; 3) $\frac{3x-2y}{12}+\frac{y+x}{6}$;

4) $\frac{3a+b}{6}-\frac{4a-b}{8}$; 5) $\frac{1}{p^2}-\frac{p-2}{p^3}$; 6) $\frac{4a+b}{2a}-\frac{6b-a}{3b}$.

29. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn}$; 2) $\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}$; 3) $\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}-\frac{1}{ab}$.

30. Подайте у вигляді дробу:

1) $2x-\frac{1}{x}$; 2) $4p-\frac{4p^2-1}{p}$; 3) $\frac{2}{m}+\frac{3}{m-1}$;

4) $\frac{m}{1-m}+\frac{1+m}{m}$; 5) $\frac{c}{3c-1}+\frac{c}{3c+1}$; 6) $\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}$.

31. Виконайте дію:

1) $\frac{2c-7}{2(c+5)}+\frac{4-c}{c+5}$; 2) $\frac{a-1}{3a+6}-\frac{a}{4a+8}$; 3) $\frac{7}{x}-\frac{14}{x(x+2)}$;

4) $\frac{9}{m^2+4m}-\frac{5}{m+4}$; 5) $\frac{b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$; 6) $\frac{x+3}{x^2+2x+1}-\frac{1}{x+1}$.

3 **32.** Доведіть, що для всіх значень змінної значення виразу

$$\frac{(a-3)(a-7)}{12}-\frac{(a-7)(a-1)}{8}+\frac{(a-1)(a-3)}{24}$$

не залежить від a.

33. Спростіть вираз:

1) $\frac{4m+18}{m^2-9}-\frac{5}{m-3}+\frac{1}{m+3}$; 2) $\frac{2x}{2x+3}+\frac{5}{3-2x}-\frac{4x^2+9}{4x^2-9}$;

3) $\frac{9x}{3xy+2y^2}-\frac{4y}{3x^2+2xy}$; 4) $\frac{4a}{4a^2-1}-\frac{2a+1}{6a-3}+\frac{2a-1}{4a+2}$;

5) $\frac{2x-1}{x^2+x+1}+\frac{4x^2+3x-7}{x^3-1}$; 6) $\frac{a^2}{3ab-2-a+6b}-\frac{a}{3b-1}$.

4 **34.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$;

2) $\frac{yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{xz}{(y-x)(y-z)}+\frac{xy}{(z-x)(z-y)}=1$.

35. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\frac{3x+2}{9x^2-6x+4}-\frac{18x}{27x^3+8}-\frac{1}{3x+2}$ дорівнює нулю.

36. Знайдіть значення a і b, для яких є тотожністю рівність:

1) $\frac{3x}{x+2}-\frac{9x+3}{3x-1}=\frac{ax+b}{3x^2+5x-2}$;

2) $\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$.

37. Човен, власна швидкість якого v км/год, подолав відстань s км завдовжки і повернувся назад за t год. Виразіть t через s і v, якщо швидкість течії 3 км/год. Спростіть отриманий вираз і знайдіть його значення, якщо $v = 12$, $s = 45$.

Головне в темі 1

РАЦІОНАЛЬНИЙ ВИРАЗ. РАЦІОНАЛЬНИЙ ДРІБ

Раціональний вираз – математичний вираз, що містить дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня.

Дріб $\frac{P}{Q}$, де P і Q – многочлени, називають ***раціональним дробом***.

Значення змінних, для яких вираз має зміст, називають ***допустимими значеннями змінних*** у виразі.

ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий відмінний від нуля вираз, то одержимо дріб, що дорівнює даному.

СКОРОЧЕННЯ ДРОБУ

Щоб скоротити дріб, треба:
1) розкласти на множники його чисельник і знаменник (за потреби);
2) виконати ділення чисельника та знаменника на їх спільний множник і записати результат.

ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З ОДНАКОВИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.

ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З РІЗНИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

Щоб виконати додавання або віднімання дробів з різними знаменниками, треба:
1) розкласти на множники знаменники дробів, якщо це потрібно;
2) знайти спільний знаменник, бажано найпростіший;
3) знайти додаткові множники і звести дроби до спільного знаменника;
4) знайти дріб, що є сумою або різницею даних дробів;
5) спростити цей дріб і записати результат.

ПОВТОРЮЄМО ГЕОМЕТРІЮ ЗА 7 КЛАС

Елементарні геометричні фігури та їх властивості. Взаємне розміщення прямих на площині

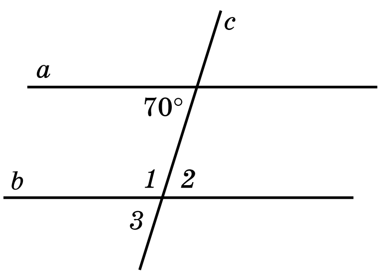
1 **1.** (*Усно.*) Який з поданих кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:

1) $\angle A = 32°$; 2) $\angle B = 90°$; 3) $\angle C = 150°$;
4) $\angle D = 59°\ 30'$; 5) $\angle K = 180°$; 6) $\angle N = 120°$;
7) $\angle L = 89°$; 8) $\angle M = 113°\ 20'$?

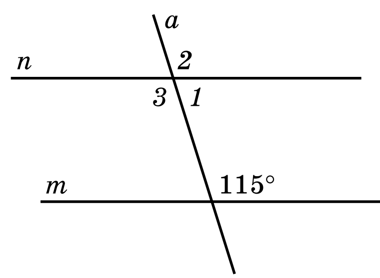
2. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) 25°; 2) 90°; 3) 116°.

3. Знайдіть кут, суміжний з кутом: 1) 140°; 2) 83°.

4. $a \parallel b$, c – січна (мал. 1). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.



Мал. 1



Мал. 2

5. $m \parallel n$, a – січна (мал. 2). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

2 **6.** Точка K належить відрізку CD. Знайдіть:
1) CD, якщо CK = 28 мм, KD = 4 см;
2) KD, якщо CD = 5 дм, CK = 2 дм 6 см.

7. Точка M належить відрізку AB. Знайдіть:
1) AM, якщо AB = 5 см, MB = 34 мм;
2) AB, якщо AM = 3 дм, MB = 2 дм 5 см.

8. Промінь OM проходить між сторонами кута BOC. Знайдіть градусну міру кута BOM, якщо $\angle BOC = 118°$, $\angle MOC = 72°$.

9. Промінь OK проходить між сторонами кута AOD. Знайдіть градусну міру цього кута, якщо $\angle AOK = 42°$, $\angle KOD = 37°$.

10. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 115°. Знайдіть інші кути та кут між прямими.

11. Накресліть відрізки KL і AB та промінь CD так, щоб відрізок KL був паралельний променю CD і перпендикулярний до відрізка AB.

12. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 75°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

13. Один з кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 130°. Знайдіть інші сім кутів.

3 **14.** Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:
1) на $40°$ менший від іншого; 2) становить 80 % від іншого.

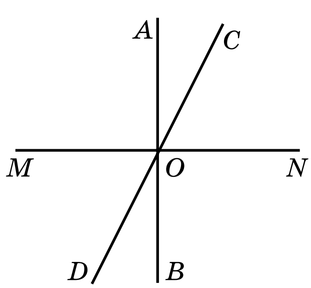
15. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:
1) удвічі більший за інший; 2) становить $\frac{2}{7}$ від іншого.

16. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте назву обласного центра України.

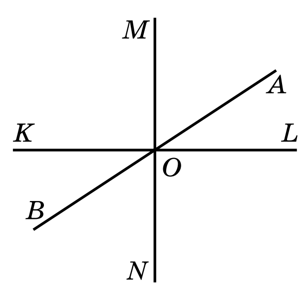
Точка K належить відрізку AB завдовжки 20 см. Знайдіть довжини відрізків AK і KB, якщо:	AK	KB
AK утричі менший від KB	В	Я
KB становить $\frac{2}{3}$ від відрізка AK	И	Н
$AK : KB = 3 : 7$	І	Ц

5 см	6 см	8 см	8 см	12 см	14 см	15 см

17. Прямі AB, MN і CD перетинаються в точці O, причому $AB \perp MN$ (мал. 3). Знайдіть:
1) $\angle DOB$, якщо $\angle CON = 70°$;
2) $\angle AOC$, якщо $\angle DON = 105°$.



Мал. 3



Мал. 4

18. Прямі MN, KL і AB перетинаються в точці O, причому $MN \perp KL$ (мал. 4). Знайдіть:
1) $\angle KOB$, якщо $\angle NOA = 120°$;
2) $\angle KOA$, якщо $\angle BON = 40°$.

19. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:
1) один з них утричі більший за інший;
2) один з них на 25 % більший за інший.

20. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох прямих січною, якщо:

1) один з них на 30° менший від іншого;
2) їхні градусні міри відносяться як 3 : 2.

4 **21.** Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими a і m. Чи можна стверджувати, що прямі b і m паралельні?

Трикутники. Ознаки рівності трикутників

1 **22.** (*Усно.*) Чи існує трикутник з кутами:
1) 60°, 60°, 61°; 2) 20°, 70°, 90°;
3) 10°, 100°, 70°; 4) 50°, 60°, 80°?

23. (*Усно.*) Чи існує трикутник зі сторонами:
1) 7 см, 2 см, 9 см; 2) 12 см, 10 см, 8 см;
3) 3 см, 4 см, 6 см; 4) 8 см, 8 см, 15 см?

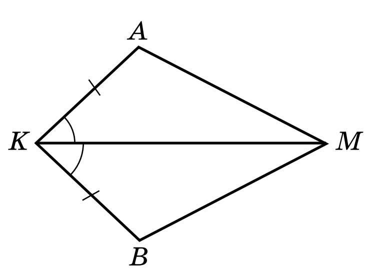
24. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 5 см, а бічна сторона на 2 см більша за основу.

25. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 10 см, а основа на 3 см менша від бічної сторони.

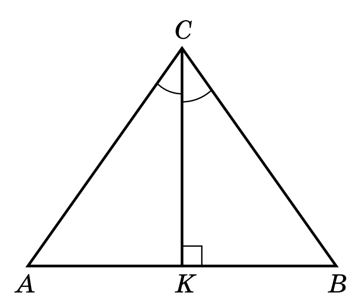
26. У трикутнику ABC відрізок BK – медіана, $AK = 5$ см. Знайдіть KC і AC.

27. У трикутнику ABC відрізок CM – бісектриса, $\angle ACB = 80°$. Знайдіть градусні міри кутів ACM і BCM.

2 **28.** Доведіть, що $\triangle AKM = \triangle BKM$ (мал. 5), якщо $AK = BK$ і $\angle AKM = \angle BKM$.



Мал. 5



Мал. 6

29. Доведіть, що $\triangle ACK = \triangle BCK$ (мал. 6), якщо $CK \perp AB$ і $\angle ACK = \angle BCK$.

30. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

31. Знайдіть кут при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює 100°.

32. Зовнішній кут при вершині C трикутника ABC дорівнює 110°. Знайдіть кут A, якщо $\angle B = 60°$.

33. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 130°. Знайдіть внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, якщо другий внутрішній кут, не суміжний з ним, дорівнює 80°.

34. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$), $\angle A = 60°$. Знайдіть:
1) AC, якщо $AB = 10$ см; 2) AB, якщо $AC = 4$ дм.

35. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$), $\angle A = 30°$. Знайдіть:
1) AB, якщо $BC = 8$ дм; 2) BC, якщо $AB = 18$ см.

36. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 6,3 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

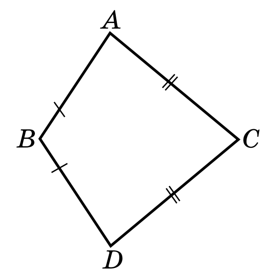
37. Дві сторони трикутника дорівнюють 4,8 см і 2,6 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона трикутника?

3

38. Одна зі сторін трикутника утричі менша від другої і на 10 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 45 см.

39. Одна зі сторін трикутника на 3 см менша від другої й удвічі менша від третьої. Периметр трикутника дорівнює 35 см. Знайдіть сторони трикутника.

40. На малюнку 7 $AB = BD$, $AC = CD$. Доведіть, що BC – бісектриса кута ABD.



Мал. 7

41. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте ім'я та прізвище видатного українського політичного, державного і військового діяча. Дізнайтеся з інтернету про його біографію та досягнення.

У $\triangle ABC$: $\angle A = 60°$. Визначте градусні міри кутів B і C, якщо:	$\angle B$	$\angle C$
кут B на 20° менший від кута C	Л	О
кут B удвічі більший за кут C	Р	И
$\angle B : \angle C = 1 : 3$	П	К

30°	40°	50°	40°	30°

70°	80°	50°	40°	90°

42. Один з кутів трикутника на 20° менший від другого й удвічі менший від третього. Знайдіть кути трикутника.

43. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один з них на 26° більший за інший;
2) один з них становить 80 % від іншого.

44. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один з них у 5 разів більший за інший;
2) їхні градусні міри відносяться як 3 : 2.

4

45. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено висоту CK. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника ACK дорівнює 30 см і $CK = 12$ см.

46. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено медіану AM. Знайдіть периметр трикутника ABM, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 32 см і $AM = 8$ см.

47. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них на 24° більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?

48. Чи існує трикутник з периметром 20 см, одна сторона якого на 4 см більша за другу і на 3 см менша від третьої?

Коло і круг

1

49. (*Усно.*) Знайдіть:

1) діаметр кола, якщо його радіус дорівнює 6 см; 7 дм;

2) радіус кола, діаметр якого дорівнює 4 дм; 5 см.

50. Знайдіть градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:

1) 80°; 2) 200°.

51. Визначте градусну міру центрального кута, якщо відповідний йому вписаний кут дорівнює:

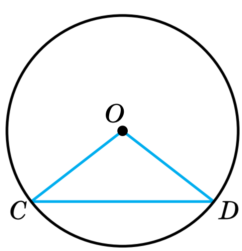
1) 50°;

2) 110°.

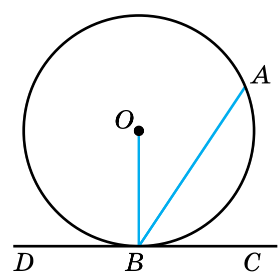
2

52. На малюнку 8 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:

1) кута O, якщо $\angle C = 46°$; 2) кута D, якщо $\angle O = 96°$.



Мал. 8



Мал. 9

53. На малюнку 8 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:

1) кута C, якщо $\angle O = 94°$; 2) кута O, якщо $\angle D = 44°$.

54. На малюнку 9 точка O – центр кола, CD – дотична до кола, точка B – точка дотику. Знайдіть:

1) $\angle OBA$, якщо $\angle ABC = 62°$; 2) $\angle DBA$, якщо $\angle OBA = 30°$.

55. На малюнку 9 точка O – центр кола, CD – дотична до кола, точка B – точка дотику. Знайдіть:

1) $\angle ABC$, якщо $\angle OBA = 32°$; 2) $\angle OBA$, якщо $\angle DBA = 136°$.

56. Точки A і B належать колу і лежать по різні боки від хорди CD, $\angle CAD = 76°$. Знайдіть $\angle CBD$.

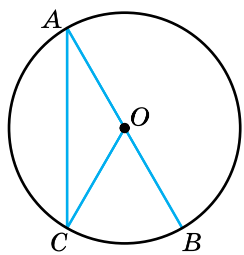
57. Радіуси двох кіл дорівнюють 8 см і 5 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:

1) внутрішній дотик; 2) зовнішній дотик.

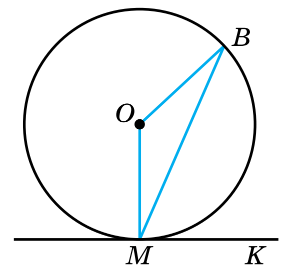
58. Радіуси двох кіл дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:
1) зовнішній дотик; 2) внутрішній дотик.

3

59. На малюнку 10 точка O – центр кола, $\angle COB = 40°$. Знайдіть $\angle CAB$.



Мал. 10



Мал. 11

60. На малюнку 10 точка O – центр кола, $\angle ACO = 21°$. Знайдіть $\angle COB$.

61. Пряма MK – дотична до кола, точка O – центр кола, точка M – точка дотику (мал. 11). Знайдіть $\angle BMK$, якщо $\angle BOM = 130°$.

62. Пряма MK – дотична до кола, точка O – центр кола, точка M – точка дотику (мал. 11). Знайдіть $\angle MOB$, якщо $\angle KMB = 70°$.

63. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 16 см, а їх радіуси відносяться як 5 : 3. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони мають:
1) внутрішній дотик; 2) зовнішній дотик.

4

64. Прямі AB і AC дотикаються до кола із центром O в точках B і C. Знайдіть BC, якщо $AB = 4$ см, $\angle OAC = 30°$.

65. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 2 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр цього трикутника.

66. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 4 см і 3 см, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр цього трикутника.

67. Рівнобедрений трикутник ABC з основою AB вписано в коло з центром у точці O, $\angle AOB = 100°$. Знайдіть кути трикутника ABC. Скільки розв'язків має задача?

ТЕМА 2

ЧОТИРИКУТНИКИ. ПАРАЛЕЛОГРАМ І ЙОГО ВИДИ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

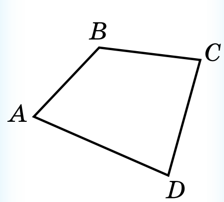
- **пригадаєте** поняття прямокутника та квадрата;
- **дізнаєтеся** про паралелограм і його властивості та ознаки; види паралелограма, їхні властивості та ознаки;
- **навчитеся** обґрунтовувати належність чотирикутника до певного виду, застосовувати вивчені означення та властивості до розв'язування задач.

§ 5. Чотирикутник, його елементи. Сума кутів чотирикутника

1. Чотирикутник і його елементи

Чотирикутником **називають фігуру, що складається із чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають. При цьому жодні три з цих точок не лежать на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають, не мають жодних інших спільних точок, крім даних.**

Будь-який чотирикутник обмежує певну частину площини, яка є внутрішньою областю чотирикутника.



Чотирикутник $ABCD$

Точки A, B, C, D – ***вершини чотирикутника.***

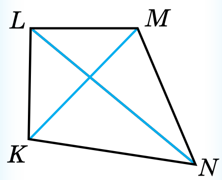
Вершини A і B – ***сусідні вершини*** – кінці однієї сторони чотирикутника;

вершини A і C – ***протилежні вершини*** – несусідні вершини чотирикутника.

Відрізки: AB, BC, CD, DA – ***сторони чотирикутника.***

Сторони AB і BC – ***сусідні***, або ***суміжні***, – мають спільну вершину;

сторони AB і CD – ***протилежні*** – не мають спільної вершини.



Чотирикутник $KLMN$

Кути KLM, LMN, MNK і NKL – ***кути чотирикутника.***

Кути K і L – ***сусідні кути*** – вершини цих кутів – сусідні вершини чотирикутника;

кути K і M – ***протилежні кути*** – вершини цих кутів – протилежні вершини чотирикутника.

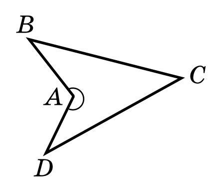
Відрізки KM і LN – ***діагоналі чотирикутника.***

$P_{KLMN} = KL + LM + MN + NK$ – ***периметр чотирикутника*** – сума довжин усіх його сторін.

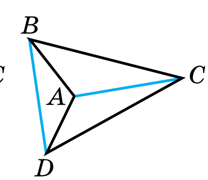
Зауважимо, що при позначенні чотирикутника букви, що стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам чотирикутника. Наприклад, чотирикутник $ABCD$ (мал. на с. 55) можна позначити ще так: $BCDA$, або $ADCB$, або $CBAD$ тощо.

2. Види чотирикутників

Один з кутів чотирикутника може бути більшим за розгорнутий. Наприклад, на малюнку 5.1 кут A чотирикутника $ABCD$ є більшим за розгорнутий. Такий чотирикутник називають ***неопуклим***. Якщо всі кути чотирикутника менші від 180°, то його називають ***опуклим***. Діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються (див. мал. вище), а неопуклого – не перетинаються (мал. 5.2).



Мал. 5.1



Мал. 5.2

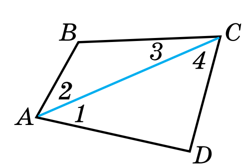
3. Сума кутів чотирикутника

Теорема (про суму кутів чотирикутника). **Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.**

Доведення. Розглянемо випадок, коли чотирикутник є опуклим. Нехай $ABCD$ – деякий чотирикутник.

1) Проведемо в ньому діагональ AC (мал. 5.3). Тоді $\angle A = \angle 1 + \angle 2$, $\angle C = \angle 3 + \angle 4$.

2) Враховуючи, що $\angle 2 + \angle B + \angle 3 = 180°$ (як сума кутів $\triangle ABC$), $\angle 1 + \angle D + \angle 4 = 180°$ (як сума кутів $\triangle ADC$), матимемо: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle 3 + \angle 4 + \angle D = (\angle 2 + \angle B + \angle 3) + (\angle 1 + \angle D + \angle 4) = 180° + 180° = 360°$. ■



Мал. 5.3

Переконайтеся у справедливості цієї теореми для неопуклого чотирикутника (мал. 5.2). Порівняйте кроки доведення цієї теореми для опуклого та неопуклого чотирикутника. Зробіть висновок.

Приклад. Знайти кути чотирикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 3 : 10 : 4 : 1. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?

Розв'язання. Нехай кути чотирикутника дорівнюють $3x$, $10x$, $4x$ і x. Маємо рівняння $3x + 10x + 4x + x = 360°$, звідки $x = 20°$. Отже, кути чотирикутника дорівнюють $3 \cdot 20° = 60°$, $10 \cdot 20° = 200°$, $4 \cdot 20° = 80°$ і $20°$. Оскільки один з кутів чотирикутника більший за $180°$, то цей чотирикутник – неопуклий.

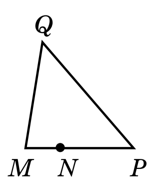
Відповідь: $60°$, $200°$, $80°$, $20°$; неопуклий.

Яку фігуру називають чотирикутником? ○ Що називають вершинами чотирикутника, сторонами чотирикутника? ○ Які вершини чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними? ○ Що таке діагоналі чотирикутника? ○ Які сторони чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними? ○ Що називають периметром чотирикутника? ○ Що називають кутами чотирикутника? ○ Які кути чотирикутника називають протилежними, а які – сусідніми? ○ Який чотирикутник називають неопуклим, а який – опуклим? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.

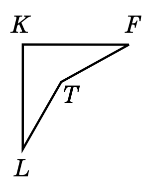
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

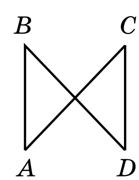
5.1. (*Усно.*) Які з фігур (мал. 5.4–5.7) є чотирикутниками? Назвіть опуклі та неопуклі чотирикутники.



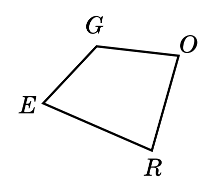
Мал. 5.4



Мал. 5.5



Мал. 5.6



Мал. 5.7

5.2. Назвіть пари протилежних сторін чотирикутника *EGOR* (мал. 5.7), пари сусідніх сторін. Назвіть пари сусідніх вершин цього чотирикутника, пари протилежних вершин.

5.3. Накресліть чотирикутник *KLMN*. Назвіть пари його протилежних сторін, сусідніх сторін, протилежних вершин, сусідніх вершин. Проведіть діагоналі цього чотирикутника.

5.4. Накресліть опуклий чотирикутник *ABCD* і неопуклий *PMLK*. Проведіть діагональ у кожному з них.

5.5. Чи існує чотирикутник з кутами:

1) $70°$, $90°$, $100°$ і $120°$; 2) $130°$, $60°$, $70°$ і $100°$?

5.6. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:

1) $140°$, $60°$, $90°$ і $70°$; 2) $120°$, $110°$, $80°$ і $60°$?

2

5.7. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють: 1) $150°$, $110°$ і $80°$; 2) $80°$, $60°$ і $30°$. Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?

5.8. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:

1) 20°, 70° і 80°; 2) 120°, 50° і 40°.

Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?

5.9. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 34 мм, 2,5 см, 0,4 дм і 0,07 м.

5.10. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 0,08 м, 0,7 дм, 6,3 см і 52 мм.

5.11. Чи можуть усі кути чотирикутника бути:

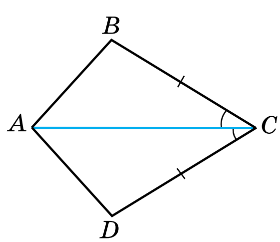
1) гострими; 2) прямими; 3) тупими?

5.12. Один з кутів чотирикутника дорівнює 120°, а інші – між собою рівні. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

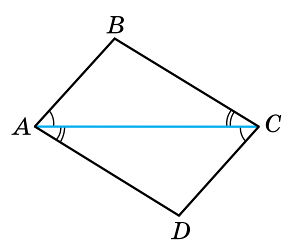
5.13. Периметр чотирикутника дорівнює 60 см, а одна з його сторін – 24 см. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, якщо вони між собою рівні.

5.14. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 5.8) $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

5.15. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 5.9) $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$. Доведіть, що $AB = CD$.



Мал. 5.8



Мал. 5.9

5.16. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 8 і 9, а периметр чотирикутника дорівнює 65 см.

5.17. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 7 і 8.

5.18. Знайдіть невідомі кути чотирикутника, якщо перший з них дорівнює 90°, другий і третій відносяться як 7 : 5, а четвертий дорівнює півсумі другого та третього.

5.19. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, периметр якого дорівнює 54 см, одна зі сторін 18 см, друга та третя відносяться як 7 : 3, а четверта дорівнює піврізниці другої та третьої.

5.20. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не більший за 90°.

5.21. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не менший від 90°.

5.22. Чи може кут чотирикутника бути більшим за суму інших його кутів?

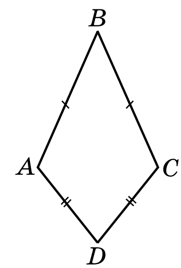
5.23. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 3 см, 4 см і кутом 50° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

5.24. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 5 см, 5 см, 4 см, 3 см і кутом 70° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

5.25. Опуклий чотирикутник називають *дельтоїдом*, якщо він має дві пари рівних сусідніх сторін (мал. 5.10). Доведіть, що:

1) діагональ BD ділить навпіл і кут B, і кут D;

2) діагоналі дельтоїда взаємно перпендикулярні.



Мал. 5.10

5.26. Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 29 см, периметр трикутника ADB – 20 см, а трикутника CDB – 21 см. Знайдіть довжину діагоналі BD.

Вправи для повторення

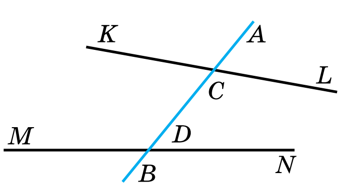
5.27. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 70°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

5.28. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює 70°. Скільки розв'язків має задача?

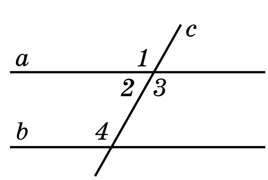
5.29. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а сума меншого катета й медіани, проведеної до гіпотенузи, – 10 см. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

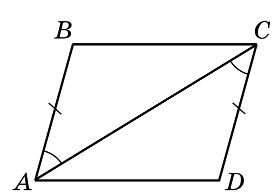
5.30. Пряма AB є січною для прямих KL і MN (мал. 5.11). Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів, внутрішніх різносторонніх кутів і відповідних кутів.



Мал. 5.11



Мал. 5.12



Мал. 5.13

5.31. Яким є взаємне розміщення прямих a і b (мал. 5.12), якщо:

1) $\angle 3 = 120°$, $\angle 4 = 121°$; 2) $\angle 2 + \angle 4 = 180°$; 3) $\angle 1 > \angle 4$;

4) $\angle 2 = 60°$, $\angle 4 = 119°$; 5) $\angle 1 = \angle 4 = 122°$; 6) $\angle 3 = \angle 4$?

5.32. 1) Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 5.13), якщо $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle ACD$.

2) Доведіть, що $BC = AD$ і $\angle BCA = \angle CAD$.

3) Чи паралельні прямі BC і AD?

Життєва математика

5.33. Восьмикласники Тарас і Аліса ведуть здоровий спосіб життя. Кілька разів на тиждень вони пробігають доріжкою навколо парку, який має форму прямокутника зі сторонами 150 м і 200 м. Хлопець пробігає доріжкою 4 рази, а дівчина – тричі. Швидкість бігу Тараса – 16 км/год, Аліси – 14 км/год. Хто витрачає більше часу на тренування та на скільки? Відповідь дайте з точністю до секунди.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

5.34. (*Всеукраїнська олімпіада з математики, 1964 р.*) Знайдіть найбільше значення n, для якого n точок можна розмістити на площині так, щоб кожні три з них були вершинами прямокутного трикутника.

§ 6. Паралелограм, його властивості й ознаки

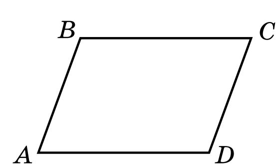
1. Означення паралелограма та його властивості

Паралелограмом **називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.**

На малюнку 6.1 зображено паралелограм $ABCD$, де $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Розглянемо *властивості паралелограма*.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°.

Справді, наприклад, кути A і B паралелограма $ABCD$ (мал. 6.1) є внутрішніми односторонніми кутами для паралельних прямих AD і BC та січної AB. Тому $\angle A + \angle B = 180°$. Аналогічно цю властивість можна довести для будь-якої іншої пари сусідніх кутів паралелограма.



Мал. 6.1

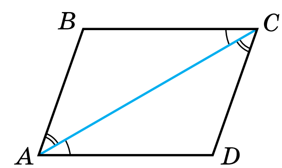
2. Паралелограм є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle A < 180°$, $\angle B < 180°$.
Аналогічно $\angle C < 180°$, $\angle D < 180°$.
Тому паралелограм – опуклий чотирикутник. ■

3. У паралелограмі протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.

Доведення. Розглянемо паралелограм $ABCD$ (мал. 6.2).

1) Діагональ AC розбиває його на два трикутники ABC і ADC. AC – спільна сторона цих трикутників і $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle CAB = \angle ACD$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині січною AC паралельних прямих AD і BC, AB і CD відповідно).



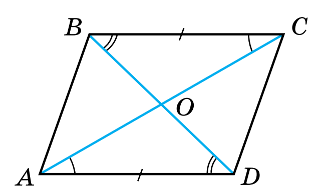
Мал. 6.2

2) Тоді $\triangle ABC = \triangle CDA$ (за стороною і двома прилеглими кутами). Отже, $AB = CD$, $BC = AD$ і $\angle B = \angle D$ (як відповідні елементи рівних трикутників).

3) Оскільки $\angle BAC + \angle CAD = \angle BCA + \angle DCA$, то $\angle BAD = \angle BCD$. ■

4. Периметр паралелограма $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
5. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Доведення. Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$ (мал. 6.3).



Мал. 6.3

1) $AD = BC$ (як протилежні сторони паралелограма), $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle BDA = \angle DBC$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січними AC і BD відповідно).

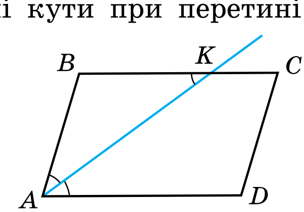
2) Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ (за стороною і двома прилеглими кутами).

3) Тоді $AO = OC$, $BO = OD$ (як відповідні сторони рівних трикутників). ■

Приклад 1. Дано: $ABCD$ – паралелограм, AK – бісектриса кута A, $BK = 5$ см, $KC = 3$ см (мал. 6.4). Знайти: P_{ABCD}.

Розв'язання. 1) $BC = BK + KC = 5 + 3 = 8$ (см).

2) $\angle KAD = \angle BKA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AK).



Мал. 6.4

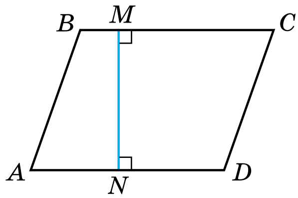
3) $\angle KAD = \angle KAB$ (за умовою), тоді $\angle BKA = \angle KAB$. Отже, за ознакою рівнобедреного трикутника: $\triangle ABK$ – рівнобедрений, $AB = BK = 5$ (см).

4) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(5 + 8) = 26$ (см).

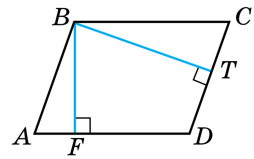
Відповідь: 26 см.

2. Означення висоти паралелограма

Висотою паралелограма **називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.**



Мал. 6.5



Мал. 6.6

На малюнку 6.5 MN – висота паралелограма; $MN \perp AD$, $MN \perp BC$.

З кожної вершини паралелограма можна провести дві висоти.

Наприклад, на малюнку 6.6 BF і BT – висоти паралелограма, проведені відповідно до сторін AD і CD.

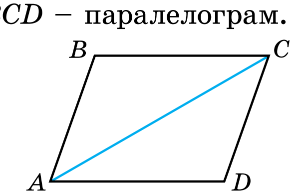
3. Ознаки паралелограма

Розглянемо *ознаки паралелограма*.

Теорема (ознаки паралелограма). **Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні й паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються й точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, – то чотирикутник є *паралелограмом*.**

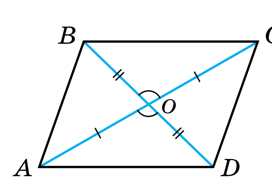
Доведення. 1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$ і $AD \parallel BC$ (мал. 6.7). Проведемо діагональ AC. Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AC). AC – спільна сторона, $AD = BC$ (за умовою). Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами й кутом між ними). Тоді $\angle ACD = \angle CAB$ (як відповідні). Але це різносторонні кути, що утворилися при перетині прямих AB і CD січною AC. Тому $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Отже, у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні. Тому $ABCD$ – паралелограм.

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$: $AD = BC$ і $AB = CD$ (мал. 6.7). Проведемо діагональ AC. Тоді $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за трьома сторонами). Тому $\angle ACD = \angle CAB$, а отже, $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Аналогічно доводимо, що $AD \parallel BC$. Отже, $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 6.7

3) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O і $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 6.8). $\angle AOD = \angle COB$ (як вертикальні). Тому $\triangle AOD = \triangle COB$ (за двома сторонами та кутом між ними). Звідси $AD = BC$. Аналогічно доводимо, що $AB = CD$. Зважаючи на п. 2 цієї теореми, приходимо до висновку, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 6.8

4) Нехай у паралелограмі $ABCD$: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (мал. 6.1). Оскільки $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$, $2(\angle A + \angle B) = 360°$; $\angle A + \angle B = 180°$. Але $\angle A$ і $\angle B$ – внутрішні односторонні кути для прямих AD і BC та січної AB. Тому $AD \parallel BC$ (за ознакою паралельності прямих). Аналогічно доводимо, що $AB \parallel CD$. Отже, $ABCD$ – паралелограм. ■

Приклад 2. У чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$. Довести, що $ABCD$ – паралелограм.

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник (мал. 6.7).
1) Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. AC – їхня спільна сторона, $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$ (за умовою).
2) Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами та кутом між ними).
3) Тому $AB = CD$. Але тоді в чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, тому він є паралелограмом. ■

Знайдіть кілька інших способів доведення цієї задачі.

А ще раніше...

Про деякі види чотирикутників (квадрати, прямокутники, рівнобічні та прямокутні трапеції) знали ще давньоєгипетські та вавилонські математики.

Термін «паралелограм» – грецького походження, вважають, що його ввів Евклід (близько 300 р. до н. е.). Про паралелограм і деякі його властивості знали учні школи Піфагора («піфагорійці»).

У «Началах» Евкліда доведено таку теорему: *у паралелограмі протилежні сторони рівні і протилежні кути рівні, а діагональ поділяє його навпіл*, але не згадується про те, що точка перетину діагоналей паралелограма ділить кожну з них навпіл.

Евклід також не згадує ані про прямокутник, ані про ромб.

Повну теорію паралелограмів було розроблено лише в кінці середньовіччя, а в підручниках вона з'явилася в XVII ст. Усі теореми та властивості паралелограма в цих підручниках ґрунтувалися на аксіомі паралельності Евкліда.

Термін «діагональ» (з грец. «діа» – «через», «гоніос» – «кут») – відрізок, що сполучає вершини кутів.

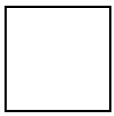
Евклід, як і більшість математиків того часу, для назви відрізка, що сполучає протилежні вершини чотирикутника, зокрема прямокутника, використовував інший термін – «діаметр». Це можна пояснити тим, що перші геометри свої міркування ґрунтували на вписаних у коло прямокутниках. У середні віки для назви згаданого відрізка використовували обидва терміни. Лише у XVIII ст. термін «діагональ» став загальновживаним.

Яку фігуру називають паралелограмом? ○ Сформулюйте й доведіть властивості паралелограма. ○ Що називають висотою паралелограма? ○ Сформулюйте й доведіть ознаки паралелограма.

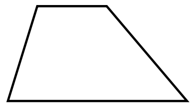
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

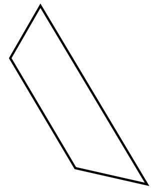
6.1. Серед чотирикутників, зображених на малюнках 6.9–6.14, укажіть паралелограми.



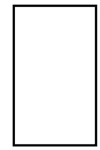
Мал. 6.9



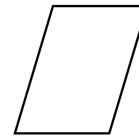
Мал. 6.10



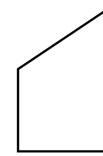
Мал. 6.11



Мал. 6.12



Мал. 6.13



Мал. 6.14

6.2. Накресліть паралелограм $ABCD$, у якого кут D тупий.

6.3. Накресліть паралелограм $KLMN$, у якого кут K гострий.

6.4. (*Усно*.) Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см. Яка довжина сторони, що їй протилежна?

6.5. Один з кутів паралелограма дорівнює 50°. Знайдіть інші його кути.

6.6. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 110°.

6.7. Знайдіть периметр паралелограма, у якого одна сторона дорівнює 12 см, а друга – на 3 см більша за неї.

6.8. Знайдіть периметр паралелограма, у якого одна сторона дорівнює 18 см, а друга – удвічі від неї менша.

6.9. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище видатної української математикині, науковиці, докторки фізико-математичних наук. Дізнайтеся з інтернету про її життєвий і творчий шлях.

Знайдіть кути A і B паралелограма $ABCD$, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A + \angle C = 120°$	І	К
кут A на 20° більший за кут B	Е	Ч
кут A утричі менший від кута B	В	О
$\angle A : \angle B = 3 : 2$	Н	Р

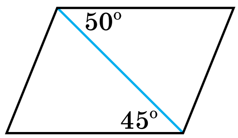
45°	60°	72°	80°	100°	108°	120°	135°

6.10. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо:
1) сума двох з них дорівнює 200°;
2) один з них на 40° менший від іншого;
3) один з них удвічі більший за інший;
4) градусні міри двох з них відносяться як 4 : 5.

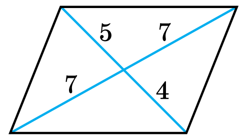
6.11. У паралелограмі $ABCD$ $\angle BAD = 80°$, $\angle ACD = 50°$. Знайдіть $\angle ACB$ і $\angle ABC$.

6.12. У паралелограмі $ABCD$ $\angle BAC = 35°$, $\angle BCA = 40°$. Знайдіть кути паралелограма.

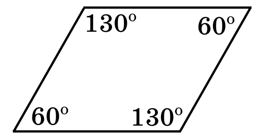
6.13. (*Усно.*) Які помилки допущено в зображенні паралелограма на малюнках 6.15–6.17?



Мал. 6.15



Мал. 6.16



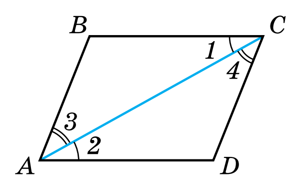
Мал. 6.17

6.14. Периметр паралелограма дорівнює 40 см. Знайдіть його сторони, якщо:
1) одна з них на 4 см більша за іншу;
2) вони відносяться як 3 : 7.

6.15. Периметр паралелограма дорівнює 36 дм. Знайдіть його сторони, якщо:
1) одна з них на 2 дм менша від іншої;
2) одна з них у 5 разів більша за іншу.

6.16. O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть діагональ AC, якщо $BD = 20$ см, $AB = 15$ см, а периметр трикутника AOB дорівнює 32 см.

6.17. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 6.18) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 6.18

6.18. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 6.18). Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

6.19. Побудуйте паралелограм за двома сторонами й кутом між ними.

6.20. Побудуйте паралелограм за двома сторонами та діагоналлю.

6.21. Бісектриса кута паралелограма перетинає його сторону під кутом 48°. Знайдіть кути паралелограма.

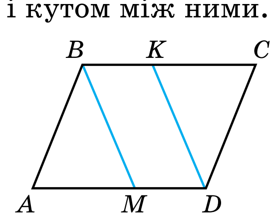
6.22. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A ділить сторону BC на відрізки $BM = 5$ см і $MC = 7$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

6.23. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 4$ см, $BC = 12$ см. Бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці P. Знайдіть BP і PC.

6.24. Побудуйте паралелограм за стороною і діагоналями.

6.25. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і кутом між ними.

6.26. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ (мал. 6.19) позначено точки M і K так, що $\angle ABM = \angle CDK$. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.



Мал. 6.19

6.27. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ (мал. 6.19) позначено точки M і K так, що $AM = KC$. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.

6.28. Доведіть, що бісектриси двох сусідніх кутів паралелограма взаємно перпендикулярні.

6.29. У паралелограмі гострий кут дорівнює 60°. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону на відрізки 3 см і 5 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайдіть периметр паралелограма.

6.30. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $\angle B = 120°$. Висота BK ділить сторону AD на два однакових відрізки. Знайдіть периметр паралелограма.

6.31. У паралелограмі $ABCD$ з вершини гострого кута A проведено висоти AL і AK, $\angle LAK = 140°$. Знайдіть кут C паралелограма.

6.32. У паралелограмі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BN, $\angle MBN = 70°$. Знайдіть кут D паралелограма.

4

6.33. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ ділить сторону AD на два відрізки AK і KD так, що $AK - KD = 1$ см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.

6.34. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на два відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 3 : 7$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 78 см.

6.35. Два кути паралелограма відносяться як 5 : 7. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) тупого кута; 2) гострого кута.

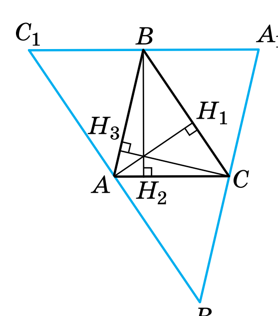
6.36. Один з кутів паралелограма на 12° більший за інший. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) гострого кута; 2) тупого кута.

6.37. Доведіть, що три висоти трикутника або їхні продовження перетинаються в одній точці (ортоцентрі трикутника).

Доведення. 1) Нехай AH_1, BH_2, CH_3 – висоти гострокутного трикутника ABC (мал. 6.20). Проведемо через вершини трикутника прямі, паралельні протилежним сторонам. Одержимо трикутник $A_1B_1C_1$. Чотирикутник ABA_1C – паралелограм (за побудовою). Тому $BA_1 = AC$. Аналогічно $ACBC_1$ – паралелограм і $C_1B = AC$. Отже, $C_1B = BA_1$, точка B – середина A_1C_1. Оскільки $BH_2 \perp AC$ і $AC \parallel A_1C_1$, то $BH_2 \perp A_1C_1$. Тому BH_2 належить серединному перпендикуляру до сторони A_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно AH_1 і CH_3 належать серединним перпендикулярам до двох інших сторін цього трикутника. Як відомо, серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці. Отже, AH_1, BH_2 і CH_3 перетинаються в одній точці.

2) Якщо $\triangle ABC$ – прямокутний, наприклад $\angle C = 90°$, то очевидно, що три висоти перетинаються в точці C.

3) Якщо $\triangle ABC$ – тупокутний, то продовження трьох висот трикутника перетинаються в одній точці. Доведення аналогічне до доведення у п. 1. ■



Мал. 6.20

Вправи для повторення

6.38. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює: 1) 20°; 2) 65°.

6.39. Дві сторони трикутника дорівнюють 7,2 см і 2,5 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

6.40. Зовнішній кут трикутника у 2 рази більший за один з внутрішніх кутів, не суміжний з ним. Доведіть, що трикутник є рівнобедреним.

6.41. Чи можна побудувати чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 4 см і 2 см та кутом 60° між рівними сторонами?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

6.42. Знайдіть периметр і площу прямокутника, сторони якого дорівнюють: 1) 5 см і 7 см; 2) 2 дм і 14 см.

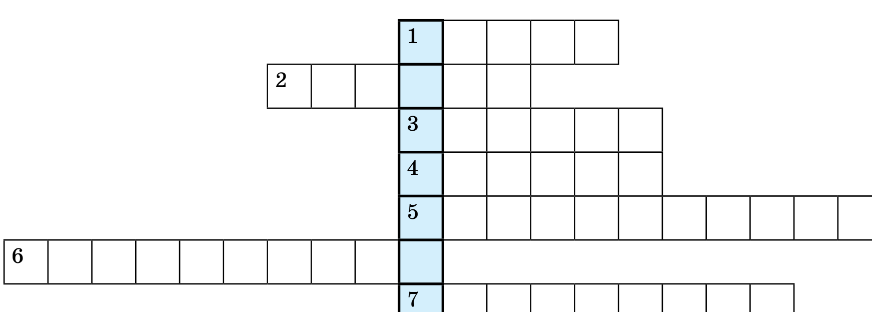
Життєва математика

6.43. 1) Фермерка зібрала урожай зерна та засипала його в засік, що має форму прямокутного паралелепіпеда 12 м завдовжки і 8 м завширшки. Зерно насипано в засік до висоти 2,5 м. Щоб дізнатися, скільки важить усе зерно, зважили ящик 0,5 м завдовжки, 0,5 м завширшки і 0,4 м заввишки, ущерть наповнений зерном. Скільки важило зерно в засіку, якщо зерно в ящику важило 80 кг?

2) Яким буде виторг фермерки від продажу всього зерна за гуртовою ціною, що складає 6000 грн за 1 т?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

6.44. *Видатні українці.* Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та інтернет) й отримаєте у виділеному стовпчику ім'я давньогрецького філософа, математика, релігійного та політичного діяча.



1. Видатний український наукознавець у галузі зварювальних процесів, доктор технічних наук, Герой України.

2. Українська поетеса, публіцистка, діячка ОУН, борчиня за незалежність України у XX столітті.

3. Український письменник, поет, публіцист, перекладач, учений, громадський і політичний діяч (1856–1916).

4. Видатний український лікар світового рівня, учений у галузях медицини, біокібернетики; його ім'ям названо Інститут серцево-судинної хірургії, який він очолював протягом двадцяти років.

5. Політичний діяч і публіцист, організатор української науки; Голова Центральної Ради Української Народної Республіки.

6. Українська народна художниця у жанрі «наївного мистецтва», національна легенда України.

7. Українська акторка театру та кіно. Народна артистка України, почесна громадянка Києва.

§ 7. Прямокутник і його властивості

1. Означення та властивості прямокутника

Прямокутником **називають паралелограм, у якого всі кути прямі (мал. 7.1).**

Оскільки прямокутник є паралелограмом, то він має всі *властивості паралелограма*.

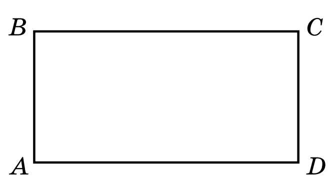
1. У прямокутнику протилежні сторони рівні.

2. Периметр прямокутника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.

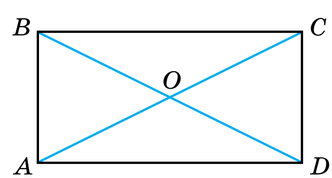
3. Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.

Крім цього, прямокутник має ще *властивості*.

4. Діагоналі прямокутника рівні.



Мал. 7.1



Мал. 7.2

Доведення. Нехай дано прямокутник $ABCD$ (мал. 7.2). $\triangle ACD = \triangle DBA$ (за двома катетами). Тому $AC = BD$. ■

5. Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.

Оскільки $AC = BD$, а $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 7.2), то очевидно, що $AO = BO = OC = OD$.

Приклад 1. Діагональ ділить кут прямокутника у відношенні 2 : 3. Знайти кут між діагоналями цього прямокутника.

Розв'язання. 1) Нехай $\angle ADO : \angle ODC = 2 : 3$ (мал. 7.2). Позначимо $\angle ADO = 2x$, $\angle ODC = 3x$. Тоді $2x + 3x = 90°$, $x = 18°$. Тому $\angle ADO = 2 \cdot 18 = 36°$; $\angle ODC = 3 \cdot 18 = 54°$.
2) $\triangle OCD$ – рівнобедрений (бо $DO = OC$). Тому $\angle OCD = \angle ODC = 54°$. У $\triangle OCD$: $\angle COD = 180° - 2 \cdot 54° = 72°$. Отже, кут між діагоналями цього прямокутника дорівнює $72°$.

Відповідь: $72°$.

2. Ознаки прямокутника

Розглянемо *ознаки прямокутника*.

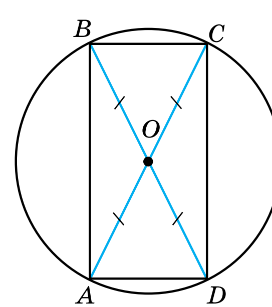
Т Теорема (ознаки прямокутника). **Якщо в паралелограма: 1) усі кути рівні, або 2) один кут прямий, або 3) діагоналі рівні, – то паралелограм є *прямокутником*.**

Доведення. 1) Оскільки всі кути паралелограма рівні, а їхня сума дорівнює $360°$, то кожний з них дорівнює $360° : 4 = 90°$. А тому паралелограм є прямокутником.

2) Нехай кут A паралелограма $ABCD$ прямий (мал. 7.1). Тоді $\angle C = \angle A = 90°$, $\angle B = \angle D = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$. Отже, усі кути паралелограма прямі, а тому він є прямокутником.

3) Нехай у паралелограмі $ABCD$ діагоналі AC і BD рівні (мал. 7.2). AD – спільна сторона трикутників ABD і DCA. Отже, $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за трьома сторонами). Тому $\angle BAD = \angle CDA$. Але ж $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BCD = \angle BAD$. У паралелограмі всі кути рівні між собою. Тому він є прямокутником (за п. 1 цієї теореми). ■

Приклад 2. У колі із центром O проведено діаметри AC і BD (мал. 7.3). Визначити вид чотирикутника $ABCD$.



Мал. 7.3

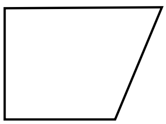
Розв'язання. 1) Оскільки $AO = OC$, $BO = OD$ (як радіуси), то, за ознакою паралелограма, маємо, що $ABCD$ – паралелограм.
2) Оскільки $AC = BD$ (як діаметри), то, використовуючи ознаку прямокутника, маємо, що паралелограм $ABCD$ є прямокутником.

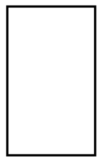
Відповідь: прямокутник.

? Яку фігуру називають прямокутником?
Сформулюйте й доведіть властивості прямокутника.
Сформулюйте й доведіть ознаки прямокутника.

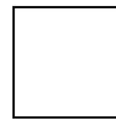
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

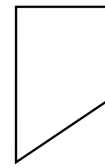
7.1. Які із чотирикутників, зображених на малюнках 7.4–7.8, є прямокутниками?


Мал. 7.4


Мал. 7.5


Мал. 7.6


Мал. 7.7


Мал. 7.8

7.2. У прямокутнику $ABCD$ діагональ AC дорівнює 5 см. Яка довжина діагоналі BD?

7.3. Сторони прямокутника дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть його периметр.

7.4. Знайдіть периметр прямокутника, сторони якого дорівнюють 3 см і 4 см.

7.5. Якщо чотирикутник є прямокутником, то його діагоналі між собою рівні. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклад.

7.6. Сторона BC прямокутника $ABCD$ дорівнює 8 см, а діагональ BD – 12 см. Знайдіть периметр трикутника BOC, де O – точка перетину діагоналей прямокутника.

7.7. O – точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. $AC = 12$ см, периметр трикутника AOB дорівнює 16 см. Знайдіть сторону AB.

7.8. (*Усно.*) Що можна сказати про вид паралелограма, коли відомо, що:
1) жоден з його кутів не є гострим;
2) жоден з його кутів не є тупим;
3) він має три рівних між собою кути?

7.9. Доведіть, що коли в чотирикутнику три кути прямі, то цей чотирикутник – прямокутник.

7.10. Доведіть, що коли в чотирикутнику всі кути рівні, то цей чотирикутник – прямокутник.

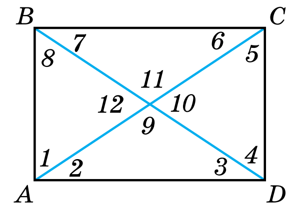
7.11. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище першої олімпійської чемпіонки незалежної України.

Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 40 см. Знайдіть сторони AB і BC цього прямокутника, якщо:	AB	BC
AB на 2 см більша за BC	А	Ю
$AB : BC = 2 : 3$	Л	Б

12 см	11 см	9 см	8 см

7.12. Периметр прямокутника дорівнює 50 см. Знайдіть його сторони, коли відомо, що:
1) одна з них на 5 см менша від іншої;
2) сторони відносяться як 4 : 1.

7.13. (*Усно.*) На малюнку 7.9 зображено прямокутник $ABCD$. Знайдіть усі рівні між собою кути.



Мал. 7.9

7.14. Знайдіть за малюнком 7.9:
1) $\angle 3$, якщо $\angle 8 = 50°$;
2) $\angle 2$, якщо $\angle 10 = 41°$.

7.15. Знайдіть за малюнком 7.9:
1) $\angle 5$, якщо $\angle 2 = 40°$;
2) $\angle 12$, якщо $\angle 3 = 32°$.

7.16. Діагональ прямокутника ділить кут прямокутника на два кути, один з яких на 20° більший за інший. Знайдіть ці кути.

3

7.17. Доведіть, що навколо прямокутника можна описати коло.

7.18. Знайдіть кут між меншою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він:
1) на 15° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони;
2) на 50° менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони.

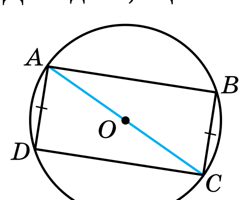
7.19. Знайдіть кут між більшою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він:
1) на 90° менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони;
2) на 40° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони.

7.20. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, E – середина AB, $\angle CAB = 70°$. Знайдіть $\angle DOE$.

7.21. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. OP – бісектриса трикутника AOB, $\angle DOP = 130°$. Знайдіть $\angle CAB$.

7.22. У паралелограмі $ABCD$ з гострим кутом A діагоналі перетинаються в точці O. На відрізках AO і OC позначено точки M і N так, що $OM = OB$, $ON = OD$. Доведіть, що $BMDN$ – прямокутник.

7.23. Точки B і D належать колу із центром O, AC – діаметр кола, $AD = BC$ (мал. 7.10). Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.



Мал. 7.10

7.24. Перпендикуляри, проведені з точки перетину діагоналей прямокутника до двох його сусідніх сторін, дорівнюють 4 см і 9 см. Визначте периметр прямокутника.

7.25. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його більша сторона дорівнює 20 см.

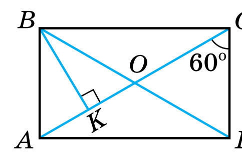
7.26. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює 8 дм.

4

7.27. На малюнку 7.11 $ABCD$ – прямокутник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60°$.

1) $OK = a$. Знайдіть DB і AB;

2) $AC = m$. Знайдіть AK і CD.



Мал. 7.11

7.28. На малюнку 7.11 $ABCD$ – прямокутник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60°$, $AB = b$. Знайдіть BD і OK.

7.29. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 35$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L лежать на гіпотенузі трикутника, а точки M і N – на катетах. $KL : KN = 3 : 2$. Знайдіть периметр прямокутника.

7.30. У рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 20 см, вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут, а вершина протилежного кута належить гіпотенузі. Знайдіть периметр прямокутника.

Вправи для повторення

7.31. З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ проведено висоту BK. Знайдіть кути паралелограма, якщо $BK = \frac{1}{2}AB$.

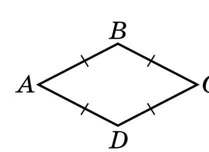
7.32. 1) Градусна міра одного з кутів трикутника є середнім арифметичним двох інших кутів. Знайдіть цей кут.

2) Градусна міра одного з кутів чотирикутника є середнім арифметичним трьох інших кутів. Знайдіть цей кут.

7.33. Через точку P, що належить внутрішній області кута ABC, проведіть пряму так, щоб її відрізок, який лежить між сторонами кута, ділився точкою P навпіл.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

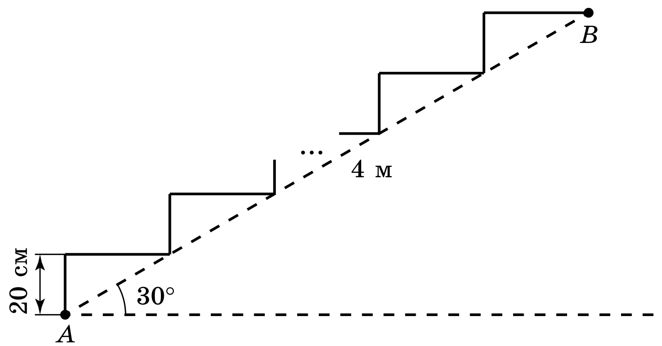
7.34. Дано: $AB = BC = CD = DA$ (мал. 7.12).
Довести: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.



Мал. 7.12

Життєва математика

7.35. Сходовий марш сполучає точки A і B, відстань між якими – 4 м (мал. 7.13). Скільки сходинок на сходовому марші, якщо кут нахилу сходів дорівнює $30°$, висота сходинки – 20 см?



Мал. 7.13

Цікаві задачі – поміркуй одначе

7.36. Чи можна розрізати квадрат розміром 6×6 на прямокутники розміром 1×4?

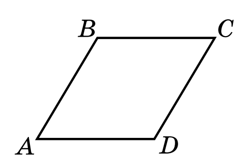
§ 8. Ромб і його властивості

1. Означення ромба та його властивості

Ромбом **називають паралелограм, у якого всі сторони рівні** (мал. 8.1).

Оскільки ромб є паралелограмом, то він має всі *властивості паралелограма*.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба дорівнює $180°$.
2. У ромба протилежні кути рівні.
3. Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.
4. Периметр ромба $P_{ABCD} = 4AB$.



Мал. 8.1

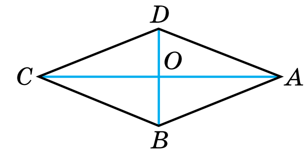
Крім того, ромб має ще таку *властивість*.

5. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

Доведення. Нехай AC і BD – діагоналі ромба $ABCD$ (мал. 8.2), O – точка перетину діагоналей.

1) Оскільки $AB = AD$ і $DO = OB$, то AO – медіана рівнобедреного трикутника ABD, проведена до основи BD. Тому AO є також висотою і бісектрисою трикутника ABD.

2) Отже, $AC \perp BD$ і $\angle DAO = \angle BAO$. ■



Мал. 8.2

Аналогічно можна довести, що діагональ AC ділить навпіл кут DCB, а діагональ BD ділить навпіл кути ABC і ADC.

Приклад 1. Кут між висотою і діагоналлю ромба, проведеними з однієї вершини, дорівнює 28°. Знайти кути ромба.

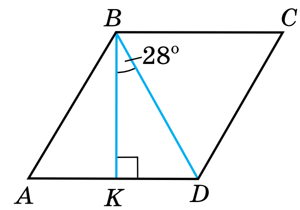
Розв'язання. BD – діагональ ромба $ABCD$, а BK – його висота (мал. 8.3), $\angle KBD = 28°$ (за умовою).

1) У $\triangle BKD$ $\angle BDK = 90° - 28° = 62°$.

2) Оскільки DB ділить кут $\angle ADC$ навпіл, то $\angle ADC = 2 \cdot 62° = 124°$.

3) Тоді $\angle ABC = \angle ADC = 124°$; $\angle A = \angle C = 180° - 124° = 56°$.

Відповідь: 124°, 56°, 124°, 56°.



Мал. 8.3

2. Ознаки ромба

Розглянемо *ознаки ромба.*

Т Теорема (ознаки ромба). **Якщо в паралелограмі: 1) дві сусідні сторони рівні, або 2) діагоналі перетинаються під прямим кутом, або 3) діагональ ділить навпіл кути паралелограма, – то паралелограм є *ромбом*.**

Доведення. 1) Нехай $ABCD$ – паралелограм (див. мал. 8.2). Оскільки $AB = AD$ (за умовою) і $AB = CD$, $AD = BC$ (за властивістю паралелограма), то $AB = AD = BC = CD$. Отже, $ABCD$ – ромб.

2) Нехай $AC \perp BD$ (мал. 8.2). Оскільки $OB = OD$ (за властивістю паралелограма), то $\triangle AOB = \triangle AOD$ (за двома катетами). Тому $AB = AD$. За п. 1 цієї теореми $ABCD$ – ромб.

3) Діагональ DB ділить навпіл кут D паралелограма $ABCD$, тобто $\angle ADB = \angle BDC$ (за умовою). Оскільки паралельні прямі AB і DC перетнули січною DB, то $\angle ABD = \angle BDC$ (як внутрішні різносторонні). Отже, $\angle ADB = \angle ABD$. Тому, за ознакою рівнобедреного трикутника, $\triangle ABD$ – рівнобедрений і $AD = AB$. За п. 1 цієї теореми $ABCD$ – ромб. ■

Приклад 2. Довести, що коли в чотирикутнику всі сторони рівні, то цей чотирикутник – ромб.

Доведення. Нехай $AB = BC = CD = DA$ (див. мал. 8.1).

1) Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, то, за ознакою паралелограма, маємо, що $ABCD$ – паралелограм.

2) У паралелограмі $ABCD$ сусідні сторони рівні. Тому $ABCD$ – ромб (за ознакою ромба). ■

А ще раніше...

Слово «ромб» грецького походження, у давнину воно означало тіло, що обертається, – веретено, дзиґу. Ромб тоді пов'язували з перерізом веретена, на яке намотано нитки.

У «Началах» Евкліда термін «ромб» трапляється лише один раз, а властивості ромба Евклід узагалі не розглянув.

* * *

В українській вишивці ромб – один із десяти головних символів, які наші предки споконвіку вишивали на своїх сорочках.

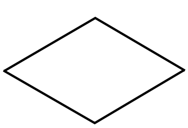
У давніх віруваннях ромб – це символ родючості, адже за формою він нагадує два трикутники, чоловічого та жіночого начал.

Ромб (із крапкою посередині) є символом засіяного поля, означає багатство, достаток і добробут. Головний реманент українців-хліборобів – борона, якою саме й готували поле до сівби, має форму ромба. Ромбоподібні узори вишивали на весільних рушниках і на весільному одязі. Одяг з вишитими ромбами молода жінка при надії мала носити аж до народження дитини. Адже цей символ слугував сильним оберегом.

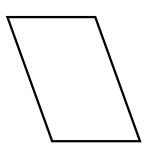
Яку фігуру називають ромбом? Сформулюйте й доведіть властивості ромба. Сформулюйте й доведіть ознаки ромба.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

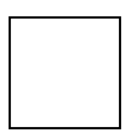
1 **8.1.** (*Усно.*) Які із чотирикутників на малюнках 8.4–8.8 є ромбами?



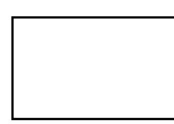
Мал. 8.4



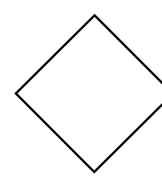
Мал. 8.5



Мал. 8.6



Мал. 8.7



Мал. 8.8

8.2. Накресліть ромб $ABCD$, у якого кут B тупий.

8.3. Накресліть ромб $ABCD$, у якого кут A гострий.

8.4. Периметр ромба дорівнює 24 см. Знайдіть його сторону.

8.5. Сторона ромба дорівнює 4 дм. Знайдіть його периметр.

8.6. Гострий кут ромба дорівнює 40°. Який кут утворює діагональ, проведена із цього кута, зі стороною ромба?

8.7. Тупий кут ромба дорівнює 130°. Який кут утворює діагональ, проведена із цього кута, зі стороною ромба?

8.8. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 60°. Знайдіть тупий кут ромба.

8.9. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 20°. Знайдіть гострий кут ромба.

2

8.10. У ромбі $ABCD$ кут A дорівнює 36°. Знайдіть кути трикутника AOB, де O – точка перетину діагоналей.

8.11. O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$, $\angle B = 118°$. Знайдіть кути трикутника BOC.

8.12. Сума довжин трьох сторін ромба дорівнює 21 см. Знайдіть його периметр.

8.13. Сума довжин двох сторін ромба дорівнює 16 см. Знайдіть периметр ромба.

8.14. $ABCD$ – ромб, $\angle 2 = 66°$ (мал. 8.9). Знайдіть $\angle 1$.

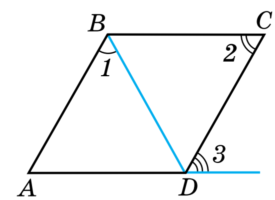
8.15. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 58°$ (мал. 8.9). Знайдіть $\angle 2$.

8.16. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 55°$ (мал. 8.9). Знайдіть $\angle 3$.

8.17. $ABCD$ – ромб, $\angle 3 = 50°$ (мал. 8.9). Знайдіть $\angle 1$.

8.18. У ромбі $ABCD$ $AB = BD$. Знайдіть кути ромба.

8.19. (*Усно.*) Які спільні властивості мають ромб і паралелограм?



Мал. 8.9

8.20. Знайдіть кути ромба, якщо:
1) сума двох його кутів дорівнює 80°;
2) один з них на 20° більший за інший.

8.21. Знайдіть кути ромба, якщо:
1) сума двох його кутів дорівнює 210°;
2) один з них на 50° менший від іншого.

8.22. (*Усно.*) Чи правильне твердження:
1) якщо в чотирикутнику діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом;
2) якщо в чотирикутнику діагоналі не перпендикулярні, то він не може бути ромбом;
3) існує ромб, який є прямокутником;
4) жоден прямокутник не є ромбом?

3

8.23. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 10°.

8.24. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться як 2 : 3.

8.25. Побудуйте ромб:
1) за стороною і діагоналлю; 2) за діагоналями.

8.26. Побудуйте ромб за стороною і кутом.

8.27. У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BN. Доведіть, що $BM = BN$.

8.28. У ромбі $ABCD$ з вершин тупих кутів проведено висоти BK і DL. Доведіть, що $BK = DL$.

8.29. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут 110°. Знайдіть кути ромба.

8.30. Висоти, проведені з вершини тупого кута ромба, утворюють між собою кут 50°. Знайдіть кути ромба.

4 **8.31.** Діагональ ромба, проведена з вершини тупого кута, утворює з висотою, проведеною із цієї самої вершини, кут 30°. Менша діагональ ромба дорівнює a см. Знайдіть:

1) кути ромба; 2) периметр ромба.

8.32. У ромбі висота, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Знайдіть:

1) кути ромба;
2) периметр ромба, якщо його менша діагональ дорівнює b см.

8.33. На діагоналі AC ромба $ABCD$ позначено точки M і N такі, що $AM = CN$. Доведіть, що чотирикутник $DMBN$ є ромбом (розгляньте два випадки розміщення точок M і N).

8.34. Доведіть, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба.

8.35. У рівносторонній трикутник ABC вписано ромб $AMNK$ так, що трикутник і ромб мають спільний кут A, а точка N лежить на стороні BC. Знайдіть периметр трикутника, якщо периметр ромба дорівнює 40 см.

Вправи для повторення

8.36. Сторони паралелограма відносяться як 5 : 2. Знайдіть периметр паралелограма, якщо різниця цих сторін дорівнює 15 см.

8.37. Один з кутів трикутника дорівнює сумі двох інших. Знайдіть найбільшу сторону цього трикутника, якщо медіана, проведена до неї, дорівнює 5 см.

8.38. Периметр трикутника дорівнює $2p$ см. Чи може одна з його сторін дорівнювати:

1) $(p - 1)$ см; 2) p см; 3) $(p + 1)$ см?

8.39. У чотирикутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає бісектриси кутів B і D під прямим кутом. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

8.40. Знайдіть периметр і площу квадрата, сторона якого дорівнює:

1) 5 см; 2) 2,1 дм; 3) $\frac{3}{4}$ м; 4) $1\frac{1}{2}$ дм.

Життєва математика

8.41. Кімната в будинку Тимощуків має 5 м завдовжки, 3,5 м завширшки і 3 м заввишки. Площа дверей і вікон становить $\frac{1}{6}$ частину від усієї площі стін.

1) Скільки рулонів шпалер потрібно, щоб обклеїти цю кімнату, якщо довжина рулону становить 10 м, а ширина – 0,5 м?

2) Скільки коштів витратить родина на шпалери, якщо один рулон коштує 180 грн? Враховуйте, якщо купувати шпалери на суму понад 1000 грн, магазин робить знижку 5 %.

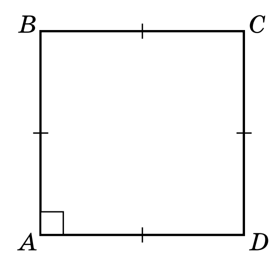
Цікаві задачі – поміркуй одначе

8.42. (*Київська міська олімпіада, 1987 р.*) Вписане у трикутник ABC коло дотикається до сторони BC у точці K. Доведіть, що відрізок AK довший за діаметр кола.

§ 9. Квадрат і його властивості

1. Означення та властивості квадрата

Квадратом **називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.**

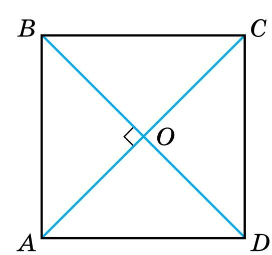


Мал. 9.1

На малюнку 9.1 зображено квадрат $ABCD$. Прямокутник є паралелограмом, тому і квадрат – паралелограм, у якого всі сторони рівні, тобто він є і ромбом. Отже, квадрат має властивості прямокутника та ромба.

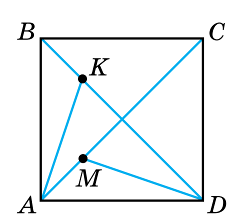
Сформулюємо *властивості квадрата*.

1. **Усі кути квадрата прямі** (мал. 9.2).
2. **Периметр квадрата $P_{ABCD} = 4AB$.**
3. **Діагоналі квадрата між собою рівні.**
4. **Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл.**
5. **Діагоналі квадрата ділять його кути навпіл, тобто утворюють кути 45° зі сторонами квадрата.**
6. **Точка перетину діагоналей квадрата рівновіддалена від усіх його вершин:**
$$AO = BO = CO = DO.$$



Мал. 9.2

Приклад 1. Точки K і M належать відповідно діагоналям BD і AC квадрата $ABCD$, причому $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$. Доведіть, що $\triangle ADM = \triangle BAK$ (мал. 9.3).



Мал. 9.3

Доведення. 1) $\angle MAD = \angle ABK = 45°$, $AD = AB$ (як сторони квадрата).

2) Оскільки $AC = BD$ (як діагоналі квадрата) і $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$, то $AM = BK$.

3) Тому $\triangle ADM = \triangle BAK$ (за двома сторонами та кутом між ними). ■

2. Ознаки квадрата

Розглянемо *ознаки квадрата*.

Т Теорема (ознаки квадрата). **1) Якщо діагоналі прямокутника взаємно перпендикулярні, то він є квадратом.**
2) Якщо діагоналі ромба між собою рівні, то він є квадратом.

Доведення. 1) Прямокутник є паралелограмом, а паралелограм із взаємно перпендикулярними діагоналями є ромбом. Отже, у заданого прямокутника всі сторони рівні, а тому він є квадратом.

2) Ромб є паралелограмом, а паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником. Отже, у розглядуваного ромба всі кути прямі, а тому він є квадратом. ■

Приклад 2. Доведіть, що коли в чотирикутнику всі сторони рівні й усі кути рівні, то цей чотирикутник – квадрат.

Доведення. 1) Оскільки в чотирикутнику всі кути рівні, то, за ознакою прямокутника, він є прямокутником.

2) Оскільки у прямокутника всі сторони рівні, то він є квадратом. ■

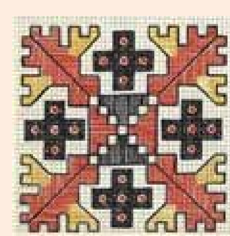
А ще раніше...

Термін «квадрат» походить від латинського *quadratum* (*quadrate* – зробити чотирикутним).

Відомий історик математики Д. Д. Мордухай-Болтовський (1876–1952) писав: «Першим чотирикутником, з яким познайомилася геометрія, був квадрат».

* * *

Часто в українській вишивці трапляється й квадрат.



Наші предки ототожнювали квадрат із земним началом, із символом родючості. Квадрат популярний надто у чоловічих вишиванках, перехрещений квадрат означає енергію землі.

Це символ магічного числа 4, що позначає матерію. Символізує чотири пори року, сторони світу, частини доби, життєві цикли. Це символ Сонця, Творця, чоловічого начала. Квадрат є символом простору, ізольованого від лихих помислів. Він мав захищати господарів від різних зурочень.

? Яку фігуру називають квадратом? ○ Сформулюйте властивості квадрата. ○ Сформулюйте й доведіть ознаки квадрата.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

9.1. Периметр квадрата дорівнює 24 см. Знайдіть його сторону.

9.2. Сторона квадрата дорівнює 5 дм. Знайдіть його периметр.

9.3. (*Усно*.) На малюнку 9.2 зображено квадрат *ABCD*. Назвіть рівні між собою відрізки на цьому малюнку.

9.4. Якщо чотирикутник є квадратом, то його діагоналі рівні та взаємно перпендикулярні. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклад.

9.5. Точка перетину діагоналей квадрата міститься на відстані 3 см від однієї з його вершин. Знайдіть суму довжин діагоналей цього квадрата.

9.6. Сума довжин діагоналей квадрата дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до однієї з його вершин.

9.7. Сума довжин двох сторін квадрата дорівнює 12 см. Знайдіть периметр квадрата.

9.8. Сума довжин трьох сторін квадрата дорівнює 15 дм. Знайдіть периметр квадрата.

9.9. (*Усно.*) Які спільні властивості мають квадрат і ромб?

9.10. (*Усно.*) Які спільні властивості мають квадрат і прямокутник?

9.11. Різниця між периметром квадрата і його стороною дорівнює 18 см. Знайдіть сторону квадрата та його периметр.

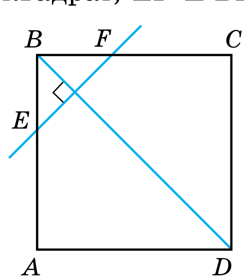
9.12. Сусідні сторони прямокутника рівні. Доведіть, що він є квадратом.

9.13. Один з кутів ромба – прямий. Доведіть, що цей ромб є квадратом.

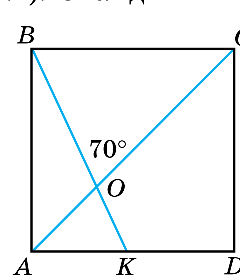
9.14. (*Усно.*) Чи правильне твердження:

1) кожний квадрат є прямокутником;
2) існує квадрат, який не є ромбом;
3) кожний ромб є квадратом;
4) кожний квадрат є ромбом;
5) будь-який прямокутник є квадратом;
6) відношення периметра квадрата до його сторони є сталим для всіх квадратів?

9.15. $ABCD$ – квадрат, $EF \perp BD$ (мал. 9.4). Знайдіть $\angle BFE$.



Мал. 9.4



Мал. 9.5

9.16. $ABCD$ – квадрат, $\angle BOC = 70°$ (мал. 9.5). Знайдіть $\angle OKA$.

9.17. Побудуйте квадрат за його:

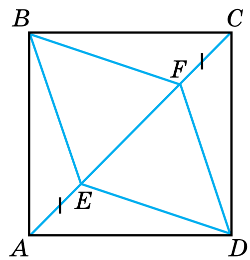
1) периметром;
2) діагоналлю.

9.18. Побудуйте квадрат за сумою його діагоналей.

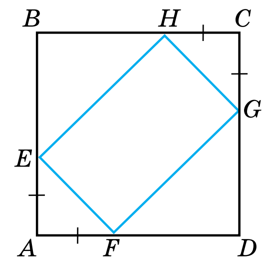
9.19. Точка перетину діагоналей квадрата віддалена від його сторони на 3 см. Знайдіть периметр квадрата.

9.20. Периметр квадрата дорівнює 32 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторін.

9.21. $ABCD$ – квадрат, $AE = FC$ (мал. 9.6). Доведіть, що $BEDF$ – ромб.



Мал. 9.6



Мал. 9.7

9.22. $ABCD$ – квадрат, $AE = AF = CG = CH$ (мал. 9.7). Доведіть, що $EFGH$ – прямокутник.

9.23. До кола із центром у точці O з точки A проведено дві взаємно перпендикулярні дотичні AB і AC, B і C – точки дотику. Доведіть, що $ABOC$ – квадрат.

4

9.24. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано квадрат $CMNK$ так, що прямий кут у них спільний, а точка N належить стороні AB. Катет трикутника дорівнює b см. Знайдіть периметр квадрата.

9.25. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано квадрат $KMNL$ так, що точки K і M лежать на гіпотенузі трикутника, а точки L і N – на катетах AC і BC відповідно. Периметр квадрата дорівнює 12 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

9.26. На сторонах квадрата зовні побудовано рівносторонні трикутники. Доведіть, що вершини трикутників, які не є вершинами заданого квадрата, є вершинами іншого квадрата.

Вправи для повторення

9.27. У ромбі $ABCD$ діагональ утворює з однією зі сторін кут 30°. Знайдіть кути ромба.

9.28. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 3 : 4 : 10$. Знайдіть кути чотирикутника. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?

9.29. Бісектриса кута B прямокутника $ABCD$ ділить сторону AD на відрізки AK і KD так, що $AK : KD = 3 : 5$. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 110 см.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

9.30. Виконайте множення:

1) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16}$; 2) $\frac{3}{7} \cdot 1\frac{5}{9}$; 3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{4}$; 4) $7\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{2}$.

9.31. Обчисліть: 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$.

Життєва математика

9.32. Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги у класній кімнаті має бути не менше ніж 0,2. Чи дотримано цих норм у класній кімнаті, довжина якої – 12 м, а ширина становить 35 % від довжини, якщо у класі три вікна розміром 2 м × 1,7 м?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

9.33. О 12-й годині годинна та хвилинна стрілки збігаються. Через яку найменшу кількість хвилин стрілки знову збіжаться?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2 (§§ 5–9)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Укажіть відрізок, що є діагоналлю чотирикутника $ABCD$.

А. AB **Б.** BD **В.** BC **Г.** AD

2. Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 35°.

А. 125° **Б.** 135° **В.** 145° **Г.** 155°

3. Знайдіть сторону квадрата, якщо його периметр дорівнює 36 см.

А. 4 см **Б.** 6 см **В.** 9 см **Г.** 12 см

2

4. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а одна з його сторін на 2 см більша за іншу. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

А. 5 см **Б.** 6 см **В.** 7 см **Г.** 8 см

5. $ABCD$ – ромб, $\angle A = 50°$ (мал. 1). Знайдіть $\angle ABD$.

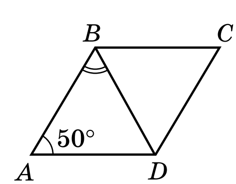
А. 55° **Б.** 50° **В.** 75° **Г.** 65°

6. Укажіть правильне твердження:

А. Якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то він є ромбом

Б. Відношення периметра ромба до його сторони є сталим для всіх ромбів

В. Якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником



Мал. 1

Г. Відношення периметра прямокутника, який не є квадратом, до його найбільшої сторони є незмінним для всіх прямокутників

3 **7.** Знайдіть найбільший кут чотирикутника, у якого градусні міри кутів пропорційні числам 2; 3; 5 і 8.

А. 120° **Б.** 130° **В.** 150° **Г.** 160°

8. Висоти, які проведено з вершини тупого кута паралелограма, утворюють між собою кут 30°. Знайдіть тупий кут паралелограма.

А. 120° **Б.** 130° **В.** 150° **Г.** 160°

9. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 40°.

А. 25° **Б.** 30° **В.** 50° **Г.** 60°

4 **10.** Бісектриса кута D паралелограма $ABCD$ ділить сторону AB на відрізки AK і KB так, що $AK : KB = 1 : 3$. Знайдіть AB, якщо периметр паралелограма дорівнює 60 см.

А. 26 см **Б.** 24 см **В.** 20 см **Г.** 15 см

11. З вершини тупого кута A ромба $ABCD$ проведено висоту AK. $\angle CAK = 30°$, $AC = 6$ см. Знайдіть периметр ромба.

А. 18 см **Б.** 24 см **В.** 30 см **Г.** 36 см

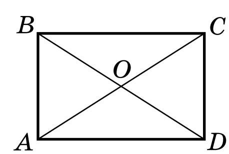
12. У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$, $AC = BC$) вписано квадрат $KLMN$ так, що $K \in AB$, $L \in AB$, $M \in CB$, $N \in AC$. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AB = 12$ см.

А. 24 см **Б.** 20 см **В.** 12 см **Г.** 16 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O (мал. 2). Кут ABO на 18° менший від кута AOB. Установіть відповідність між кутами (1–3) та їхніми градусними мірами (А–Г).

Кути	*Градусні міри кутів*
1. $\angle ABO$	**А.** 36°
2. $\angle AOB$	**Б.** 48°
3. $\angle OAD$	**В.** 54°
	Г. 72°



Мал. 2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 5–9

1 **1.** Накресліть чотирикутник $MNPL$ і проведіть його діагоналі.

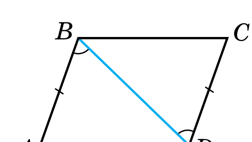
2. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 80°.

3. Знайдіть периметр квадрата, якщо його сторона дорівнює 7 см.

2 **4.** Периметр прямокутника дорівнює 18 см. Знайдіть його сторони, якщо одна з них на 1 см більша за іншу.

5. $ABCD$ – ромб, $\angle ABD = 50°$. Знайдіть кути ромба.

6. На малюнку 1 $\angle ABD = \angle BDC$, $AB = DC$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 1

3 **7.** Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 4, 6. Опуклим чи неопуклим він є?

8. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут 120°. Знайдіть кути ромба.

4 **9.** Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 4 : 3$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

Додаткові завдання

4 **10.** У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 23$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L належать гіпотенузі трикутника, а точки M і N – катетам. Сторона KL прямокутника на 2 см більша за сторону LM. Знайдіть периметр прямокутника.

11. З вершини тупого кута B ромба $ABCD$ проведено висоту BM, $\angle DBM = 30°$. Периметр ромба дорівнює 40 см. Знайдіть меншу діагональ ромба.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 2

До § 5

1 **1.** Накресліть чотирикутник $AMCN$. Запишіть вершини, сторони та кути цього чотирикутника.

2 **2.** Чи можуть у чотирикутнику три кути бути прямими, а четвертий: 1) гострим; 2) тупим?

3. Два кути чотирикутника дорівнюють 40° і 80°, а два інших між собою рівні. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

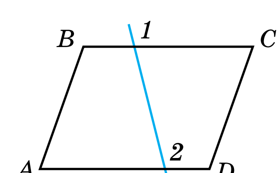
3 **4.** Запишіть усі можливі варіанти позначення чотирикутника $ABCD$.

5. Один з кутів чотирикутника на 10° менший від другого, на 50° менший від третього й удвічі менший від четвертого. Знайдіть кути чотирикутника.

4 **6.** Усі сторони чотирикутника між собою рівні. Доведіть, що сума будь-яких двох сусідніх кутів цього чотирикутника дорівнює 180°.

До § 6

1 **7.** Накресліть паралелограм $KMTL$, у якого кут K – тупий. Проведіть діагоналі паралелограма й позначте їхню точку перетину через O. Укажіть на малюнку пари рівних між собою відрізків.

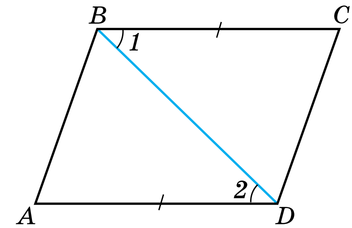


Мал. 1

8. На малюнку 1 $ABCD$ – паралелограм, $\angle 1 = 105°$. Знайдіть $\angle 2$.

2 **9.** У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.

10. На малюнку 2 $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 2

11. Прямі a і b перетинаються. Побудуйте паралелограм так, щоб його діагоналі лежали на цих прямих.

12. Дано паралелограм $ABCD$ і трикутник ENM. Чи можливо, щоб одночасно виконувалися рівності $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle M$?

13. У паралелограмі $ABCD$ точка M – середина AD, N – середина BC. Доведіть, що відрізки AN і BM точкою перетину діляться навпіл.

14. Дано три точки, що не лежать на одній прямій. Скільки паралелограмів з вершинами в цих точках можна побудувати?

15. Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, дорівнює куту паралелограма при сусідній вершині.

16. Доведіть, що бісектриси протилежних кутів паралелограма або паралельні, або збігаються.

17. Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 30°. Знайдіть ці висоти, якщо сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 20 см.

18. Побудуйте паралелограм за двома непаралельними сторонами й висотою, проведеною до однієї з них.

До § 7

19. Накресліть прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см та знайдіть його периметр.

20. У чотирикутнику точка перетину діагоналей ділить діагоналі на чотири рівних між собою відрізки. З'ясуйте вид чотирикутника.

21. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає продовження сторони DC у точці N. Знайдіть $\angle AND$.

22. Побудуйте прямокутник за:
1) стороною і діагоналлю;
2) діагоналлю й кутом, який вона утворює з однією зі сторін;
3) діагоналлю й кутом між діагоналями.

23. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону CD у точці M. Знайдіть периметр прямокутника, якщо $DM = 5$ см, $MC = 2$ см.

24. Точка перетину діагоналей прямокутника розміщена від меншої сторони на 2 см далі, ніж від більшої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 см.

25. Перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута прямокутника до діагоналі, ділить її у відношенні 1 : 3. Знайдіть меншу сторону прямокутника, якщо діагональ дорівнює a см.

26. Бісектриси кутів A і D прямокутника $ABCD$ перетинають його сторону BC у точках L і K відповідно, $BL = 7$ см, $LK = 2$ см. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$. Скільки випадків слід розглянути?

До § 8

27. Накресліть ромб $MKLN$ з тупим кутом M і проведіть у ньому висоти MA і MB.

28. У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, $\angle BAO = 25°$. Знайдіть кути ромба.

29. Знайдіть кути ромба, якщо відношення двох з них дорівнює 2 : 3.

30. У ромбі $ABCD$ з вершини гострого кута A проведено висоти AM і AN. Доведіть, що $AM = AN$.

31. Діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні, а його периметр дорівнює m см. Знайдіть сторони паралелограма.

32. Кут між продовженням висоти ромба, проведеної з вершини гострого кута, і продовженням діагоналі, що сполучає вершини тупих кутів, дорівнює 40°. Знайдіть кути ромба.

33. Висота ромба дорівнює 10 см, а його периметр – 80 см. Знайдіть:

1) кути ромба;

2) кут між висотою, проведеною з вершини тупого кута ромба, і його меншою діагоналлю.

34. Побудуйте ромб за діагоналлю й висотою.

35. На сторонах прямокутника зовні нього побудовано рівносторонні трикутники. Доведіть, що вершини трикутників є вершинами ромба.

До § 9

36. Накресліть квадрат, сторона якого дорівнює 3 см. Знайдіть периметр квадрата.

37. Різниця між периметром квадрата та сумою трьох його сторін дорівнює 8 см. Знайдіть сторону квадрата і його периметр.

38. У задане коло, положення центра якого відоме, впишіть квадрат.

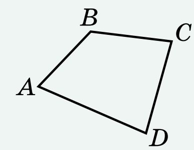
39. Діагональ прямокутника ділить його кут навпіл. Чи є прямокутник квадратом?

40. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ позначено точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, що $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Визначте вид чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$.

41. У квадрат вписано прямокутник так, що на кожній стороні квадрата лежить по одній вершині прямокутника, а сторони прямокутника паралельні діагоналям квадрата. Знайдіть периметр прямокутника, якщо діагональ квадрата дорівнює d см.

Головне в темі 2

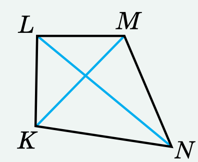
ЧОТИРИКУТНИК, ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. СУМА КУТІВ ЧОТИРИКУТНИКА



Чотирикутник – фігура, що складається із чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають.

Відрізки, які сполучають протилежні вершини чотирикутника, – ***діагоналі*** чотирикутника.

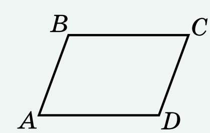
Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.



Якщо всі кути чотирикутника менші від 180°, то він ***опуклий***.

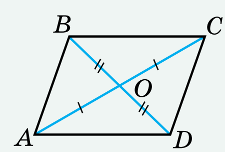
Якщо один з кутів чотирикутника більший за 180°, то він ***неопуклий***.

ПАРАЛЕЛОГРАМ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКИ



Паралелограм – чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°.
2. Паралелограм є опуклим чотирикутником.
3. У паралелограмі протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.
4. Периметр паралелограма $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
5. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

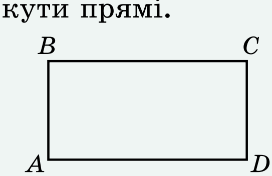


Висота паралелограма – перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.

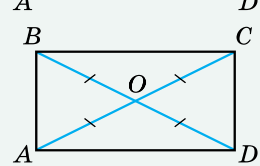
Теорема (ознаки паралелограма). **Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні й паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються й точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, – то чотирикутник є паралелограмом.**

ПРЯМОКУТНИК І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі.



1. У прямокутнику протилежні сторони рівні.
2. Периметр прямокутника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
3. Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.
4. Діагоналі прямокутника рівні.
5. Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.

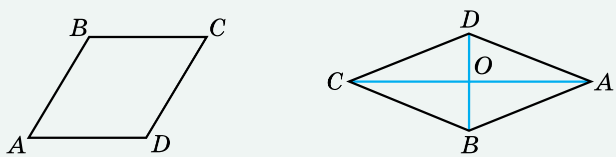


Теорема (ознаки прямокутника). **Якщо в паралелограмі: 1) усі кути рівні, або 2) один кут прямий, або 3) діагоналі рівні, – то паралелограм є прямокутником.**

РОМБ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба дорівнює 180°.
2. У ромба протилежні кути рівні.
3. Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.
4. Периметр ромба $P_{ABCD} = 4AB$.
5. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

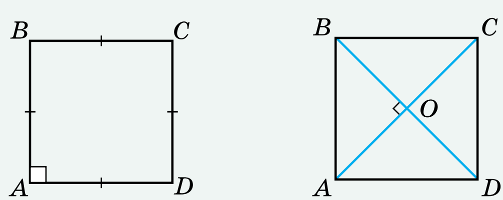


Теорема (ознаки ромба). **Якщо в паралелограмі: 1) дві сусідні сторони рівні, або 2) діагоналі перетинаються під прямим кутом, або 3) діагональ ділить навпіл кути паралелограма, – то паралелограм є ромбом.**

КВАДРАТ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні.

1. Усі кути квадрата прямі.
2. Периметр квадрата $P_{ABCD} = 4AB$.
3. Діагоналі квадрата між собою рівні.



4. Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл.
5. Діагоналі квадрата ділять його кути навпіл, тобто утворюють кути 45° зі сторонами квадрата.
6. Точка перетину діагоналей квадрата рівновіддалена від усіх його вершин: $AO = BO = CO = DO$.

Теорема (ознаки квадрата). **1) Якщо діагоналі прямокутника взаємно перпендикулярні, то він є квадратом. 2) Якщо діагоналі ромба між собою рівні, то він є квадратом.**

ТЕМА 3

МНОЖЕННЯ ТА ДІЛЕННЯ ДРОБІВ. РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** основні властивості рівнянь;
- **ознайомитеся** з поняттям раціонального рівняння;
- **навчитеся** виконувати множення та ділення раціональних дробів; розв'язувати раціональні рівняння.

§ 10. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня

1. Множення дробів

Добуток двох звичайних дробів – це дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник – добутку знаменників цих дробів:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для будь-яких значень a, b, c і d за умови, що $b \neq 0$ і $d \neq 0$.

Нехай $\frac{a}{b} = p$, $\frac{c}{d} = q$. Тоді, за означенням частки, $a = bp$, $c = dq$. Тому $ac = (bp)(dq) = (bd)(pq)$. Оскільки $bd \neq 0$, то, знову врахувавши означення частки, одержимо: $pq = \frac{ac}{bd}$. Отже, якщо $b \neq 0$ і $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. ■

Сформулюємо *правило множення дробів*.

Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити окремо чисельники й окремо знаменники та записати перший добуток чисельником, а другий – знаменником дробу, тобто

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Приклад 1. Виконати множення $\dfrac{b^4}{9m^2} \cdot \dfrac{12m}{b^2}$.

Розв'язання. $\dfrac{b^4}{9m^2} \cdot \dfrac{12m}{b^2} = \dfrac{b^4 \cdot 12m}{9m^2 \cdot b^2} = \dfrac{4b^2}{3m}$.

Відповідь: $\dfrac{4b^2}{3m}$.

Приклад 2. Знайти добуток $\dfrac{cm + cd}{2x} \cdot \dfrac{8x^3}{m^2 - d^2}$.

Розв'язання. Використаємо правило множення дробів, попередньо розклавши чисельник першого дробу і знаменник другого на множники:

$$\frac{cm + cd}{2x} \cdot \frac{8x^3}{m^2 - d^2} = \frac{c(m + d) \cdot 8x^3}{2x \cdot (m - d)(m + d)} = \frac{4cx^2}{m - d}.$$

Відповідь: $\dfrac{4cx^2}{m - d}$.

Зверніть увагу, що у прикладах 1 і 2 під час множення дробів ми не знаходили одразу результат множення чисельників і знаменників. Спочатку ми записали добутки в чисельнику і знаменнику за правилом множення дробів, потім скоротили отриманий дріб, бо він виявився скоротним, а вже потім виконали множення в чисельнику і в знаменнику та записали відповідь. Доцільно це враховувати і надалі.

Приклад 3. Помножити дріб $\dfrac{x + 2}{x^2 - 2x}$ на многочлен $x^2 - 4x + 4$.

Розв'язання. Оскільки $x^2 - 4x + 4 = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{1}$, то:

$$\frac{x + 2}{x^2 - 2x} \cdot (x^2 - 4x + 4) = \frac{x + 2}{x^2 - 2x} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{1} = \frac{(x + 2)(x - 2)^2}{x(x - 2)} =$$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2)}{x} = \frac{x^2 - 4}{x}.$$

Відповідь: $\dfrac{x^2 - 4}{x}$.

Правило множення дробів можна поширити на добуток трьох і більше множників.

Приклад 4. $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{3x + 9}{x - 2} \cdot \dfrac{5x - 15}{3x^2 + 6x + 12} =$

$$= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \cdot 3(x + 3) \cdot 5(x - 3)}{(x - 3)(x + 3) \cdot (x - 2) \cdot 3(x^2 + 2x + 4)} = 5.$$

2. Піднесення дробу до степеня

Розглянемо піднесення дробу $\frac{a}{b}$ до степеня n, де n – натуральне число.

За означенням степеня і правилом множення дробів, маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ множників}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ множників}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ множників}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Отже, маємо правило *піднесення дробу до степеня.*

Щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник та перший результат записати в чисельник, а другий – у знаменник дробу, тобто

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Приклад 5. $\left(\frac{3x^2y}{5t^3}\right)^3 = \frac{(3x^2y)^3}{(5t^3)^3} = \frac{3^3(x^2)^3y^3}{5^3\cdot(t^3)^3} = \frac{27x^6y^3}{125t^9}.$

Приклад 6. Подати вираз $\left(-\frac{m^7p^{12}}{t}\right)^5$ у вигляді дробу.

Розв'язання.

$$\left(-\frac{m^7p^{12}}{t}\right)^5 = (-1)^5\cdot\frac{(m^7)^5\cdot(p^{12})^5}{t^5} = -\frac{m^{35}p^{60}}{t^5}.$$

Відповідь: $-\frac{m^{35}p^{60}}{t^5}.$

Сформулюйте правило множення дробів. Доведіть його. ○ Сформулюйте правило піднесення дробу до степеня. Доведіть його.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

10.1. Виконайте множення:

1) $\frac{4x}{a}\cdot\frac{b}{3m}$; 2) $\frac{2}{a}\cdot\frac{a}{5}$; 3) $\frac{5m}{4n}\cdot\frac{3}{p}$; 4) $\frac{3x}{8}\cdot\frac{1}{x}$.

10.2. Виконайте множення:

1) $\frac{5p}{a}\cdot\frac{x}{2b}$; 2) $\frac{b}{9}\cdot\frac{7}{b}$; 3) $\frac{4}{7a}\cdot\frac{5b}{3}$; 4) $\frac{1}{m}\cdot\frac{m}{8}$.

10.3. Перетворіть на дріб вираз:

1) $\frac{a^2}{5}\cdot\frac{7}{a}$; 2) $\frac{b^4}{3}\cdot\frac{5}{b^2}$; 3) $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{3}$; 4) $\frac{9}{x^2}\cdot\frac{x}{3}$.

10.4. Перетворіть на дріб вираз:

1) $\frac{7}{b}\cdot\frac{b^2}{3}$; 2) $\frac{5}{a^3}\cdot\frac{a^5}{2}$; 3) $\frac{m}{8}\cdot\frac{1}{m^2}$; 4) $\frac{a^2}{12}\cdot\frac{4}{a}$.

2

10.5. Виконайте дію:

1) $\frac{5a}{7}\cdot\frac{21}{20a^2}$; 2) $\frac{3,5}{14a^2}\cdot\frac{4a^3}{5b}$; 3) $\frac{c^2}{30}\cdot\frac{20}{cm}$;

4) $-\frac{3m}{5a^2}\cdot\frac{a}{9m^2}$; 5) $\frac{4x^2}{7p}\cdot\left(-\frac{21p}{8x^3}\right)$; 6) $-\frac{5x^2}{7y^3}\cdot\left(-\frac{21y^2}{25x}\right)$.

10.6. Перетворіть на дріб вираз:

1) $\frac{15m^2}{22}\cdot\frac{11}{10m}$; 2) $\frac{6p}{7}\cdot\frac{2,5c^2}{15p^3}$; 3) $\frac{15}{xp}\cdot\frac{x^2}{45}$;

4) $\frac{4a}{p^2}\cdot\left(-\frac{p}{8a^2}\right)$; 5) $-\frac{5c^2}{7y}\cdot\frac{49y}{10c^3}$; 6) $-\frac{6a^2}{65b^3}\cdot\left(-\frac{13b}{30a}\right)$.

10.7. Перетворіть на дріб вираз:

1) $9p\cdot\frac{b}{6p^2}$; 2) $\frac{4m^3}{x^2}\cdot x^3$; 3) $9ab^2\cdot\left(-\frac{5b}{3a^3}\right)$;

4) $-7ab^3\cdot\frac{b^5}{14a}$; 5) $-4mn^2\cdot\frac{1}{8mn}$; 6) $-11a^2b\cdot\left(-\frac{5}{22a^3b^2}\right)$.

10.8. Виконайте дію:

1) $\frac{a}{16m^2}\cdot 12m$; 2) $a^3\cdot\frac{7x^3}{a^2}$; 3) $-\frac{7y}{4x^2}\cdot 12xy^3$;

4) $5cm^4\cdot\left(-\frac{m}{15c}\right)$; 5) $-5ab^2\cdot\left(-\frac{1}{10ab}\right)$; 6) $13c^2d\cdot\frac{7}{26c^3d^2}$.

10.9. Спростіть вираз:

1) $\frac{7c^3}{10m^2}\cdot\frac{25m^3}{14c^8}$; 2) $-\frac{8a^3}{27c^4}\cdot\frac{45c^5}{16a^3}$;

3) $\frac{4c^3}{15a^8}\cdot\left(-\frac{5a^3}{8c^4}\right)$; 4) $-\frac{1}{25p^2q^7}\cdot\left(-\frac{10p^3q^7}{11}\right)$.

10.10. Спростіть вираз:

1) $\frac{9m^2}{25a^2}\cdot\frac{35a^3}{18m^5}$; 2) $\frac{7p^3}{18a^3}\cdot\left(-\frac{27a^4}{14p^3}\right)$;

3) $-\frac{5m^3}{21n^7}\cdot\frac{7n^2}{10m^4}$; 4) $-\frac{1}{18c^3d^4}\cdot\left(-\frac{12c^4d^4}{7}\right)$.

10.11. Виконайте множення:

1) $\frac{a^2+2a}{5}\cdot\frac{a}{4a+8}$; 2) $\frac{7m}{a}\cdot\frac{a^2-ab}{21}$;

3) $\frac{2a-b}{10a}\cdot\frac{15a^2}{b-2a}$; 4) $\frac{10ab}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{5ab}$;

5) $-\frac{ab-ac}{10p}\cdot\frac{25p}{xc-xb}$; 6) $\frac{a^2+ab}{x^2}\cdot\frac{xy}{a^2+2ab+b^2}$.

10.12. Виконайте множення:

1) $\frac{m^2-3m}{7}\cdot\frac{x}{2m-6}$; 2) $\frac{5a}{x^2+xy}\cdot\frac{x}{15}$;

3) $\frac{a-b}{16m^2}\cdot\frac{24m}{b-a}$; 4) $\frac{x^2-y^2}{5pc}\cdot\frac{20pc}{x-y}$;

5) $\frac{3a-3b}{12x}\cdot\left(-\frac{18x}{mb-ma}\right)$; 6) $\frac{m^2-2mn+n^2}{pc}\cdot\frac{p^2}{m^2-mn}$.

10.13. Спростіть вираз $\frac{5x^2+15x}{y^2-2y}\cdot\frac{2-y}{x+3}$ і знайдіть його значення, якщо $x=17$, $y=-\frac{1}{23}$. Відтак дізнаєтеся, у якому році українка Катерина Ющенко винайшла одну з перших у світі мов програмування високого рівня під назвою «Адресна мова».

10.14. Спростіть вираз $\frac{35a-5a^2}{b^2+4b}\cdot\frac{4+b}{a-7}$ і знайдіть його значення, якщо $a=79$, $b=-0{,}2$. Відтак дізнаєтеся, у якому році футбольна команда «Динамо» (Київ) уперше виборола європейський Кубок кубків.

10.15. Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{p}{4m}\right)^3$; 2) $\left(\frac{3c^2}{m}\right)^4$; 3) $\left(-\frac{3m^2n}{7}\right)^2$;

4) $\left(-\frac{2m^2}{3x^3}\right)^3$; 5) $\left(\frac{2a^3b}{x^7}\right)^5$; 6) $\left(-\frac{c^2m^3}{p}\right)^{10}$.

10.16. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(\frac{c}{5m}\right)^2$; 2) $\left(\frac{y}{2x^3}\right)^4$; 3) $\left(-\frac{4c^2m^3}{5}\right)^2$;

4) $\left(-\frac{3c^3}{m^7}\right)^3$; 5) $\left(\frac{c^3m}{2a^2}\right)^6$; 6) $\left(-\frac{ab^3}{c^2}\right)^8$.

3

10.17. Спростіть вираз:

1) $\frac{54a^2c}{81b^3} \cdot \frac{32ab}{13c^3} \cdot \frac{52bc^2}{128a^3}$;

2) $\frac{147x^4y^2}{p^3} \cdot 10xp^2 \cdot \frac{y^3}{105x^5y}$.

10.18. Виконайте дії:

1) $\frac{14xz^3}{81y^2} \cdot \frac{27y^3}{5xz} \cdot \frac{45xy}{7z^2}$;

2) $\frac{b^3}{111m^5} \cdot 3mc^3 \cdot \frac{74m^3b}{c^4}$.

10.19. Знайдіть добуток:

1) $\frac{m^2 - 4m + 4}{m^2 + 6m + 9} \cdot \frac{m^2 - 9}{3m - 6}$;

2) $-\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 3x + 9} \cdot \frac{x^3 + 27}{25 - x^2}$.

10.20. Виконайте множення:

1) $\frac{a^2 + 8a + 16}{a^2 - 2a + 1} \cdot \frac{7a - 7}{a^2 - 16}$;

2) $-\frac{y^3 - 8}{9 - y^2} \cdot \frac{y^2 - 6y + 9}{y^2 + 2y + 4}$.

10.21. Перетворіть на дріб:

1) $(4a + 20b) \cdot \frac{5}{a^2 - 25b^2}$;

2) $(m^2 - 4) \cdot \frac{2m}{(m - 2)^2}$;

3) $-\frac{a}{2a^2 - 18} \cdot (a^2 - 6a + 9)$;

4) $(x^3 + 27y^3) \cdot \frac{5}{3x^2 - 9xy + 27y^2}$.

10.22. Перетворіть на дріб:

1) $\frac{4}{x^2 - 9y^2} \cdot (6x + 18y)$;

2) $(c^2 + 4c + 4) \cdot \left(-\frac{c}{3c^2 - 12}\right)$.

10.23. Виконайте дії:

1) $\left(\frac{25x^2}{8y^3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{16y^5}{125x^3}\right)^2$;

2) $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^3$.

10.24. Виконайте дії:

1) $\left(-\frac{16m^3}{27n^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{9n^4}{8m^2}\right)^3$;

2) $\left(\frac{m - n}{m + n}\right)^3 \cdot \frac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 - 2mn + n^2}$.

10.25. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{6ab - b}{5a + b} \cdot \frac{25a^2 - b^2}{6a - 1}$, якщо $a = 1{,}2$, $b = 6$;

2) $\frac{a^3 + 8}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^2 + a}{a^2 - 2a + 4}$, якщо $a = 6$.

4

10.26. Виконайте множення:

1) $\frac{x^2 + ax - cx - ca}{x^2 - ax + cx - ac} \cdot \frac{x^2 + ac + xc + xa}{x^2 + ac - xc - xa}$;

2) $\frac{5a - 5b}{3c + 3y} \cdot \frac{c^2 - y^2 - c - y}{a^2 - b^2 + a - b}$.

10.27. Обчисліть $\dfrac{a^2 - b^2 + a + b}{a^2 - b^2 + a - b} \cdot \dfrac{4a - 4b}{8a + 8b}$, якщо $a = 100$, $b = 101$.

Вправи для повторення

10.28. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{8}(x + y) = 3, \\ \dfrac{1}{3}(x - y) = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{3} + \dfrac{y - 1}{2} = 2, \\ \dfrac{x - 1}{2} - \dfrac{y - 1}{12} = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

10.29. Побудуйте графік функції $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} - x^2$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

10.30. Знайдіть число, взаємно обернене із числом:

1) 4; 2) −7; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) $-\dfrac{2}{5}$; 5) 0,16; 6) 1,2.

10.31. Обчисліть:

1) $\dfrac{26}{45} : \dfrac{91}{135}$; 2) $2\dfrac{1}{2} : \dfrac{15}{16}$; 3) $-3\dfrac{1}{7} : 2\dfrac{5}{14}$; 4) $-5\dfrac{13}{15} : \left(-1\dfrac{8}{25}\right)$.

Життєва математика

10.32. Родина витрачає 13 % своїх доходів на оплату комірного, 45 % – на продукти харчування, 17 % – на побутові товари і послуги, а решту – на відпочинок. Який річний бюджет родини, якщо на відпочинок вона витрачає 120 000 грн на рік?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

10.33. На моніторі комп'ютера – число 2500. Щохвилини комп'ютерна програма множить або ділить це число на 2 або на 5, одержуючи при цьому натуральне число. Чи може на моніторі рівно через годину з'явитися число: 1) 10 000; 2) 20 000?

§ 11. Ділення дробів

Щоб знайти частку двох звичайних дробів, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$\dfrac{2}{5} : \dfrac{3}{7} = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{7}{3} = \dfrac{14}{15}$, або у вигляді формули: $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$.

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для будь-яких значень a, b, c і d за умови, що $b \neq 0$, $c \neq 0$ і $d \neq 0$.

Оскільки $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$, то, за означенням частки, маємо: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. ■

Отже, якщо $b \neq 0$, $c \neq 0$ і $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Дріб $\frac{d}{c}$ називають *оберненим* до дробу $\frac{c}{d}$.

Сформулюємо *правило ділення дробів.*

Щоб поділити один дріб на інший, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника, тобто

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}.$$

Приклад 1. Поділити дріб $\frac{21x^2}{8y^3}$ на дріб $\frac{3x}{16y^2}$.

Розв'язання.

$$\frac{21x^2}{8y^3} : \frac{3x}{16y^2} = \frac{21x^2}{8y^3} \cdot \frac{16y^2}{3x} = \frac{21x^2 \cdot 16y^2}{8y^3 \cdot 3x} = \frac{7x \cdot 2}{y} = \frac{14x}{y}.$$

Відповідь: $\frac{14x}{y}$.

Приклад 2. Виконати дію $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x} : \frac{3x + 15}{x}$.

Розв'язання. $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x} : \frac{3x + 15}{x} = \frac{(x - 5)(x + 5)}{x(x + 2)} \cdot \frac{x}{3(x + 5)} =$

$$= \frac{(x - 5)(x + 5)x}{3x(x + 2)(x + 5)} = \frac{x - 5}{3(x + 2)}.$$

Відповідь: $\frac{x - 5}{3(x + 2)}$.

Приклад 3. Спростити вираз $\frac{a^2 - 4}{5a} : (a^2 + 4a + 4)$.

Розв'язання. Оскільки $a^2 + 4a + 4 = \frac{a^2 + 4a + 4}{1}$, то:

$$\frac{a^2 - 4}{5a} : (a^2 + 4a + 4) = \frac{a^2 - 4}{5a} : \frac{a^2 + 4a + 4}{1} = \frac{(a - 2)(a + 2)}{5a} \cdot \frac{1}{(a + 2)^2} =$$

$$= \frac{(a-2)(a+2)\cdot 1}{5a(a+2)^2} = \frac{a-2}{5a(a+2)}.$$

Відповідь: $\frac{a-2}{5a(a+2)}$.

Сформулюйте правило ділення дробів. Доведіть його.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

11.1. Виконайте ділення:

1) $\frac{2}{a} : \frac{3}{b}$; 2) $\frac{7}{x} : \frac{y}{2}$; 3) $\frac{m}{3} : \frac{m}{4}$; 4) $\frac{a^2}{2} : \frac{a}{7}$.

11.2. Виконайте ділення:

1) $\frac{5}{x} : \frac{2}{y}$; 2) $\frac{a}{2} : \frac{5}{b}$; 3) $\frac{4}{x} : \frac{5}{x}$; 4) $\frac{x^2}{3} : \frac{x}{2}$.

2

11.3. Спростіть вираз:

1) $\frac{7b}{12a} : \frac{21b^2}{16a}$; 2) $\frac{15}{2n^2} : \frac{3m}{8n}$; 3) $\frac{9b}{14a} : \frac{5b^2}{21a^2}$;

4) $-\frac{3x^2}{a} : \frac{6x^3}{a^2}$; 5) $14x^2 : \frac{7x}{a}$; 6) $\frac{8x^3}{7a} : (-2x^2)$;

7) $-\frac{12a^2}{b} : (16a^2)$; 8) $-40ma^5 : \left(-\frac{8m^2}{a}\right)$.

11.4. Виконайте дію:

1) $\frac{3a^2}{b} : \frac{a}{b^2}$; 2) $-\frac{3p}{c^3} : \frac{15p^2}{c^2}$; 3) $\frac{4p}{5c} : \frac{8p^2}{15c^3}$;

4) $\frac{15m^3}{c} : (-10m^2)$; 5) $-\frac{2a^2}{b} : (-8a^2)$; 6) $-12a^2bc : \frac{4ab}{m}$.

11.5. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{12m^2}{7c^4} : \frac{6m^4}{35c^3}$; 2) $\frac{9m^2}{22n^3} : \left(-\frac{m^5}{11n^6}\right)$;

3) $-\frac{7ab}{4cd} : \frac{21a^2b}{8cd^3}$; 4) $-\frac{27m^2n}{7c^2x} : \left(-\frac{9mn^2}{7c^2x^3}\right)$.

11.6. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{6a^2}{5b^2} : \frac{2a^3}{15b}$; 2) $-\frac{4a^2}{27x} : \frac{a^4}{9x^3}$;

3) $\frac{5xy}{2m^2n} : \left(-\frac{15x^2y}{8mn^3}\right)$; 4) $-\frac{2ab^2}{9x^2p} : \left(-\frac{2a^2b}{27x^2p^3}\right)$.

11.7. Виконайте ділення:

1) $\frac{2a+b}{4p} : \frac{b+2a}{8p^2}$; 2) $\frac{3a-2x}{7x^2} : \frac{2x-3a}{14x}$; 3) $\frac{a^2-3a}{9y^2} : \frac{5a}{9y}$;

4) $\frac{a^2+a}{9b^2} : \frac{5+5a}{b^3}$; 5) $\frac{7ab}{c^2-3c} : \frac{14ab^2}{3c-9}$; 6) $\frac{11a}{m^2-2m} : \frac{22a^2}{6-3m}$.

11.8. Виконайте ділення:

1) $\frac{x-y}{2a^2} : \frac{y-x}{8a}$; 2) $\frac{p^2+2p}{18a^2} : \frac{7p}{9a}$;

3) $\frac{x^2+x}{9ab} : \frac{5x+5}{18a^2b}$; 4) $\frac{3x-x^2}{7p} : \frac{2x-6}{14p^2}$.

11.9. Спростіть вираз:

1) $\frac{m^2-n^2}{p+2q} : \frac{mn+m^2}{2p+4q}$; 2) $\frac{6x-30}{2x+5} : \frac{x^2-25}{4x+10}$;

3) $\frac{a+2}{a-2} : \frac{a^2+4a+4}{5a-10}$; 4) $\frac{x+y}{p-2m} : \frac{x^2+2xy+y^2}{2m^2-mp}$.

11.10. Спростіть вираз:

1) $\frac{ab+b^2}{m-3n} : \frac{a^2-b^2}{2m-6n}$; 2) $\frac{x-5}{y^2-4} : \frac{2x-10}{3y-6}$;

3) $\frac{x^2-9}{x^2+x} : \frac{x^2+6x+9}{7x+7}$; 4) $\frac{x-4y}{a^2-2ab+b^2} : \frac{4xy-x^2}{a-b}$.

11.11. Українська біологиня Оксана Савенко, яка вивчає морських китів, тюленів, дельфінів, стала першою жінкою, котра вирушила в зимову експедицію на станцію «Академік Вернадський». Спростіть вираз $\frac{6x^2-3xy}{m^2+2m} : \frac{y-2x}{m+2}$ і знайдіть його значення, якщо $x = 10$, $m = -2$. Відтак дізнаєтеся, скільки місяців провела науковиця у складі експедиції.

11.12. У 2012 р. Україна встановила рекорд за тривалістю музичного телемарафону національної пісні. Спростіть вираз $\frac{n^2+3n}{5c-p} : \frac{n+3}{10p^2-50pc}$, знайдіть його значення, якщо $n = 5{,}5$, $p = -2$, та дізнаєтеся, скільки годин тривав цей телемарафон.

3

11.13. Виконайте дії:

1) $\frac{4a^2}{5b^3} : \frac{8a^3}{7c^3} : \frac{14c^2}{15b^2}$; 2) $\frac{2a^3}{25b^3} \cdot \frac{10b^2}{3c^4} : \frac{4a^2}{15bc}$;

3) $\frac{c^3}{18p^4} : \left(\frac{9c^2}{20p^3} : \frac{27c^3p}{10}\right)$; 4) $\frac{115a^3}{34b^4} : \frac{92a^6}{51b^3} \cdot \frac{4b^2}{15a^2}$.

11.14. Подайте у вигляді нескоротного дробу вираз:

1) $\frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^6}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^2}$; 2) $\frac{7x^3}{4y^2} \cdot \frac{216x^6}{343y^3} : \frac{18x^8}{49y^4}$.

11.15. Виконайте ділення:

1) $\frac{9 + 6a + 4a^2}{2a - 1} : \frac{27 - 8a^3}{1 - 4a^2}$; 2) $\frac{8 + x^3}{16 - x^4} : \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 4}$;

3) $(25x^2 - 10xy + y^2) : \frac{y^2 - 5xy}{7}$;

4) $\frac{(6y - 4x)^2}{3} : (9y^2 - 12xy + 4x^2)$.

11.16. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{x^3 - 8}{9x^2 - 16} : \frac{x^2 + 2x + 4}{3x - 4}$, якщо $x = -3$;

2) $(m^2 - 10mn + 25n^2) : \frac{0,2m^2 - 5n^2}{5}$, якщо $m = 10$, $n = 3$.

11.17. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\frac{a^2y^3}{5}\right)^3 : \left(-\frac{a^3y^4}{25}\right)^2$, якщо $a = 117\frac{1}{3}$, $y = 0,02$;

2) $\frac{(2x - y)^2}{(x - 2y)^2} : \frac{4x^2 - y^2}{x^2 - 4y^2}$, якщо $x = 4,2$, $y = 1,6$.

4 **11.18.** Спростіть вираз $\frac{0,5a^2 - 32}{0,5a^3 - 62,5} : \frac{0,2a + 1,6}{0,2a^2 + a + 5}$.

11.19. Доведіть тотожність $\frac{m^3 + 27}{75m^2 - 12} : \frac{\frac{1}{3}m^2 - m + 3}{m - 0,4} = \frac{m + 3}{25m + 10}$.

11.20. Спростіть $\frac{6ab + 6 - 4a - 9b}{a^2 - 12a + 36} : \frac{9b^2 - 12b + 4}{3ab - 18b - 2a + 12}$.

11.21. Виконайте дію $\frac{a + 4}{x - a} : \frac{ab + 4b - 2a - 8}{cx + xy - ac - ay}$.

Вправи для повторення

11.22. Подайте дріб у вигляді суми або різниці двох дробів:

1) $\frac{2a - b}{ab}$; 2) $\frac{7y^2 + y^3}{y^5}$;

3) $\frac{4m^2 + 5n^2}{m^2n}$; 4) $\frac{18x - 24x^2y}{30y^2}$.

11.23. Обчисліть значення дробу:

1) $\dfrac{m^2 + 6mn + 9n^2}{(2m + 6n)^2}$, якщо $m = 2\dfrac{1}{13}$, $n = -2\dfrac{1}{7}$;

2) $\dfrac{0,1x^2 - 2,5y^2}{x^2 + 10xy + 25y^2}$, якщо $x = 100$, $y = 20$.

11.24. Доведіть тотожність $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{4}{1+x^4} = \dfrac{8}{1-x^8}$.

Життєва математика

11.25. Щомісяця протягом 3 місяців прибуток малого підприємства збільшувався на 10 % відносно прибутку за попередній місяць. Податок на прибуток підприємства (ППП) в Україні складає 18 %. У якому розмірі сплатило це підприємство ППП за ці 3 місяці, якщо прибуток за перший місяць склав 40 000 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

11.26. Український гросмейстер Василь Іванчук узяв участь у чемпіонаті світу з бліцу. У перший день він переміг суперників у 70 % партій, а на другий день виграв ще 15 партій поспіль. Відсоток виграшних партій за два дні сягнув 80 %. Скільки партій за ці два дні зіграв Василь Іванчук?

§ 12. Тотожні перетворення раціональних виразів

Розглянемо приклади перетворень раціональних виразів.

Приклад 1. Довести тотожність $\dfrac{6x + y}{3x} - \dfrac{5y^2}{x^2} \cdot \dfrac{x}{15y} = 2.$

Доведення. Спростимо ліву частину рівності:

$$\frac{6x + y}{3x} - \frac{5y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y} = \frac{6x + y}{3x} - \frac{5y^2 \cdot x}{x^2 \cdot 15y} = \frac{6x + y}{3x} - \frac{y}{3x} =$$

$$= \frac{6x + y - y}{3x} = \frac{6x}{3x} = 2.$$

За допомогою тотожних перетворень ми звели ліву частину рівності до правої. Отже, рівність є тотожністю.

Приклад 2. Спростити вираз

$$\left(\frac{2x}{4x^2 - y^2} + \frac{1}{y - 2x}\right) : \left(\frac{2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{4x^2 + 4xy + y^2}\right).$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо дію в кожній з дужок, а потім – дію ділення:

1) $\frac{2x}{4x^2 - y^2} + \frac{1}{y - 2x} = \frac{2x}{(2x - y)(2x + y)} - \frac{^{2x+y/}1}{2x - y} = \frac{2x - (2x + y)}{(2x - y)(2x + y)} =$

$= \frac{2x - 2x - y}{(2x - y)(2x + y)} = -\frac{y}{(2x - y)(2x + y)} = \frac{y}{(y - 2x)(2x + y)};$

2) $\frac{2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{4x^2 + 4xy + y^2} = \frac{^{2x+y/}2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{(2x + y)^2} =$

$= \frac{2x(2x + y) - 4x^2}{(2x + y)^2} = \frac{4x^2 + 2xy - 4x^2}{(2x + y)^2} = \frac{2xy}{(2x + y)^2};$

3) $\frac{y}{(y - 2x)(2x + y)} : \frac{2xy}{(2x + y)^2} = \frac{y \cdot (2x + y)^2}{(y - 2x)(2x + y) \cdot 2xy} =$

$= \frac{2x + y}{2x(y - 2x)} = \frac{2x + y}{2xy - 4x^2}.$

Відповідь: $\frac{2x + y}{2xy - 4x^2}$.

Розв'язання можна було записати й «ланцюжком»:

$\left(\frac{2x}{4x^2 - y^2} + \frac{1}{y - 2x}\right) : \left(\frac{2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{4x^2 + 4xy + y^2}\right) =$

$= \left(\frac{2x}{(2x - y)(2x + y)} - \frac{^{2x+y/}1}{2x - y}\right) : \left(\frac{^{2x+y/}2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{(2x + y)^2}\right) =$

$= \frac{2x - (2x + y)}{(2x - y)(2x + y)} : \frac{2x(2x + y) - 4x^2}{(2x + y)^2} =$

$= \frac{(2x - 2x - y)(2x + y)^2}{(2x - y)(2x + y)(4x^2 + 2xy - 4x^2)} = \frac{-y(2x + y)}{(2x - y) \cdot 2xy} =$

$= -\frac{2x + y}{2x(2x - y)} = \frac{2x + y}{2x(y - 2x)} = \frac{2x + y}{2xy - 4x^2}.$

Кожний вираз, що містить суму, різницю, добуток і частку раціональних дробів, можна подати у вигляді раціонального дробу.

Приклад 3. Довести, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{\dfrac{3x^3 - y}{y} + 1}{\dfrac{3x + y}{y} - 1}$ є невід'ємним.

Доведення. Можна подати цей вираз у вигляді частки $\left(\frac{3x^3 - y}{y} + 1\right) : \left(\frac{3x + y}{y} - 1\right)$ і далі перетворити його, як у прикладі 2.

А можна, використовуючи основну властивість дробу, помножити чисельник і знаменник цього дробу на їх спільний знаменник, тобто на y:

$$\frac{\frac{3x^3 - y}{y} + 1}{\frac{3x + y}{y} - 1} = \frac{\left(\frac{3x^3 - y}{y} + 1\right)y}{\left(\frac{3x + y}{y} - 1\right)y} = \frac{\frac{(3x^3 - y)y}{y} + y}{\frac{(3x + y)y}{y} - y} = \frac{3x^3 - y + y}{3x + y - y} = \frac{3x^3}{3x} = x^2.$$

Отже, при всіх допустимих значеннях змінних вираз тотожно дорівнює одночлену x^2, значення якого є невід'ємним при всіх значеннях x.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2

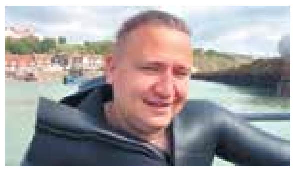
12.1. Виконайте дії:

1) $\frac{12a + b}{3a} - \frac{7b^2}{a^2} \cdot \frac{a}{21b}$;
2) $\frac{m^2 - n^2}{x^2 - 9} \cdot \frac{x - 3}{m - n} - \frac{m}{x + 3}$;
3) $\frac{a - b}{2a + b} + \frac{1}{a - b} : \frac{2a + b}{a^2 - b^2}$;
4) $x - \frac{x^2 - xy}{x + y} \cdot \frac{x}{x - y}$.

12.2. Виконайте дії:

1) $\frac{10x + y}{5x} - \frac{3y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y}$;
2) $\frac{a^2 - 4}{9 - b^2} : \frac{a - 2}{3 + b} - \frac{2}{3 - b}$;
3) $\frac{x + y}{3x - y} + \frac{1}{x + y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{3x - y}$;
4) $m + \frac{m^2 + mn}{n - m} \cdot \frac{m}{m + n}$.

12.3. Паралімпієць-візочник, українець Олег Іваненко, проплив 62 км Ла-Маншем. Знайдіть значення виразу $\frac{2b}{m} + \frac{a^2 - b^2}{5m^2} \cdot \frac{10m}{a + b}$, якщо $a = 4{,}5$, $b = -2025$, $m = 0{,}5$, та дізнаєтеся, за скільки годин спортсмен проплив небезпечну протоку.



12.4. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x} + 2\right) \cdot \frac{1}{x + 7}$;
2) $\left(1 + \frac{m}{3n}\right) : \left(1 - \frac{m}{3n}\right)$;
3) $\left(\frac{a}{a + 2} - 3a\right) \cdot \frac{a + 2}{a}$;
4) $\left(2 + \frac{x}{x + 1}\right) : \frac{9x + 6}{5x^2 + 5x}$.

12.5. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{m}{5} + \frac{5}{m} - 2\right) \cdot \frac{1}{m - 5}$;
2) $\left(1 - \frac{x}{y}\right) : \left(1 + \frac{x}{y}\right)$;
3) $\left(\frac{b}{b - 3} - 2b\right) \cdot \frac{b - 3}{b}$;
4) $\left(3 - \frac{m}{m + 2}\right) : \frac{4m + 12}{m^2 + 2m}$.

12.6. Доведіть тотожність:

1) $\left(1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{b}{a-b}=\frac{a-b}{b}$; 2) $\left(\frac{m}{n^2}-\frac{1}{m}\right):\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m+n}{n}$.

12.7. Доведіть тотожність:

1) $\left(1+\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\frac{y}{x+y}=\frac{x+y}{y}$;

2) $\left(\frac{2m}{n^2}-\frac{1}{2m}\right):\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2m}\right)=\frac{2m-n}{n}$.

3 **12.8.** Виконайте дії:

1) $\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}\right)\cdot\frac{x^2-4}{4x}$; 2) $\left(\frac{a+3}{a-3}-\frac{a-3}{a+3}\right):\frac{24a}{a^2-6a+9}$.

12.9. Виконайте дії:

1) $\frac{8m}{m^2-1}:\left(\frac{m+1}{m-1}-\frac{m-1}{m+1}\right)$; 2) $\left(\frac{a-2}{a+2}+\frac{a+2}{a-2}\right)\cdot\frac{a^2-4a+4}{2a^2+8}$.

12.10. Спростіть вираз:

1) $\frac{36}{a-3}:\left(\frac{a+3}{a-3}-\frac{a-3}{a+3}+\frac{36}{a^2-9}\right)$;

2) $\left(\frac{2x+y}{x-2y}+\frac{2x-y}{x+2y}\right)\cdot\frac{x^2-4y^2}{x^2+y^2}$.

12.11. Спростіть вираз:

1) $\frac{16}{x+2}:\left(\frac{x+2}{x-2}-\frac{16}{x^2-4}-\frac{x-2}{x+2}\right)$; 2) $\left(\frac{5a+1}{a-2}+\frac{5a-1}{a+2}\right)\cdot\frac{a^2-4}{5a^2+2}$.

12.12. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{a}{a-5}-\frac{a}{a+5}-\frac{a^2+25}{25-a^2}\right)\cdot\frac{a-5}{a^2+10a+25}=\frac{1}{a+5}.$$

12.13. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{b}{b+7}+\frac{b^2+49}{b^2-49}-\frac{b}{b-7}\right):\frac{b-7}{b^2+14b+49}=b+7.$$

12.14. Виконайте дії:

1) $\left(\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{a^2+2a+1}\right):\frac{2a}{a^2-1}$;

2) $\left(\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x+3}{2x+2}+\frac{6}{2x^2-2}\right)\cdot\frac{4x^2-4}{5}$.

12.15. Виконайте дії:

1) $\left(\frac{1}{4-a^2}-\frac{1}{a^2-4a+4}\right)\cdot\frac{a^2-4}{2a}$;

2) $\left(\frac{a+1}{3a-3}-\frac{a+2}{3a+3}+\frac{21-a}{3a^2-3}\right):\frac{4}{a^2-1}$.

12.16. Доведіть тотожність:

1) $\left(2-\frac{2a^2-a}{a^2-a+1}\right):\left(\frac{1}{a+1}-\frac{a-1}{a^2-a+1}\right)=a+1$;

2) $\left(\frac{m-2}{m^2-2m+4}-\frac{6m-13}{m^3+8}\right)\cdot\frac{2m^3+16}{18-6m}=\frac{3-m}{3}$.

12.17. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $\frac{a+2}{16}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{3a-8}{a^2-2a+4}-\frac{4a-28}{a^3+8}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)$.

12.18. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу $\frac{b-2}{15}\cdot\left(\frac{1}{b-2}+\frac{9b+6}{b^3-8}-\frac{1-2b}{b^2+2b+4}\right)$ від значення змінної не залежить.

12.19. Подайте у вигляді раціонального дробу:

1) $\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right)^2$;

2) $\left(\frac{a^2}{b}-1\right)^2+\left(\frac{a^2}{b}+1\right)^2$;

3) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}\right)^2+\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)^2$;

4) $\left(\frac{a+b}{a}+\frac{a-b}{b}\right)^2-\left(\frac{a+b}{a}-\frac{a-b}{b}\right)^2$.

12.20. Перетворіть вираз на дріб:

1) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2$;

2) $\left(\frac{m}{n^2}+1\right)^2-\left(\frac{m}{n^2}-1\right)^2$.

12.21. Спростіть вираз:

1) $\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$;

2) $\frac{\frac{7x-a}{a}+1}{\frac{7x+a}{a}-1}$;

3) $\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{2p}}{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2p^2}}$;

4) $\frac{c-\frac{6c-9}{c}}{\frac{3}{c}-1}$;

5) $\frac{\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}}$;

6) $\frac{\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}}{\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}}$.

12.22. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1+\dfrac{4}{m}}{1-\dfrac{4}{m}}$; 2) $\dfrac{\dfrac{3p+m}{m}-1}{\dfrac{3p-m}{m}+1}$; 3) $\dfrac{\dfrac{1}{4t}+\dfrac{1}{t}}{\dfrac{1}{4t^2}+\dfrac{1}{t^2}}$;

4) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{2x-1}{x}}$; 5) $\dfrac{\dfrac{m}{2-m}+\dfrac{2+m}{m}}{\dfrac{m}{2+m}+\dfrac{2-m}{m}}$; 6) $\dfrac{\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}}$.

4 **12.23.** Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\dfrac{8}{4a-b}:\left(\dfrac{2a-0,5b}{4a^2+ab+0,25b^2}+\dfrac{24ab}{64a^3-b^3}+\dfrac{1}{2a-0,5b}\right)$ не залежить від значення змінних.

12.24. Знайдіть значення виразу

$$\left(\frac{1,5a-4}{0,5a^2-a+2}-\frac{2a-14}{0,5a^3+4}+\frac{1}{a+2}\right):\frac{4}{a+2},$$

якщо $a=197$.

12.25. Відомо, що $x-\dfrac{1}{x}=7$. Знайдіть значення виразу $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

12.26. Знайдіть значення виразу $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, якщо $x+\dfrac{1}{x}=3$.

12.27. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{8x^2+2x}{8x^3-1}-\dfrac{2x+1}{4x^2+2x+1}\right)\left(1+\dfrac{2x+1}{2x}-\dfrac{4x^2+10x}{4x^2+2x}\right)$;

2) $\dfrac{p^2-2p+1}{4}\cdot\left(\dfrac{2p}{p^3+1}:\dfrac{1-p}{p^2-p+1}+\dfrac{2}{p-1}\right):\dfrac{p-1}{p+1}$.

12.28. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{4x}{x^2-1}\right)\left(\frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4x}{x^2-1}\right)$$

не залежить від значення змінної.

12.29. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{m^2-3m}{m^3+3m^2+3m+1}+\frac{1}{m^2+2m+1}\right)\left(\frac{3-m}{m^2-2m+1}-\frac{2}{1-m}\right)$$

є додатним для всіх допустимих значень змінної.

12.30. Подайте у вигляді раціонального дробу або цілого виразу:

1) $1 - \dfrac{x}{1 - \dfrac{x}{x+1}}$; 2) $\dfrac{m}{m - \dfrac{1}{m - \dfrac{m}{1-m}}}$.

12.31. Подайте у вигляді раціонального дробу або цілого виразу:

1) $1 + \dfrac{2x}{1 - \dfrac{x}{x+2}}$; 2) $\dfrac{1}{n - \dfrac{1}{n + \dfrac{n}{n-1}}}$.

Вправи для повторення

12.32. Подайте вираз у вигляді степеня:

1) $x^7x^3 : x^2$; 2) $(x^5 : x^2) : x$; 3) $(a^2)^3 \cdot a$; 4) $(x^3)^5 : x^4$.

12.33. Доведіть, що число $8^9 - 4^{12}$ ділиться на 7.

12.34. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} 2x + 4, & \text{якщо } x < 0, \\ 4 - x, & \text{якщо } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2x + 5, & \text{якщо } x < -1, \\ 3, & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 4, \\ x - 1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

12.35. Для яких значень змінної має зміст вираз:

1) $\dfrac{x-1}{7}$; 2) $\dfrac{7}{x-1}$; 3) $\dfrac{x+2}{x(x+3)}$;

4) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-5}$; 5) $\dfrac{x^2}{x^2-9}$; 6) $\dfrac{x-5}{x^2-4x}$?

12.36. Для яких значень змінної дорівнює нулю значення дробу:

1) $\dfrac{(m-1)m}{m+2}$; 2) $\dfrac{x^2-2x}{8}$;

3) $\dfrac{(m+2)m}{m^2-4}$; 4) $\dfrac{x}{x^2+x}$?

12.37. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x - 3) = 4(x + 7) - 11$;

2) $5(x - 2) - 7(x + 1) = 9(x - 8)$.

12.38. Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

1) $\dfrac{2x-4}{7} = \dfrac{3x+1}{9}$; 2) $\dfrac{2x-11}{5} = \dfrac{3x+17}{10}$.

Життєва математика

12.39. Заробітна плата водія тролейбуса пропорційна кількості відпрацьованих годин. За місяць водій відпрацював 160 годин та отримав 21 600 грн. Скільки годин має відпрацювати водій наступного місяця, щоб отримати 24 300 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

12.40. (*З книги «Універсальна арифметика» Ньютона.*) Дехто забажав розділити певну суму коштів між жебраками порівну. Якби в нього було на 8 динарів більше, то він мав би дати кожному по 3 динари, але він роздав лише по 2 динари і ще 3 в нього залишилося. Скільки було жебраків?

§ 13. Раціональні рівняння

1. Рівносильні рівняння

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і ті рівняння, які коренів не мають.

Так, наприклад, рівносильними є рівняння $x + 3 = 5$ і $4x = 8$, оскільки коренем кожного з них є число 2.

Рівняння $x - 3 = 7$ і $2x = 18$ не є рівносильними, оскільки коренем першого з них є число 10, а коренем другого – число 9.

Раніше, у 7 класі, ви ознайомилися з властивостями, що перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння.

1. **Якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному.**
2. **Якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини у другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному.**
3. **Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.**

2. Раціональні рівняння

Розглянемо рівняння: $3(x - 1) + 2x = x + 7$; $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{x+7}{6} = x$;

$$\frac{2}{x-1} = 14 + \frac{1}{x}.$$

Ліва і права частини кожного з них є раціональними виразами.

Рівняння, ліва і права частини яких є раціональними виразами, називають *раціональними рівняннями*.

У перших двох із записаних вище рівнянь ліва і права частини є цілими виразами. Такі рівняння називають ***цілими раціональними рівняннями***. Якщо в рівнянні хоча б одна частина є дробовим виразом, то рівняння називають ***дробовим раціональним рівнянням***. Третє із записаних вище рівнянь є дробовим раціональним.

Як розв'язувати цілі раціональні рівняння, ми розглянули в попередніх класах. Розглянемо тепер, як розв'язувати дробові раціональні рівняння, тобто рівняння зі змінною у знаменнику.

3. Область визначення рівняння

Ліва і права частини дробових раціональних рівнянь можуть мати зміст не для всіх значень змінної.

Значення змінних, для яких ліва і права частини рівняння мають зміст, називають *допустимими значеннями змінної* в рівнянні.

Ці значення утворюють *область визначення рівняння* (ОВР), або *область допустимих значень* (ОДЗ) змінної в рівнянні.

***Областю визначення рівняння* (ОВР) називають множину значень змінної, для яких мають зміст обидві частини рівняння.**

4. Використання умови рівності дробу нулю

Нагадаємо, що $\frac{P}{Q} = 0$, коли $\begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$ У таких випадках кажуть, що рівняння $\frac{P}{Q} = 0$ *рівносильне системі* $\begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x}{x-2} = 3.$

Розв'язання. За допомогою тотожних перетворень і властивостей рівнянь зведемо рівняння до вигляду $\frac{P}{Q} = 0$, де P і Q – цілі раціональні вирази. Маємо:

$\frac{x}{x-2}=3;\quad \frac{x}{x-2}-\frac{3}{1}=0;\quad \frac{x-3(x-2)}{x-2}=0;\quad \frac{x-3x+6}{x-2}=0.$

Остаточно маємо рівняння: $\frac{6-2x}{x-2}=0.$

Щоб дріб $\frac{6-2x}{x-2}$ дорівнював нулю, треба, щоб чисельник $6-2x$ дорівнював нулю, а знаменник $x-2$ не дорівнював нулю.
Тоді, $6-2x=0$, звідки $x=3$. Для $x=3$ знаменник $x-2=3-2=1\neq 0$.
Отже, $x=3$ – єдиний корінь рівняння.
Розв'язування останнього рівносильного даному рівняння, враховуючи умову рівності дробу нулю, зручно записувати так:

$$\frac{6-2x}{x-2}=0;\quad \begin{cases}6-2x=0,\\ x-2\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x=3,\\ x\neq 2;\end{cases}\quad x=3.$$

Відповідь: 3.

Отже, розв'язуючи дробове раціональне рівняння, можна:

1) **за допомогою тотожних перетворень звести рівняння до вигляду** $\boldsymbol{\frac{P}{Q}=0}$**;**
2) **прирівняти чисельник P до нуля і розв'язати одержане ціле рівняння;**
3) **виключити з його коренів ті, за яких знаменник Q дорівнює нулю, і записати відповідь.**

Приклад 2. Чи є рівносильними рівняння

$$\frac{x-2}{x+1}=0 \text{ і } \frac{2x-x^2}{x-3}=0?$$

Розв'язання. Оскільки рівняння називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені або не мають коренів, знайдемо корені цих рівнянь.
Перше рівняння має єдиний корінь $x=2$, а друге – два корені $x=0$ і $x=2$ (розв'яжіть рівняння самостійно). Тому рівняння не є рівносильними.
Відповідь: ні.

5. Використання основної властивості пропорції

Якщо $\frac{P}{Q}=\frac{M}{N}$, то $PN=MQ$, де $Q\neq 0$, $N\neq 0$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{2x+1}{x-1}=\frac{x}{x-2}+1.$

Розв'язання. Знайдемо область визначення рівняння (ОВР). Оскільки знаменники дробів не можуть дорівнювати нулю, то $x - 1 \neq 0$ і $x - 2 \neq 0$. Маємо: $x \neq 1$ і $x \neq 2$, тобто ОВР містить усі числа, крім 1 і 2.

Зведемо рівняння до вигляду пропорції, додавши вирази у правій частині рівняння: $\dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{x + x - 2}{x-2}$.

Одержимо: $\dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2x-2}{x-2}$.

За основною властивістю пропорції, маємо:

$(2x + 1)(x - 2) = (2x - 2)(x - 1)$.

Розв'яжемо це рівняння:

$2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 2x - 2x + 2$,

звідки $x = 4$.

Оскільки число 4 належить ОВР, то 4 є його коренем.

Запис розв'язування, щоб не забути врахувати ОВР, зручно закінчити переходом від рівняння до системи, яка йому рівносильна:

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-2}; \qquad \begin{cases} (2x+1)(x-2) = (2x-2)(x-1), \\ x - 1 \neq 0, \\ x - 2 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 2x - 2x + 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2; \end{cases} \qquad x = 4.$$

Відповідь: 4.

Отже, для розв'язування дробового раціонального рівняння можна:

1) знайти область визначення рівняння (ОВР);

2) звести рівняння до вигляду $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{M}{N}$;

3) записати рівняння $P \cdot N = M \cdot Q$ **і розв'язати його;**

4) виключити з отриманих коренів ті, що не належать ОВР, і записати відповідь.

6. Метод множення обох частин рівняння на спільний знаменник дробів

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{x-2}{x^2-1} = \dfrac{5}{x^2-x} + \dfrac{5}{x^2+x}$.

Розв'язання. Знайдемо ОВР та найпростіший спільний знаменник усіх дробів рівняння, розклавши знаменники на множники:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x(x-1)} + \frac{5}{x(x+1)}.$$

ОВР містить усі числа x, для яких $x \neq 0$, $x - 1 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$. Отже, всі значення x, крім чисел 0, 1 і -1. А найпростішим спільним знаменником буде вираз $x(x - 1)(x + 1)$.

Помножимо обидві частини рівняння на цей вираз:

$$\left.\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x(x-1)} + \frac{5}{x(x+1)}\right| \cdot x(x-1)(x+1).$$

Матимемо: $x(x - 2) = 5(x + 1) + 5(x - 1)$, а після спрощення: $x^2 - 12x = 0$, тобто $x(x - 12) = 0$,

звідки $x = 0$ або $x = 12$.

Але число 0 не належить ОВР, тому не є його коренем.

Отже, число 12 – єдиний корінь рівняння.

Відповідь: 12.

Розв'язуючи дробове раціональне рівняння, можна:

1) знайти ОВР;
2) знайти найпростіший спільний знаменник дробів, що входять у рівняння;
3) помножити обидві частини рівняння на цей спільний знаменник;
4) розв'язати одержане ціле рівняння;
5) виключити з його коренів ті, що не належать ОВР, і записати відповідь.

? Які рівняння називають раціональними? ○ Яке рівняння називають цілим раціональним, а яке – дробовим раціональним? ○ Як можна розв'язати дробове раціональне рівняння?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

13.1. (*Усно.*) Назвіть цілі раціональні рівняння, дробові раціональні рівняння:

1) $\frac{2}{x} + \frac{x}{3} = 1$;
2) $x^2 - 2x(x + 3) = x - 7$;
3) $\frac{x+2}{4} - \frac{x-3}{8} = 15$;
4) $\frac{4}{x+2} - \frac{8}{x-3} = 15$.

13.2. Чи є число 1 коренем рівняння:

1) $\frac{x}{x+2} = 0$;
2) $\frac{x-1}{x+2} = 0$;
3) $\frac{x}{x-1} = 0$;
4) $\frac{x^2-1}{x} = 0$?

13.3. Чи є число 2 коренем рівняння:

1) $\frac{x-2}{x+3}=0$; 2) $\frac{x}{x+3}=0$;

3) $\frac{x}{x-2}=0$; 4) $\frac{4-x^2}{x+1}=0$?

13.4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x-2}=0$; 2) $\frac{x-3}{x}=0$; 3) $\frac{x+2}{x-1}=0$; 4) $\frac{x+5}{x}=0$.

13.5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x+1}=0$; 2) $\frac{x-2}{x}=0$; 3) $\frac{x+3}{x-4}=0$; 4) $\frac{x+7}{x}=0$.

2

13.6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-8}{x+4}=0$; 2) $\frac{3x+7}{x}=0$;

3) $\frac{x^2}{x-9}=0$; 4) $\frac{x-1}{1-x}=0$.

13.7. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x+12}{x-4}=0$; 2) $\frac{2x-5}{x}=0$;

3) $\frac{x^2}{x+1}=0$; 4) $\frac{2-x}{x-2}=0$.

13.8. Знайдіть корені рівняння:

1) $2-\frac{x+3}{x}=0$; 2) $\frac{x}{x+2}=2$;

3) $\frac{x}{x-4}=\frac{9}{5}$; 4) $\frac{3}{x-2}=\frac{2}{x-3}$.

13.9. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{2x+1}{x}-3=0$; 2) $\frac{x}{x-4}=5$;

3) $\frac{x}{x+2}=\frac{5}{3}$; 4) $\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x+4}$.

13.10. Чи є рівносильними рівняння:

1) $\frac{x}{x-2}=\frac{4}{x-2}$ і $\frac{x-5}{x}=\frac{3-x}{x}$;

2) $\frac{x^2+2x}{x-3}=\frac{x^2-4}{x-3}$ і $\frac{2x-3}{3x}-\frac{x-2}{3x}=0$?

13.11. Чи є рівносильними рівняння:

1) $\frac{x-4}{x}=\frac{2-x}{x}$ і $\frac{x}{x+1}=\frac{3}{x+1}$;

2) $\frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x^2 + 5}{x - 1}$ і $\frac{3x - 1}{2x} - \frac{2x - 5}{2x} = 0$?

13.12. Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

1) $\frac{2x^2 - 1}{x + 1} = 2x$;
2) $\frac{3x^2 + 1}{x} = 3x - 1$;
3) $\frac{x - 3}{2x^2 + 1} = \frac{1}{2x}$;
4) $\frac{4x^2 - 3}{2x - 1} = 2x + 3$.

13.13. Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

1) $\frac{3x^2 + 2}{x - 2} = 3x$;
2) $\frac{2x^2 - 1}{x} = 2x + 1$;
3) $\frac{2x - 3}{2x^2 + 3} = \frac{1}{x}$;
4) $\frac{6x^2 - 1}{2x + 3} = 3x - 1$.

13.14. Знайдіть дріб, що дорівнює $\frac{2}{3}$, у якого знаменник на 5 більший за чисельник.

13.15. Знайдіть дріб, що дорівнює $\frac{1}{5}$, у якого чисельник на 12 менший від знаменника.

13.16. Яке число треба додати до чисельника дробу $\frac{3}{10}$, щоб отримати дріб $\frac{1}{2}$?

13.17. Яке число треба відняти від знаменника дробу $\frac{5}{18}$, щоб отримати дріб $\frac{1}{3}$?

3

13.18. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x + 4}{2x - 1} - \frac{x + 8}{2x + 1} = 0$;
2) $\frac{1}{5x} - \frac{1}{10x} = \frac{1}{30}$;
3) $2 + \frac{1}{x - 2} = \frac{8 - x}{2 - x}$;
4) $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{5x - 5} = \frac{1}{10}$.

13.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x + 1}{3x + 1} - \frac{x}{3x - 1} = 0$;
2) $\frac{1}{6x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$;
3) $3 + \frac{1}{1 - x} = \frac{x}{x - 1}$;
4) $\frac{1}{4x + 4} - \frac{1}{x + 1} = \frac{3}{8}$.

13.20. Чи є рівносильними рівняння

$$\frac{2x+6}{x+1}+\frac{3x-7}{x-2}=5 \text{ і } \frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}?$$

13.21. Чи є рівносильними рівняння

$$\frac{3x-12}{x-3}+\frac{x+12}{x}=4 \text{ і } \frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}?$$

13.22. Чисельник дробу на 5 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 14, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, обернений даному. Знайдіть початковий дріб.

13.23. Знаменник дробу на 3 більший за чисельник. Якщо до чисельника додати 8, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, обернений даному. Знайдіть початковий дріб.

13.24. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{x^2-2}{x^2+2x}=\frac{x-1}{x}+\frac{x+3}{x+2}$; 2) $\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}$.

13.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-2}{x^2-x}=\frac{x+2}{x}+\frac{x+3}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+8}{x^2-4}=\frac{x}{x+2}+\frac{3}{x-2}$.

4

13.26. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{|x-1|-5}{x-6}=0$; 2) $\frac{|x-1|-1}{x(x-2)}=0$.

13.27. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{|x-2|-3}{x-5}=0$; 2) $\frac{|x-2|-2}{x(x-4)}=0$.

13.28. Для яких значень a рівняння не має розв'язків:

1) $\frac{x-2a}{x(x-8)}=0$; 2) $\frac{x-a+1}{x^2-3x}=0$?

13.29. Для яких значень a рівняння $\frac{(x-a)(x-2a-1)}{x-3}=0$ має лише один корінь?

Вправи для повторення

13.30. Спростіть вираз $\frac{10x}{x+2}-\frac{x-8}{3x+6}\cdot\frac{120}{x^2-8x}$ та знайдіть його значення, якщо $x=20$. Відтак дізнаєтеся, скільки олімпійських медалей у скарбниці гімнастки Лариси Латиніної, почесної громадянки міста Херсон.

13.31. Скоротіть дріб

$$\frac{4a^2 - b^2 + 2a - b}{4a^2 + 4ab + b^2 + 2a + b}.$$

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

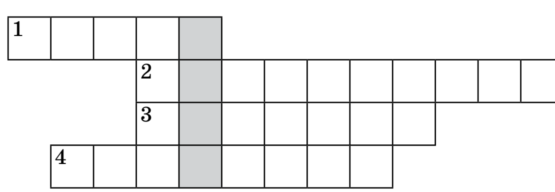
13.32. 1) Накресліть чотирикутник, дві сторони якого між собою паралельні, а дві інші – непаралельні.
2) Яка найбільша кількість гострих кутів може бути в такому чотирикутнику?

Життєва математика

13.33. У червні 1 кг помідорів на ринку коштував у середньому 60 грн. У липні ця вартість зменшилася на 30 %, а в кінці серпня – ще на 50 %. Скільки в середньому коштував на ринку 1 кг помідорів у кінці серпня?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

13.34. *Видатні українці.* Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використовуйте додаткову літературу та інтернет) і отримаєте у виділеному стовпчику прізвище видатного французького математика, про дослідження якого дізнаєтеся в одному з наступних розділів.



1. Найтитулованіша українська диригентка, котра стала першою жінкою-диригентом за майже півторастолітню історію «Метрополітен-опера» в Нью-Йорку. Входить до трійки найкращих диригенток сучасності.
2. Інженер-авіаконструктор, що народився в Україні, конструктор першого гелікоптера.
3. Український футболіст, володар «Золотого м’яча» 1986 року.
4. Видатна українська письменниця, лауреатка Шевченківської премії. Почесна професорка Києво-Могилянської академії, докторка Львівського та Чернівецького університетів.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3 (§§ 10–13)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Знайдіть добуток $\frac{15}{m^2} \cdot \frac{m}{5}$.

А. $\frac{m}{3}$ **Б.** $\frac{3}{m}$ **В.** $\frac{5}{m}$ **Г.** $3m$

2. Виконайте ділення $\frac{3}{p} : \frac{9}{p^3}$.

А. $\frac{27}{p^4}$ **Б.** $\frac{3}{p^2}$ **В.** $3p^2$ **Г.** $\frac{p^2}{3}$

3. Укажіть рівняння, коренем якого є число 2.

А. $\frac{x-2}{x} = 0$ **Б.** $\frac{x}{x-2} = 0$

В. $\frac{x+2}{x-1} = 0$ **Г.** $\frac{x-2}{x-2} = 0$

2

4. Виконайте множення $\frac{m^2 - m}{p^2} \cdot \frac{ap}{m^2 - 2m + 1}$.

А. $\frac{a}{p(m-1)}$ **Б.** $\frac{am}{p(m+1)}$ **В.** $\frac{am}{p(m-1)}$ **Г.** $\frac{am}{m-1}$

5. $\left(-\frac{2p^7}{a^5}\right)^3 = \ldots$

А. $\frac{8p^{21}}{a^{15}}$ **Б.** $-\frac{8p^{21}}{a^{15}}$ **В.** $-\frac{6p^{21}}{a^{15}}$ **Г.** $-\frac{8p^{10}}{a^8}$

6. Знайдіть корінь рівняння $\frac{2x^2 - 5}{x+1} = 2x$.

А. $-2{,}5$ **Б.** $2{,}5$ **В.** $-\frac{2}{5}$ **Г.** Коренів немає

3

7. Спростіть вираз $(25x^2 - 10x + 1) : \frac{10x^2 - 2x}{4x}$.

А. 2 **Б.** $10x^2 - 2x$ **В.** $10x - 2$ **Г.** $\frac{5x-1}{2}$

8. Знайдіть значення виразу $\frac{8}{x+1} : \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1}\right)$, якщо $x = 2{,}01$.

А. 0 **Б.** 1 **В.** 2,01 **Г.** 2

9. Укажіть рівняння, що є рівносильним рівнянню

$$\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=\frac{18}{x^2-9}.$$

А. $x-3=0$ **Б.** $\frac{x+2}{x}=0$ **В.** $\frac{x}{x+2}=0$ **Г.** $\frac{5x-x^2}{x}=0$

4

10. Спростіть вираз $\frac{0,1a^3+0,8}{0,2a^2-0,8}:\frac{0,5a^2-a+2}{0,25a+0,5}$.

А. $\frac{a+2}{4(a-2)}$ **Б.** $\frac{a+2}{a-2}$ **В.** $\frac{a-2}{4(a+2)}$ **Г.** $\frac{4(a+2)}{a-2}$

11. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$, якщо $x-\frac{1}{x}=5$.

А. 3 **Б.** 7 **В.** 23 **Г.** 27

12. Розв’яжіть рівняння $\frac{2-|x-5|}{x-7}=0$.

А. Розв’язків немає **Б.** 7 **В.** 3 **Г.** 3; 7

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3

13. Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г), якщо $a=7$.

Вираз	*Значення виразу*
1. $\frac{a^2-4}{16}\cdot\frac{8}{a+2}$	**А.** 2
2. $\frac{a^2+6a+9}{20}:\frac{a+3}{4}$	**Б.** 2,25
3. $\left(\frac{a}{4}+\frac{4}{a}+2\right)\cdot\frac{7}{a+4}$	**В.** 2,5
	Г. 2,75

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 10–13

1

1. Виконайте множення: 1) $\frac{c^4}{4}\cdot\frac{5}{c^2}$; 2) $\frac{12}{a^2}\cdot\frac{a}{3}$.

2. Виконайте ділення:

1) $\frac{p}{5}:\frac{p}{7}$; 2) $\frac{2}{a^2}:\frac{4}{a}$.

3. Чи є число 4 коренем рівняння:

1) $\frac{x^2-16}{x}=0$; 2) $\frac{x}{x-4}=0$?

2 **4.** Виконайте дії:

1) $\frac{2a^3}{15m^2} \cdot \left(-\frac{5m}{6a^3}\right)$; 2) $\frac{x^2 - xy}{a^2} \cdot \frac{ab}{x^2 - 2xy + y^2}$;

3) $-\frac{3m^2}{7c^3} : \left(-\frac{9m^3}{28c}\right)$; 4) $\frac{x^2 - 16}{3x - 6} : \frac{2x + 8}{5x - 10}$.

5. Піднесіть дріб до степеня: 1) $\left(-\frac{2a^3}{m^2}\right)^3$; 2) $\left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^{10}$.

6. Розв'яжіть рівняння: 1) $\frac{4x + 8}{x - 3} = 0$; 2) $\frac{4x^2 - 8}{x + 1} = 4x$.

3 **7.** Спростіть вираз $\left(\frac{2a + 1}{2a - 1} - \frac{2a - 1}{2a + 1}\right) : \frac{2a^2}{4a^2 - 1}$.

8. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{7}{x + 7} + \frac{x^2 + 49}{x^2 - 49} - \frac{7}{7 - x}\right) \cdot \frac{x - 7}{x^2 + 14x + 49} = \frac{1}{x + 7}.$$

4 **9.** Відомо, що $x + \frac{1}{x} = 9$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Додаткові завдання

4 **10.** Спростіть вираз $\frac{0{,}2a^3 - 1{,}6}{0{,}1a^2 - 1{,}6} : \frac{0{,}5a^2 + a + 2}{0{,}25a - 1}$.

11. Розв'яжіть рівняння $\frac{|2 - x| - 3}{x - 5} = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 3

До § 10

1 **1.** Виконайте множення:

1) $\frac{7}{m} \cdot \frac{m}{9}$; 2) $\frac{p^2}{4} \cdot \frac{5}{p}$; 3) $\frac{4}{b} \cdot \frac{b^3}{3}$; 4) $\frac{c}{5} \cdot \frac{10}{c^2}$.

2 **2.** Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\frac{4}{15m^2} \cdot \frac{5m}{16}$; 2) $\frac{t^3}{15} \cdot \frac{20}{tk}$; 3) $-\frac{24m}{5a^2} \cdot \frac{15a}{8m^3}$;

4) $-12x \cdot \left(-\frac{p}{16x^2}\right)$; 5) $15m^2n \cdot \frac{7}{25m^3n}$; 6) $\frac{7c^3}{12a^8} \cdot \left(-\frac{8a^5}{21c}\right)$.

3. Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2-3x}{7}\cdot\frac{21}{x^2-9}$; 2) $-\frac{3x-y}{6x+6}\cdot\frac{8x+8}{y-3x}$;

3) $\frac{a^2-2a+1}{15m^2}\cdot\frac{5m}{a^2-1}$; 4) $\frac{c^2+2c}{12ab}\cdot\frac{20a^2b}{c^2+4c+4}$.

4. Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{c}{2m}\right)^3$; 2) $\left(-\frac{p}{a^2}\right)^3$;

3) $\left(-\frac{3a^3}{b^2}\right)^4$; 4) $\left(-\frac{t^2c^3}{p^{10}}\right)^8$.

5. Виконайте дію:

1) $\frac{a^7+a^5}{a^6-a^4}\cdot\frac{a^6-a^8}{a^3+a^5}$; 2) $-\frac{a^2-25}{a^2-4b^2}\cdot\left(-\frac{a+2b}{2a-10}\right)$;

3) $\frac{5c^5-3c^4}{c^3-8}\cdot\frac{2c-4}{3c^2-5c^3}$; 4) $(a^2+4a+4)\cdot\left(-\frac{4}{10+5a}\right)$.

3 **6.** Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\left(-\frac{25x^2y^3}{9t}\right)^2\cdot\left(\frac{3t^4}{5xy^2}\right)^3$; 2) $\frac{(a-b)^3}{a+b}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$.

4 **7.** Виконайте множення $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2-(a-c)x-ac}\cdot\frac{x^2-c^2}{x^2-a^2}$.

8. Доведіть, що значення виразу $\frac{0,5x^2+2}{0,5x^2-x+2}\cdot(2-x)\cdot\frac{4+0,5x^3}{8-0,5x^4}$ не залежить від будь-яких допустимих значень змінної.

9. Доведіть, що значення виразу $\frac{a^2-ab+ac-bc}{a^2+ab-ac-bc}\cdot\frac{a^2+bc-ab-ac}{a^2+bc+ab+ac}$ для всіх допустимих значень змінних є невід'ємним.

До § 11

1 **10.** Виконайте ділення:

1) $\frac{c}{3}:\frac{a}{2}$; 2) $\frac{p}{4}:\frac{c}{17}$; 3) $\frac{3}{a}:\frac{7}{a}$; 4) $\frac{5}{m^2}:\frac{3}{m}$.

2 **11.** Спростіть вираз:

1) $\frac{12a}{5b^2}:\frac{16a}{15b}$; 2) $-\frac{7m^2}{n^2}:\frac{21m}{n^3}$; 3) $-\frac{5a^3}{4b^2}:(-10a^2)$;

4) $20m^2n:\left(-\frac{4m^3}{p}\right)$; 5) $\frac{5c^2}{9m^3}:\frac{25c^3}{81m}$; 6) $-\frac{22x^2}{39a}:\left(-\frac{33x^3}{26a^4}\right)$.

12. Виконайте дію:

1) $\dfrac{ax - xy}{a} : \dfrac{a^2 - ay}{x}$;
2) $\dfrac{a^2 - b^2}{5a} : \dfrac{3a + 3b}{10a^2}$;
3) $\dfrac{x^2 - 36}{a - 2b} : \dfrac{x^2 + 12x + 36}{2b - a}$;
4) $\dfrac{3a - a^2}{a^2 - 4a + 4} : \dfrac{3 - a}{4 - 2a}$.

3 **13.** Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\dfrac{27 + x^3}{81 - x^4} : \dfrac{x^2 - 3x + 9}{x^2 + 9}$;
2) $\dfrac{(10x - 4y)^2}{100} : (2,5x^2 - 0,4y^2)$.

14. Подайте дріб $\dfrac{\dfrac{a^2 + 5a}{a^2 - 9}}{\dfrac{a^2 - 25}{a^2 - 3a}}$ у вигляді раціонального дробу.

4 **15.** Доведіть, що значення виразу $\dfrac{2x^3 + 2y^3}{xy - x^2} : \dfrac{x^3 - x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$ для всіх допустимих значень змінної набуває лише недодатних значень.

16. Обчисліть значення виразу $\dfrac{27a^3 - 64b^3}{b^2 - 4} : \dfrac{9a^2 + 12ab + 16b^2}{b^2 + 4b + 4}$, якщо $a = 4$, $b = 3$.

17. Доведіть тотожність $\dfrac{a^2 - 16}{a^2 - ab + 5a - 5b} : \dfrac{a^2 + 5a + 4}{a^2 - ab + a - b} = \dfrac{a - 4}{a + 5}$.

До § 12

2 **18.** Виконайте дії:

1) $\left(\dfrac{2a}{2a - 1} + 1\right) \cdot \dfrac{6a - 3}{4a^2 - a}$;
2) $\left(m + \dfrac{m^2}{3 - m}\right) : \dfrac{m + 3}{m - 3}$;
3) $\left(\dfrac{a}{a - b} - \dfrac{a}{a + b}\right) : \dfrac{ab}{a + b}$;
4) $\left(p - \dfrac{p^2 - 3}{p + 1}\right) \cdot \dfrac{p^2 - 1}{p + 3}$.

19. Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 2\right) : (a + b) = \dfrac{a + b}{ab}$;
2) $\dfrac{m - n}{mn} : \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{m^2}\right) = \dfrac{mn}{m + n}$.

3 **20.** Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{1}{a + b} - \dfrac{a}{b^2 + ab}\right) \cdot \left(\dfrac{b^2}{a^3 - ab^2} - \dfrac{b}{a^2 - ab}\right)$;

2) $\left(\dfrac{6a + 1}{a - 3} + \dfrac{6a - 1}{a + 3}\right) : \dfrac{2a^2 + 1}{a - 3}$.

21. Обчисліть значення виразу $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{b}\right)$, якщо $a = 4$, $b = 3$.

22. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $\frac{2x}{x+3}+(x-3)^2\left(\frac{2}{x^2-6x+9}+\frac{1}{9-x^2}\right)$;

2) $\left(\frac{3}{4m^2-9}-\frac{2m}{4m^2-12m+9}\right)\cdot\frac{8m^3-18m}{4m^2+9}+\frac{3}{2m-3}$.

23. Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{a}{a-3}+\frac{10}{a-3}+\frac{25}{a^2-3a}\right):\left(\frac{5}{a^2}+\frac{2}{a}+\frac{1}{5}\right)=\frac{5a}{a-3}$;

2) $\left(\frac{a-1}{a^2-a+1}-\frac{4a-5}{a^3+1}\right):\frac{2-a}{4a^2-4a+4}=\frac{4(2-a)}{a+1}$.

4 **24.** Відомо, що $x^2+\frac{1}{x^2}=23$. Знайдіть значення виразу $x+\frac{1}{x}$.

25. Спростіть вираз

$$\left(\frac{4}{x^2-6x}-\frac{2}{6-x}+1\right)\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{2}{x^3-6x^2+12x-8}\right).$$

26. Доведіть, що вираз

$$\frac{x^2}{x^2+4x+4}\cdot\frac{8x^2-32}{x^3-2x^2}+\frac{x^5-8x^2}{x}:(x^2-4)$$

для всіх допустимих значень змінної набуває лише додатних значень.

27. Доведіть, що вираз

$$\left(\frac{3m+2}{3m^2+1}-\frac{18m^3-m-9}{9m^4-1}+\frac{3m-2}{3m^2-1}\right):\frac{m^2+10m+25}{9m^4-1}$$

для всіх $m < -5$ набуває лише від'ємних значень.

28. Чи може значення виразу

$$\left(\frac{1}{x^2-xy}-\frac{3y^2}{x^4-xy^3}-\frac{y}{x^3+x^2y+xy^2}\right)\left(y+\frac{x^2}{x+y}\right)$$

для деяких значень змінних x і y дорівнювати нулю?

До § 13

1 **29.** Чи є число 3 коренем рівняння:

1) $\frac{x}{x+2}=0$; 2) $\frac{x-3}{x+1}=0$; 3) $\frac{x+2}{x-3}=0$; 4) $\frac{x^2-9}{x}=0$?

30. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x-9}{2-x}=0$; 2) $\dfrac{2x-4}{2-x}=0$;

3) $\dfrac{x}{x+3}-2=0$; 4) $\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{2}{5}$;

5) $\dfrac{x^2-x}{x+2}=\dfrac{x^2-8}{x+2}$; 6) $\dfrac{4x^2-1}{x+1}=4x$.

31. Яке одне й те саме число треба додати до чисельника і знаменника дробу $\dfrac{5}{12}$, щоб отримати дріб $\dfrac{1}{2}$?

32. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{2x-1}{3x+1}-\dfrac{2x+1}{3x-5}=0$; 2) $4+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{2-x}$;

3) $\dfrac{8}{3x-3}+\dfrac{2+x}{x-1}=\dfrac{5}{2-2x}-\dfrac{5}{18}$; 4) $\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}$.

33. Катер долає 80 км за течією річки за той самий час, що й 64 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

34. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{5}{(3x-1)^2}+\dfrac{1}{(3x+1)^2}=\dfrac{6}{9x^2-1}$;

2) $\dfrac{|4x+3|}{x-1}=\dfrac{7}{x-1}$.

35. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяку роботу за 8 днів. Перший робітник може виконати цю роботу самостійно вдвічі швидше, ніж другий. За скільки днів кожний з робітників може виконати цю роботу самостійно?

36. Розв'яжіть рівняння, де x – змінна:

1) $\dfrac{a}{x}=5$; 2) $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x}=2$.

Головне в темі 3

МНОЖЕННЯ ДРОБІВ. ПІДНЕСЕННЯ ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити окремо чисельники й окремо знаменники та записати перший добуток чисельником, а другий – знаменником дробу.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

Щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник та знаменник і перший результат записати в чисельник, а другий – у знаменник дробу.

ДІЛЕННЯ ДРОБІВ

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Щоб поділити один дріб на інший, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника.

РІВНОСИЛЬНІ РІВНЯННЯ

Два рівняння називають ***рівносильними***, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і ті рівняння, які коренів не мають.

РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рівняння, ліва і права частини яких є раціональними виразами, називають ***раціональними рівняннями***.

МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1. *Використання умови рівності дробу нулю*

1) За допомогою тотожних перетворень звести рівняння до вигляду $\frac{P}{Q}=0$;
2) прирівняти чисельник P до нуля і розв’язати одержане ціле рівняння;
3) виключити з його коренів ті, для яких знаменник Q дорівнює нулю, і записати відповідь.

2. *Використання основної властивості пропорції*

1) Знайти область визначення рівняння (ОВР);
2) звести рівняння до вигляду $\frac{P}{Q}=\frac{M}{N}$;

3) записати ціле рівняння $P \cdot N = M \cdot Q$ і розв'язати його;
4) виключити з отриманих коренів ті, що не належать ОДЗ, і записати відповідь.

3. *Метод множення обох частин рівняння на спільний знаменник дробів*

1) Знайти ОВР;
2) знайти найпростіший спільний знаменник дробів, що входять у рівняння;
3) помножити обидві частини рівняння на цей спільний знаменник;
4) розв'язати одержане ціле рівняння;
5) виключити з його коренів ті, що не належать ОВР, і записати відповідь.

Бажаємо тобі стати відомішим за Остроградського

Михайло Васильович Остроградський народився 12 вересня 1801 року в с. Пашенна Полтавської губернії (нині с. Пашенівка). Діди та прадіди Михайла Васильовича служили в козацькому війську, брали участь у багатьох боях, не раз виявляли військову доблесть і героїзм. Мабуть, саме тому в дитинстві Михайло Васильович так мріяв стати військовим. Але йому судилося стати всесвітньо відомим ученим.

У дитинстві Михайло виявляв виняткову спостережливість і захоплювався вимірюваннями. Навчався він у пансіоні при Полтавській гімназії, потім у самій гімназії. Закінчивши гімназію, став вільним слухачем Харківського університету, а згодом і його студентом. Після закінчення університету з відзнакою в серпні 1820 року менш ніж за рік потому (у квітні 1821 року) отримує ступінь кандидата наук за дослідження в галузі прикладної математики. У 1822 році Остроградський вирушає до Парижа з метою удосконалення своєї математичної освіти, ставши слухачем університету в Сорбонні. Саме там він публікує свої перші наукові праці, стає відомим науковцем та здобуває авторитет у французьких математиків. Але через постійний брак коштів Михайло Васильович був вимушений залишити Париж, майже пішки подолавши взимку 1828 року шлях від Парижа до Петербурга.

М. В. Остроградський (1801–1862)

Наукові кола Петербурга зустріли молодого вченого з радістю і надією. Його авторитет серед петербурзьких діячів науки був високим і незаперечним. У тому ж 1828 році Остроградський починає викладацьку діяльність у Морському кадетському корпусі Петербурга та стає ад'юнктом Петербурзької академії наук. А з 1830 року викладає ще в чотирьох вищих навчальних закладах Петербурга. У 1834 році Остроградського було обрано членом Американської академії наук, у 1841 році – членом Туринської академії, у 1853 – членом Римської академії Лінчів і в 1856 році – членом-кореспондентом Паризької академії наук.

Лекції Остроградського відвідували не лише студенти, а й викладачі, професори, відомі математики. Усіх приваблювала його система викладання предмета – широка загальність теми, виразність і стислість викладу, а також веселий характер та гострий розум. На лекціях він обов'язково вживав українські слова, прислів'я та приказки. Тому студенти завжди згадували його лекції із захватом.

Улюбленим письменником Остроградського був Т. Г. Шевченко, з яким він був особисто знайомий та значну частину творів якого знав напам'ять і охоче декламував. У 1858 році, коли Тарас Григорович повертався із заслання через Петербург на батьківщину, Михайло Васильович запропонував Кобзареві для проживання свою петербурзьку квартиру.

Повернувшись із заслання, Шевченко писав у «Щоденнику»: «Великий математик прийняв мене з розпростертими обіймами, як земляка і як свого сім'янина, що надовго кудись виїжджав».

Михайло Васильович був визначною, оригінальною, усебічно обдарованою людиною. Його високо цінували не тільки за розум, а й за незалежність, демократизм, скромність, щирість і простоту, за повагу до людей праці, за його гідність. Перебуваючи на вершині слави, вшанований за свої наукові праці в усій Європі, Остроградський поводив себе надзвичайно просто і не любив говорити про свої заслуги.

І хоч які б проблеми розв'язував учений (він займався алгеброю, прикладною математикою, теорією чисел, теорією ймовірностей, механікою тощо), усі його наукові праці позначені глибиною думки й оригінальністю, у них незмінно присутня широта його поглядів, уміння глибоко зануритися в суть проблеми і знайти численні узагальнення.

На все життя Михайло Васильович зберіг любов до рідної землі та рідної мови. Майже щороку влітку він виїжджав в Україну, щоб поринути в повний спокій і помилуватися чудовими краєвидами. Улітку 1861 року Остроградський, відвідуючи своє рідне село, захворів і 1 січня 1862 року помер.

За свою майже 40-річну наукову діяльність Михайло Васильович написав понад 50 наукових праць з різних галузей математики: математичного аналізу, аналітичної і небесної механіки, математичної фізики, теорії ймовірностей. Свої педагогічні погляди М. В. Остроградський виклав у підручниках з елементарної і вищої математики.

Ім'я М. В. Остроградського носить Кременчуцький національний університет.

Попри те, що майже все своє життя Михайло Остроградський займався наукою поза межами України, він став широко відомим серед своїх співвітчизників. Авторитет і популярність М. В. Остроградського були настільки значними, що саме його ім'я стало синонімом ученого. Батьки, віддаючи дитину на навчання, бажали їй «стати другим Остроградським».

А автор цього підручник бажає своїм учням і вам «стати відомішими за Остроградського».

ТЕМА 4

ТРАПЕЦІЯ. ТЕОРЕМА ФАЛÉСА

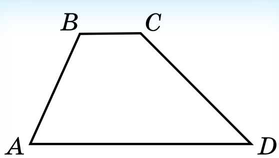
У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **дізнаєтеся** про трапецію; вписані та описані чотирикутники; середню лінію трикутника та середню лінію трапеції; теорему Фалéса;
- **навчитеся** обґрунтовувати належність чотирикутника до певного виду, застосовувати вивчені означення і властивості до розв'язування задач.

§ 14. Трапеція

1. Означення трапеції, її елементи та властивості

Трапецією **називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні.**



Трапеція $ABCD$

AD і BC – ***основи трапеції*** – це паралельні сторони;

AB і CD – ***бічні сторони трапеції*** – це непаралельні сторони.

Розглянемо деякі *властивості трапеції.*

1. Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.

Оскільки $AD \parallel BC$, то $\angle A + \angle B = 180°$ (як сума внутрішніх односторонніх кутів). Аналогічно $\angle C + \angle D = 180°$. ■

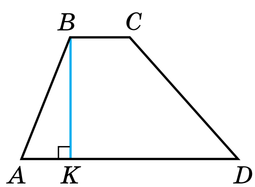
2. Трапеція є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle A < 180°$, $\angle B < 180°$.
Аналогічно $\angle C < 180°$, $\angle D < 180°$.
Отже, трапеція – опуклий чотирикутник.

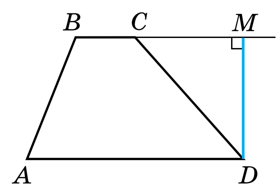
2. Висота трапеції

Висотою трапеції **називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки основи трапеції до прямої, що містить протилежну основу.**

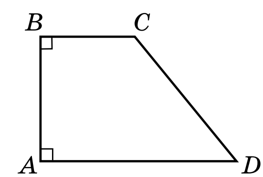
Зазвичай висоту трапеції проводять з її вершини. На малюнку 14.1 BK – висота трапеції $ABCD$, а на малюнку 14.2 DM – висота трапеції $ABCD$.



Мал. 14.1



Мал. 14.2



Мал. 14.3

3. Прямокутна трапеція

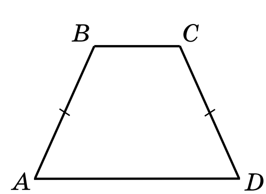
Трапецію називають ***прямокутною***, якщо один з її кутів – прямий. На малюнку 14.3 зображено прямокутну трапецію $ABCD$ ($\angle A = 90°$). Очевидно, що $\angle B = 90°$. AB є меншою бічною стороною прямокутної трапеції та її висотою.

Приклад 1. У прямокутній трапеції гострий кут на 30° менший від тупого. Знайти ці кути трапеції.

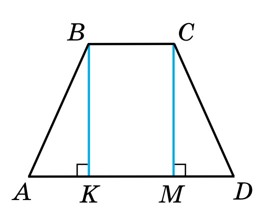
Розв'язання. Розглянемо прямокутну трапецію $ABCD$ (мал. 14.3).
1) Позначимо $\angle D = x$, тоді $\angle C = x + 30°$.
2) Оскільки сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°, то маємо $\angle C + \angle D = 180°$; $x + x + 30° = 180°$; $x = 75°$.
3) Отже, $\angle D = 75°$; $\angle C = 75° + 30° = 105°$.
Відповідь: 75°; 105°.

4. Рівнобічна трапеція та її властивості

Трапецію називають ***рівнобічною***, якщо її бічні сторони рівні. На малюнку 14.4 – рівнобічна трапеція $ABCD$.



Мал. 14.4



Мал. 14.5

Розглянемо деякі важливі *властивості рівнобічної трапеції*.

1. У рівнобічній трапеції кути при основі між собою рівні.

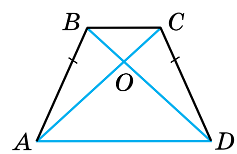
Доведення. 1) Нехай у трапеції $ABCD$ $AB = CD$. Проведемо висоти трапеції BK і CM з вершин її тупих кутів B і C (мал. 14.5). Утворився прямокутник $BKMC$. Тому $BK = CM$.

2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $\angle BAD = \angle CDA$.

3) Також $\angle ABK = \angle DCM$. Оскільки $\angle KBC = \angle MCB = 90°$, то $\angle ABC = \angle ABK + 90°$ і $\angle DCB = \angle DCM + 90°$. Тому $\angle ABC = \angle DCB$. ■

2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

Доведення. Розглянемо малюнок 14.6. $\angle BAD = \angle CDA$ (як кути при основі рівнобічної трапеції), $AB = DC$, AD – спільна сторона трикутників ABD і DCA. Тому $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за двома сторонами та кутом між ними). Отже, $AC = BD$. ■



Мал. 14.6

Приклад 2. O – точка перетину діагоналей рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AD і BC (мал. 14.6). Довести, що $AO = OD$, $BO = OC$.

Доведення. 1) $\triangle ABD = \triangle DCA$ (доведено вище).

2) Тому $\angle ODA = \angle OAD$. За ознакою рівнобедреного трикутника – трикутник AOD – рівнобедрений. Тому $AO = OD$.

3) Оскільки $AC = BD$ і $AO = OD$, то $OC = BO$ (бо $OC = AC - AO$, $BO = BD - OD$). ■

Приклад 3. BK і CM – висоти рівнобічної трапеції $ABCD$, проведені з вершин її тупих кутів, $AD = a$, $BC = b$ (мал. 14.5). Довести, що $AK = MD = \dfrac{a-b}{2}$; $AM = KD = \dfrac{a+b}{2}$.

Доведення. 1) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою), тому $AK = MD$.

2) $BKMC$ – прямокутник, тому $KM = BC = b$.

3) $AK = MD = \dfrac{AD - KM}{2} = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{a-b}{2}$.

4) $AM = AD - DM = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{2a - a + b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

5) $KD = AD - AK = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

Отже, довели, що $AK = MD = \dfrac{a-b}{2}$; $AM = KD = \dfrac{a+b}{2}$. ■

5. Ознака рівнобічної трапеції

Т Теорема (ознака рівнобічної трапеції). **Якщо у трапеції кути при одній основі рівні, то трапеція – рівнобічна.**

Доведення. 1) Нехай у трапеції $ABCD$ кути при більшій основі AD рівні (мал. 14.5), тобто $\angle BAD = \angle CDA$. Проведемо висоти BK і CM, які рівні між собою.

2) Тоді $\triangle BAK = \triangle CDM$ (за катетом і протилежним кутом). Тому $AB = DC$. Трапеція рівнобічна, що й треба було довести. ■

А ще раніше...

Термін «трапеція» грецького походження (грецькою мовою «трапедзіон» означає «столик», зокрема столик для обіду; слова «трапеція» і «трапеза» – спільнокореневі).

У своїй праці «Начала» Евклід під терміном «трапеція» розумів будь-який чотирикутник, який не є паралелограмом. Більшість математиків середньовіччя використовувала термін «трапеція» з тим самим змістом.

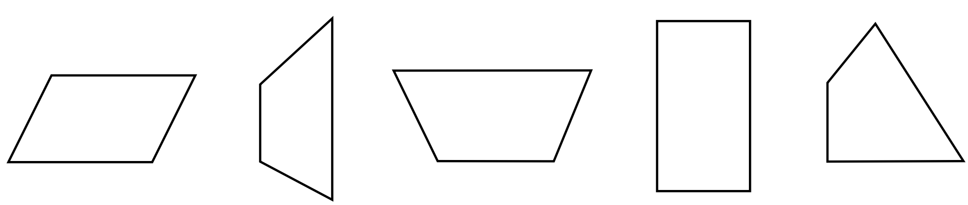
Трапеція в сучасному розумінні вперше трапляється в давньогрецького математика Посидонія (I ст.). Проте лише починаючи з XVIII ст., цей термін став загальновживаним для чотирикутників, у яких дві сторони паралельні, а дві інші – непаралельні.

Яку фігуру називають трапецією? ○ Що називають основами трапеції, бічними сторонами трапеції? ○ Сформулюйте властивості трапеції. ○ Що таке висота трапеції? ○ Яку трапецію називають прямокутною, яку – рівнобічною? ○ Сформулюйте й доведіть властивості рівнобічної трапеції. ○ Сформулюйте й доведіть ознаку рівнобічної трапеції.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

14.1. На яких малюнках (14.7–14.11) зображено трапецію?



Мал. 14.7 Мал. 14.8 Мал. 14.9 Мал. 14.10 Мал. 14.11

14.2. Накресліть трапецію $PKML$ ($PK \parallel ML$). Укажіть основи трапеції, бічні сторони трапеції.

14.3. Накресліть трапецію $DMFK$ ($DM \parallel FK$). Укажіть основи трапеції, бічні сторони трапеції.

14.4. Накресліть прямокутну трапецію $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90°$).

14.5. Накресліть рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$).

14.6. Два кути трапеції дорівнюють 30° і 110°. Знайдіть два інших її кути.

14.7. Два кути трапеції дорівнюють 100° і 50°. Знайдіть два інших кути трапеції.

2

14.8. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 10 см, а периметр 28 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

14.9. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 7 см і 5 см, а бічна сторона – 3 см. Знайдіть периметр трапеції.

14.10. Чи існує трапеція, у якої два протилежних кути:
1) гострі; 2) прямі; 3) тупі?
У разі ствердної відповіді накресліть таку трапецію.

14.11. Чи існує трапеція, у якої:
1) основи між собою рівні; 2) три сторони між собою рівні?
У разі ствердної відповіді накресліть таку трапецію.

14.12. Чи існує трапеція, у якої:
1) три кути прямі; 2) два протилежних кути рівні?
У разі ствердної відповіді накресліть таку трапецію.

14.13. Сторони AD і BC – основи трапеції $ABCD$. Доведіть, що $\angle CAD = \angle ACB$.

14.14. Чи можуть кути трапеції, узяті в послідовному порядку, відноситись як:
1) 2 : 3 : 4 : 1; 2) 2 : 3 : 5 : 2?

14.15. Чи можуть кути трапеції, узяті в послідовному порядку, відноситись як:
1) 3 : 1 : 2 : 2; 2) 3 : 1 : 2 : 4?

14.16. У трапеції, яка не є рівнобічною, два кути дорівнюють 40° і 140°. Чи можна знайти два інших її кути?

14.17. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини гострого кута, утворює з бічною стороною кут 42°. Знайдіть кути трапеції.

14.18. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, утворює з бічною стороною кут 54°. Знайдіть кути трапеції.

14.19. У трапеції $ABCD$ AB – більша основа. Прямі BC і AD перетинаються в точці E, $\angle ECD = 40°$, $\angle BEA = 70°$. Знайдіть кути трапеції.

14.20. У трапеції $ABCD$ BC – менша основа. На відрізку AD взято точку E так, що $BE \parallel CD$, $\angle ABE = 60°$, $\angle BEA = 40°$. Знайдіть кути трапеції.

14.21. У прямокутній трапеції гострий кут удвічі менший від тупого. Знайдіть кути трапеції.

14.22. У прямокутній трапеції тупий кут на 40° більший за гострий. Знайдіть кути трапеції.

14.23. У рівнобічній трапеції бічна сторона вдвічі більша за висоту. Знайдіть кути трапеції.

3

14.24. У трапеції $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Визначте вид трапеції.

14.25. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Більша бічна сторона й більша основа дорівнюють по 16 см. Знайдіть меншу основу.

14.26. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 45°. Менша бічна сторона й менша основа дорівнюють по 18 см. Знайдіть більшу основу.

14.27. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі та утворює з нею кут 40°. Знайдіть кути трапеції.

14.28. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює меншій основі, а діагональ утворює із цією основою кут 20°. Знайдіть кути трапеції.

14.29. Діагональ AC трапеції $ABCD$ ділить кут A навпіл. Доведіть, що бічна сторона AB дорівнює основі BC.

14.30. O – точка перетину бісектрис кутів A і B трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Доведіть, що $\angle AOB = 90°$.

14.31. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу трапеції на відрізки 2 см і 7 см. Знайдіть основи трапеції.

4 **14.32.** (*Ознака рівнобічної трапеції.*) Якщо у трапеції діагоналі між собою рівні, то вона – рівнобічна. Доведіть це.

14.33. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.

14.34. У рівнобічній трапеції $ABCD$ AD – більша основа, $AD = CD$, $\angle BAC = 18°$. Знайдіть кути трапеції.

14.35. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, а її діагоналі взаємно перпендикулярні. Доведіть, що висота трапеції дорівнює $\dfrac{a+b}{2}$.

14.36. У прямокутній трапеції гострий кут і кут, який утворює менша діагональ з меншою основою, дорівнюють 60°. Знайдіть відношення основ трапеції.

14.37. У прямокутній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а тупий кут утричі більший за гострий. Знайдіть відношення основ.

14.38. Побудуйте трапецію за основами a і b ($a > b$) та бічними сторонами c і d.

Вправи для повторення

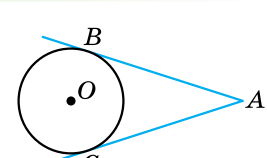
14.39. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 75°. Знайдіть зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами.

14.40. Тупий кут ромба дорівнює 120°, а його менша діагональ – 5 см. Знайдіть периметр ромба.

14.41. Доведіть, що паралелограм, у якого всі висоти рівні, є ромбом.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

14.42. З точки A до кола проведено дві дотичні, B і C – точки дотику (мал. 14.12). Знайдіть довжини відрізків AB і AC дотичних, якщо їхня сума дорівнює 16 см.



Мал. 14.12

Життєва математика

14.43. Тренувальний зал у формі прямокутника має розміри 3,8 м × 5,2 м, у ньому є двері 80 см завширшки.
1) Скільки метрів плінтуса потрібно придбати для цього залу?
2) Скільки коштуватиме ця покупка, якщо ціна одного погонного метра плінтуса 50 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

14.44. Чотири магазини підприємниці розташовані у вершинах опуклого чотирикутника. Де їй слід розмістити товарний склад, щоб сума відстаней від складу до всіх магазинів була найменшою?

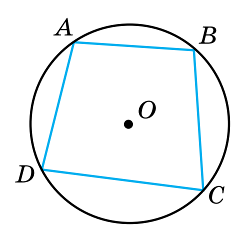
§ 15. Вписані та описані чотирикутники

1. Чотирикутник, вписаний у коло, його властивість

Чотирикутник **називають** ***вписаним у коло*****, якщо всі його вершини лежать на колі.** ***Коло*** **при цьому називають** ***описаним*** **навколо чотирикутника** (мал. 15.1).

Теорема 1 (властивість кутів вписаного чотирикутника). **Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.**

Доведення. Нехай у коло із центром O вписано чотирикутник $ABCD$ (мал. 15.1).



Мал. 15.1

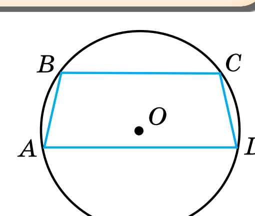
1) Тоді $\angle A = \frac{1}{2}\smile DCB$, $\angle C = \frac{1}{2}\smile DAB$ (за теоремою про вписаний кут).

2) Тому $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile DCB + \smile DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

3) Тоді $\angle B + \angle D = 360° - 180° = 180°$. ■

Наслідок 1. **Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона рівнобічна.**

Доведення. Нехай трапеція $ABCD$ вписана в коло, $AD \parallel CB$ (мал. 15.2).



Мал. 15.2

1) Тоді $\angle A + \angle C = 180°$.
2) Але ж у трапеції $\angle D + \angle C = 180°$. Тому $\angle A = \angle D$.
Отже, $ABCD$ – рівнобічна трапеція (за ознакою рівнобічної трапеції). ■

Наслідок 2. **Якщо чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.**

Приклад 1. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло (мал. 15.1). $\angle A : \angle C = 3 : 2$, а градусна міра кута D на $10°$ більша за градусну міру кута C. Знайти кути чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання. 1) Оскільки чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

2) Оскільки $\angle A : \angle C = 3 : 2$, то позначимо $\angle A = 3x$, $\angle C = 2x$. Тоді $3x + 2x = 180°$; $x = 36°$; $\angle A = 3 \cdot 36° = 108°$; $\angle C = 2 \cdot 36° = 72°$.

3) Можемо далі знайти градусну міру кута $\angle D$:
$\angle D = \angle C + 10° = 72° + 10° = 82°$.

4) $\angle B = 180° - \angle D = 180° - 82° = 98°$.

Відповідь: $\angle A = 108°$; $\angle B = 98°$; $\angle C = 72°$; $\angle D = 82°$.

2. Ознака вписаного чотирикутника

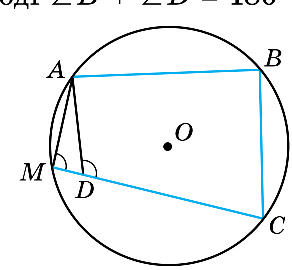
Ви знаєте з курсу геометрії 7 класу, що навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Про чотирикутники те саме сказати не можна.

Теорема 2 (ознака вписаного чотирикутника). **Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.**

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180°$. Проведемо через точки A, B і C коло. Доведемо, що вершина D чотирикутника також лежатиме на цьому колі (методом від супротивного).

1) Припустимо, що вершина D лежить усередині кола (мал. 15.3). Продовжимо CD до перетину з колом у точці M. Тоді $\angle B + \angle D = 180°$ (за умовою) і $\angle M + \angle B = 180°$ (за властивістю кутів вписаного чотирикутника). Звідси $\angle D = \angle M$. Але ж $\angle ADC$ – зовнішній, а $\angle AMC$ – не суміжний з ним внутрішній кут трикутника ADM. Тому $\angle ADC$ має бути більшим за $\angle AMC$. Прийшли до протиріччя. Отже, наше припущення хибне і точка D не може лежати всередині кола.



Мал. 15.3

2) Аналогічно можна довести, що вершина D не може лежати зовні кола.

3) Отже, точка D лежить на колі (мал. 15.1), а тому навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. ■

Наслідок 1. **Якщо у чотирикутника $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$, то навколо нього можна описати коло.**

Н Наслідок 2. **Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.**

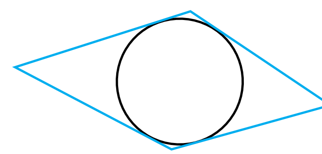
Н Наслідок 3. **Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.**

! Як і для трикутника, центром кола, описаного навколо чотирикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

Так, наприклад, центр кола, описаного навколо прямокутника, збігається з точкою перетину його діагоналей.

3. Чотирикутник, описаний навколо кола, та його властивість

***Чотирикутник* називають *описаним навколо кола*, якщо всі його сторони дотикаються до кола. *Коло* при цьому називають *вписаним* у чотирикутник** (мал. 15.4).



Мал. 15.4

Т Теорема 3 (властивість сторін описаного чотирикутника). **В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін між собою рівні.**

Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ – описаний, P, L, K, T – точки дотику (мал. 15.5).

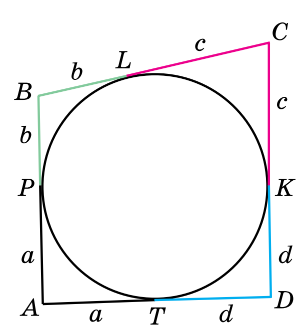
1) За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола, $AP = AT = a$, $BP = BL = b$, $CK = CL = c$, $DK = DT = d$. На малюнку 15.5 рівні між собою відрізки позначено однаковим кольором.

2) Тоді

$AD + BC = AT + TD + BL + LC = a + d + b + c$;

$AB + CD = AP + PB + CK + KD = a + b + c + d$.

3) Отже, $AD + BC = AB + CD$. ■



Мал. 15.5

Н Наслідок. **Якщо чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола, то $AB + CD = AD + BC = \frac{P_{ABCD}}{2}$, де P_{ABCD} – периметр чотирикутника $ABCD$.**

4. Ознака описаного чотирикутника

З геометрії 7 класу ви знаєте, що в будь-який трикутник можна вписати коло.

Про чотирикутник те саме сказати не можна.

Т Теорема 4 (ознака описаного чотирикутника). **Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.**

Доведення цієї теореми є досить громіздким, тому його не наводимо.

Н Наслідок. **У будь-який ромб можна вписати коло.**

! Як і для трикутника, центром кола, вписаного в чотирикутник, є точка перетину бісектрис його кутів.

Оскільки діагоналі ромба є бісектрисами його кутів, то центром кола, вписаного в ромб, є точка перетину діагоналей.

Приклад 2. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого в порядку слідування дорівнюють:

1) 5 см, 7 см, 6 см, 4 см; 2) 9 дм, 7 дм, 4 дм, 3 дм?

Розв'язання. 1) Оскільки $5 + 6 = 7 + 4$, то в цей чотирикутник можна вписати коло.

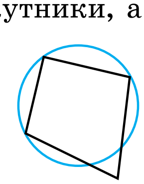
2) $9 + 4 \neq 7 + 3$. Тому в такий чотирикутник вписати коло неможливо.

Відповідь: 1) так; 2) ні.

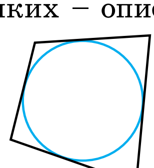
? Який чотирикутник називають вписаним у коло? ○ Сформулюйте й доведіть властивість кутів вписаного чотирикутника. ○ Сформулюйте наслідок із цієї властивості. ○ Сформулюйте ознаку вписаного чотирикутника та наслідки з неї. ○ Який многокутник називають описаним навколо кола? ○ Сформулюйте й доведіть властивість сторін описаного чотирикутника. ○ Сформулюйте ознаку описаного чотирикутника та наслідок з неї.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

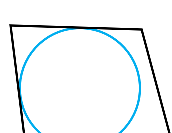
1 **15.1.** На яких малюнках (15.6–15.9) зображено вписані чотирикутники, а на яких – описані?



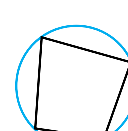
Мал. 15.6



Мал. 15.7



Мал. 15.8



Мал. 15.9

15.2. Чи можна навколо чотирикутника $ABCD$ описати коло, якщо:
1) $\angle A = 30°$, $\angle C = 150°$; 2) $\angle B = 90°$, $\angle D = 80°$?

15.3. Чи може чотирикутник $MNKL$ бути вписаним у коло, якщо:
1) $\angle M = 20°$, $\angle K = 150°$; 2) $\angle N = 90°$, $\angle L = 90°$?

2

15.4. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого в порядку слідування відносяться як:
1) 5 : 3 : 4 : 7; 2) 3 : 2 : 4 : 5?

15.5. Чи може бути описаним чотирикутник, сторони якого в порядку слідування відносяться як:
1) 7 : 3 : 2 : 6; 2) 5 : 4 : 3 : 6?

15.6. Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 133°$, $\angle D = 28°$.

15.7. Знайдіть кути C і D чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle A = 139°$, $\angle B = 48°$.

3

15.8. У рівнобічну трапецію, периметр якої дорівнює 16 см, вписано коло. Знайдіть бічну сторону трапеції.

15.9. Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 5 дм. Знайдіть периметр трапеції.

15.10. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AH_1 і BH_2, які перетинаються в точці H. Доведіть, що навколо чотирикутника CH_1HH_2 можна описати коло, діаметром якого буде відрізок CH.

15.11. Точка M лежить на стороні AB гострокутного трикутника ABC. MP і MK – перпендикуляри до сторін AC і BC відповідно. Доведіть, що навколо чотирикутника $MPCK$ можна описати коло, діаметром якого буде відрізок CM.

4

15.12. Трапецію вписано в коло радіуса R так, що діаметр кола є її більшою основою. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює бічній стороні.

Вправи для повторення

15.13. AB – основа рівнобедреного трикутника ABC, I – центр вписаного кола, $\angle AIB = \alpha$ ($\alpha > 90°$). Знайдіть кути трикутника ABC.

15.14. AB – основа рівнобедреного трикутника ABC, O – центр описаного кола. $\angle AOB = \alpha$ ($\alpha < 180°$). Знайдіть кути трикутника ABC. Скільки випадків слід розглянути?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

15.15. Пряма EK паралельна стороні AB трикутника ABC, $E \in AC$, $K \in BC$. Доведіть, що $\angle CKE = \angle CBA$, $\angle CEK = \angle CAB$.

Життєва математика

15.16. З року в рік лісівники Вінниччини залучають до акції «Майбутнє лісу – у твоїх руках!» школярів. Так, учасники та учасниці учнівських лісництв заклали для висаджування саджанців дуба ділянку прямокутної форми 15 м завдовжки і 8 м завширшки. Скільки мішків чорнозему знадобилося для її закладання, якщо на кожний квадратний метр ділянки потрібно 40 кг чорнозему, а мішок уміщує 100 кг?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

15.17. Побудуйте спільну зовнішню дотичну до двох кіл різних радіусів, які не мають спільних точок.

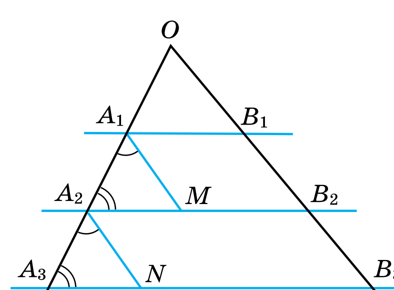
§ 16. Теорема Фале́са

1. Теорема Фале́са та наслідок з неї

Теорема Фале́са. **Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні між собою відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки і на другій його стороні.**

Доведення. Нехай паралельні прямі A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 16.1), причому $A_1A_2 = A_2A_3$. Доведемо, що $B_1B_2 = B_2B_3$.

1) Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі A_1M і A_2N, паралельні прямій OB_3. $A_1A_2 = A_2A_3$ (за умовою), $\angle A_2A_1M = \angle A_3A_2N$ (як відповідні кути при паралельних прямих A_1M і A_2N), $\angle A_1A_2M = \angle A_2A_3N$ (як відповідні кути при паралельних прямих A_2M і A_3N). Тому $\triangle A_1A_2M = \triangle A_2A_3N$ (за стороною і двома прилеглими кутами), а значить, $A_1M = A_2N$ (як відповідні сторони рівних трикутників).



Мал. 16.1

2) Чотирикутник $A_1MB_2B_1$ – паралелограм (за побудовою). Тому $A_1M = B_1B_2$. Аналогічно $A_2NB_3B_2$ – паралелограм, тому $A_2N = B_2B_3$. Отже, $A_1M = A_2N$, $A_1M = B_1B_2$, $A_2N = B_2B_3$. Звідки $B_1B_2 = B_2B_3$, що й треба було довести. ■

Наслідок. **Паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі та відтинають на одній з них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на другій прямій.**

2. Поділ відрізка на кілька рівних частин

За теоремою Фалéса, можна поділити відрізок на будь-яку кількість рівних частин, використовуючи лінійку без поділок.

Приклад. Поділити відрізок AB на 6 рівних частин.

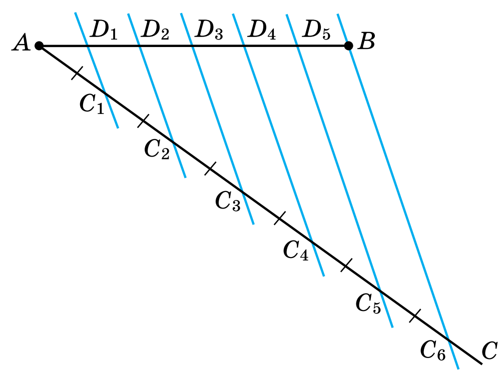
Розв'язання. 1) Нехай AB – даний відрізок (мал. 16.2). Проведемо довільний промінь AC і відкладемо на ньому циркулем послідовно 6 відрізків:

$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5 = C_5C_6$.

2) Через точки C_6 і B проведемо пряму.

3) Через точки C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 проведемо за допомогою косинця і лінійки прямі, паралельні прямій BC_6. За теоремою Фалéса, ці прямі поділять відрізок AB на 6 рівних між собою частин:

$$AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5 = D_5B.$$



Мал. 16.2

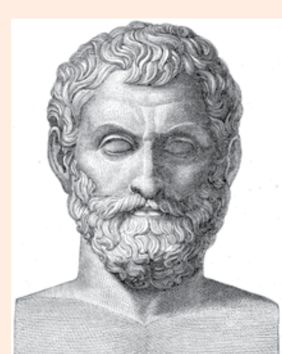
А ще раніше...

Фалéс Мілетський – давньогрецький математик і астроном. Його вважають одним з так званих семи мудреців світу, адже він був одним з найвидатніших математиків свого часу.

Ще в молоді роки допитливий юнак вирушив у подорож до Єгипту, щоб ознайомитися з єгипетською культурою та вивчати природничі науки. Там здібний та обдарований Фалéс не тільки швидко вивчив те, що на той час уже було відомо єгипетським ученим, а й зробив низку власних наукових відкриттів. Він самостійно визначив висоту єгипетських пірамід за їхньою тінню, чим дуже здивував єгипетського фараона Амазіса. А повернувшись на батьківщину, заснував у Мілеті філософську школу.

Історики вважають, що Фалéс був першим, хто ознайомив греків з геометрією, і став першим грецьким астрономом. Фалéс передбачив сонячне затемнення, яке відбулося 28 травня 585 року до н. е.

На гробниці Фалéса вирізьблено: «Наскільки є малою ця гробниця, настільки великою є слава цього царя астрономії в царині зірок».



Фалéс Мілетський (бл. 625–548 рр. до н. е.)

Сформулюйте й доведіть теорему Фалéса.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

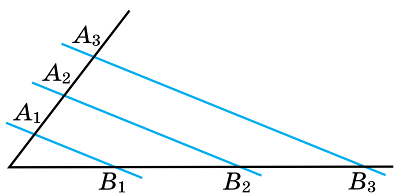
1

16.1. (*Усно.*) На малюнку 16.3 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 4$ см, $A_2A_3 = 4$ см, $B_1B_2 = 7$ см. Знайдіть B_2B_3.

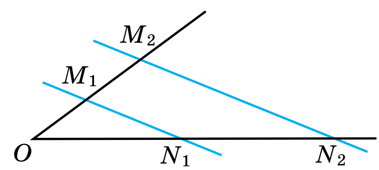
16.2. На малюнку 16.3 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $B_1B_2 = B_2B_3$, $A_2A_3 = 5$ см. Знайдіть A_1A_2.

16.3. На малюнку 16.4 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $OM_1 = M_1M_2$, $ON_1 = 6$ см. Знайдіть ON_2.

16.4. На малюнку 16.4 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 = 7$ см, $N_1N_2 = 7$ см, $OM_1 = 4$ см. Знайдіть OM_2.



Мал. 16.3



Мал. 16.4

2

16.5.[1] Поділіть заданий відрізок на 5 рівних частин.

16.6. Поділіть заданий відрізок на 7 рівних частин.

3

16.7. Поділіть заданий відрізок на дві частини, відношення яких дорівнює 2 : 5.

16.8. Поділіть заданий відрізок на дві частини у відношенні 3 : 2.

16.9. На малюнку 16.3 $A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 : B_1B_2 = 3 : 5$, $B_2B_3 - A_2A_3 = 8$ см. Знайдіть A_1A_2, A_2A_3, B_1B_2, B_2B_3.

16.10. На малюнку 16.4 $ON_1 = N_1N_2$, $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 : OM_1 = 7 : 4$, $N_1N_2 + M_1M_2 = 33$ см. Знайдіть ON_2 і OM_2.

4

16.11. M і N – відповідно середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Відрізки MD і BN перетинають діагональ AC у точках L і K відповідно. Доведіть, що $AL = LK = KC$.

16.12. Точки E, F і G ділять медіану AD трикутника ABC на чотири рівні частини ($AE = EF = FG = GD$). Доведіть, що пряма CG ділить сторону AB у відношенні 3 : 2, починаючи від вершини A.

16.13. Точки M і N ділять медіану AD трикутника ABC на три рівні частини ($AM = MN = ND$). Доведіть, що пряма BN містить медіану трикутника.

16.14. Точка K – середина медіани AD трикутника ABC. Відрізок BK перетинає сторону AC у точці M. Знайдіть $AM : MC$.

---

[1] Задачі 16.5–16.8 потрібно розв'язати із застосуванням лінійки без поділок.

Вправи для повторення

16.15. Побудуйте відрізок AB завдовжки 5 см і геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

16.16. З точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, які віддалені від центра на відстані 5 см і 7 см. Знайдіть довжини цих хорд.

Життєва математика

16.17. Висота футбольних воріт – відстань від нижнього контура перекладини до поверхні землі – 8 футів. Ширина футбольних воріт – відстань між стійками – 8 ярдів. Знайдіть в інтернеті, як перевести фути та ярди в метри, й обчисліть площу футбольних воріт у м^2. Результат округліть до десятих м^2.

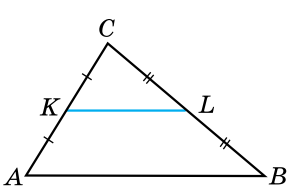
Цікаві задачі – поміркуй одначе

16.18. (*Всеукраїнська олімпіада з математики, 1976 р.*) Усередині гострокутного трикутника ABC дано точку P таку, що $\angle APB = \angle ACB + 60°$, $\angle BPC = \angle BAC + 60°$, $\angle CPA = \angle CBA + 60°$. Доведіть, що основи перпендикулярів, проведених з точки P до сторін трикутника ABC, є вершинами рівностороннього трикутника.

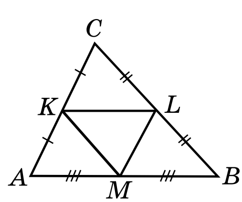
§ 17. Середня лінія трикутника та її властивість

1. Означення середньої лінії трикутника та її властивість

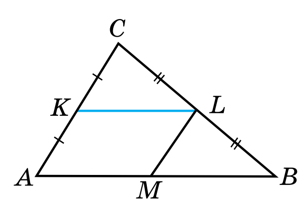
Середньою лінією трикутника **називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.**



Мал. 17.1



Мал. 17.2



Мал. 17.3

На малюнку 17.1 KL – середня лінія трикутника ABC.

Кожний трикутник має три середні лінії. На малюнку 17.2 відрізки KL, LM, KM — середні лінії $\triangle ABC$.

Т Теорема 1 (властивість середньої лінії трикутника). **Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.**

Доведення. Нехай KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 17.2). Доведемо, що $KL \parallel AB$ і $KL = \frac{1}{2}AB$.

1) Проведемо через точку L пряму, паралельну AB. За теоремою Фалéса, вона перетинає сторону AC в її середині, тобто в точці K (мал. 17.2). Отже, ця пряма містить середню лінію KL. Тому $KL \parallel AB$.

2) Проведемо через точку L пряму, паралельну AC, яка перетинає AB в точці M (мал. 17.2). Тоді $AM = MB$ (за теоремою Фалéса). Чотирикутник $AKLM$ – паралелограм. $KL = AM$ (за властивістю паралелограма), але $AM = \frac{1}{2}AB$. Тому $KL = \frac{1}{2}AB$. ■

Приклад 1. Периметр трикутника ABC дорівнює P. Знайти периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай ABC — заданий трикутник, KL, LM і MK — його середні лінії (мал. 17.2). За умовою $AB + BC + CA = P$.

1) Оскільки KL — середня лінія $\triangle ABC$, то $KL = \frac{AB}{2}$. Аналогічно $KM = \frac{BC}{2}$, $ML = \frac{AC}{2}$.

2) Знайдемо периметр $\triangle KLM$. Маємо:

$$P_{\triangle KLM} = KL + KM + ML = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{P}{2}.$$

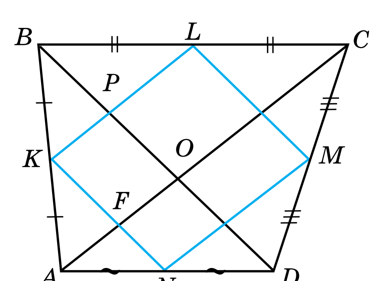
Відповідь: $\frac{P}{2}$.

Приклад 2. Довести, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма, один з кутів якого дорівнює куту між діагоналями чотирикутника.

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, а точки K, L, M, N – середини його сторін (мал. 17.4).

1) KL – середня лінія трикутника ABC, тому $KL \parallel AC$ і $KL = \frac{1}{2}AC$.

Аналогічно $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.



Мал. 17.4

2) Отже, $KL \parallel MN$, $KL = MN$. Тоді $KLMN$ – паралелограм (за ознакою паралелограма).

3) KN – середня лінія трикутника ABD. Тому $KN \parallel BD$.

Отже, $KFOP$ – також паралелограм, звідки: $\angle NKL = \angle BOA$. ■

2. Властивість медіан трикутника

Розглянемо властивість медіан трикутника.

Т Теорема 2 (властивість медіан трикутника). **Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.**

Доведення. Нехай M – точка перетину медіан AK і CN трикутника ABC (мал. 17.5).

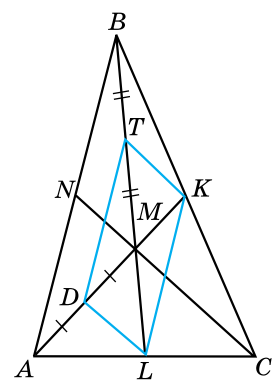
1) Побудуємо чотирикутник $LDTK$, де D – середина AM, T – середина BM.

2) DT – середня лінія трикутника ABM, тому $DT \parallel AB$ і $DT = \frac{1}{2}AB$.

3) KL – середня лінія трикутника ABC, тому $KL \parallel AB$ і $KL = \frac{1}{2}AB$.

4) Отже, $DT \parallel KL$ і $DT = KL$. Тому $DTKL$ – паралелограм (за ознакою).

5) M – точка перетину діагоналей TL і DK паралелограма $DTKL$, тому $MT = ML$, $DM = MK$. Але $MT = BT$, $DM = AD$. Тоді $BT = TM = ML$ і $AD = DM = MK$. Отже, точка M ділить кожну з медіан AK і BL у відношенні 2 : 1, починаючи від вершин A і B відповідно.



Мал. 17.5

6) Точка перетину медіан AK і CN має також ділити у відношенні 2 : 1 кожну медіану. Оскільки існує єдина точка – точка M, яка в такому відношенні ділить медіану AK, то медіана CN також проходить через цю точку.

7) Отже, три медіани трикутника перетинаються в одній точці й цією точкою діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника. ■

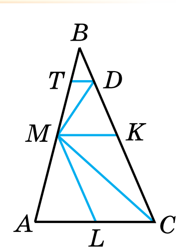
Точку перетину медіан ще називають *центроїдом трикутника*.

? Що називають середньою лінією трикутника? ○ Сформулюйте й доведіть властивість середньої лінії трикутника. ○ Сформулюйте властивість медіан трикутника.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

17.1. (*Усно.*) Які відрізки на малюнку 17.6 є середніми лініями трикутника ABC, де $AM = MB$, $BK = KC$, $AL = LC$?



Мал. 17.6

17.2. Накресліть довільний тупокутний трикутник MNK і його найбільшу середню лінію.

17.3. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC і його середню лінію, кінці якої належать бічним сторонам.

17.4. KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 17.2).
1) $AB = 16$ см. Знайдіть KL.
2) $KL = 5$ дм. Знайдіть AB.

17.5. KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 17.2).
1) $AB = 18$ см. Знайдіть KL. 2) $KL = 3$ дм. Знайдіть AB.

2

17.6. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін рівнобедреного трикутника, дорівнює 7 см. Знайдіть основу трикутника.

17.7. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 14 дм. Знайдіть довжину відрізка, що сполучає середини бічних сторін трикутника.

17.8. Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см.

17.9. Сторони трикутника дорівнюють 12 дм, 16 дм і 18 дм. Знайдіть периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії цього трикутника.

17.10. Дано: ED – середня лінія трикутника ABC, $E \in AC$, $D \in BC$. Довести: $\angle CED = \angle CAB$.

17.11. (*Усно*.) Визначте вид трикутника, якщо:
1) дві його середні лінії рівні між собою;
2) три його середні лінії рівні між собою.

17.12. Дано трикутник, периметр якого дорівнює 24 см. Знайдіть периметр трикутника, вершини якого є серединами сторін цього трикутника.

17.13. Периметр трикутника, вершини якого – середини сторін заданого трикутника, дорівнює 18 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

3

17.14. Сторони трикутника відносяться як 4 : 3 : 5. Знайдіть його сторони, якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями заданого трикутника, дорівнює 60 см.

17.15. Периметр трикутника дорівнює 80 см. Сторони трикутника, утвореного середніми лініями заданого трикутника, відносяться як 4 : 9 : 7. Знайдіть сторони цього трикутника.

17.16. Сторона трикутника дорівнює 10 см, а одна із середніх ліній – 6 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з них у 1,5 раза більша за другу. Скільки випадків слід розглянути?

17.17. E, F, G, H – середини сторін AB, BC, CD і DA опуклого чотирикутника $ABCD$. Знайдіть периметр чотирикутника $EFGH$, якщо $AC = 16$ см, $BD = 10$ см.

17.18. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін цього прямокутника.

17.19. O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$. Точки M і K – середини сторін AD і DC відповідно. Доведіть, що $MK \perp OD$.

17.20. AK – медіана рівнобедреного трикутника ABC з основою BC. Точки P і F – середини сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що $PF \perp AK$.

17.21. Доведіть, що коли два трикутники рівні, то рівні й трикутники, вершинами яких є середини сторін цих трикутників.

4 **17.22.** Точка M – середина катета AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Відстань від точки M до гіпотенузи дорівнює a см. Знайдіть гіпотенузу.

17.23. Точка K – середина катета BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою $AB = 20$ см. Знайдіть відстань від точки K до гіпотенузи.

17.24. Доведіть, що середини сторін ромба є вершинами прямокутника.

17.25. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) M – точка перетину медіан. Відомо, що $AM = 8$ см. Знайдіть відстань від середини бічної сторони до основи трикутника.

17.26. Середина бічної сторони рівнобедреного трикутника KLM ($KL = KM$) віддалена від основи трикутника на 9 см. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до вершини K.

Вправи для повторення

17.27. У трикутнику ABC: $\angle A = 40°$, $\angle B = 80°$, O – центр описаного кола. Знайдіть $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$.

17.28. Одна з діагоналей ромба утворює зі стороною кут 30°, а друга діагональ дорівнює 7 см. Знайдіть периметр ромба.

17.29. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють a і b ($a > b$), а гострий кут – 60°. Знайдіть:
1) бічну сторону трапеції;
2) периметр трапеції;
3) умову, за якої в трапецію можна вписати коло.

Життєва математика

17.30. Обчисліть, скільки кубічних метрів повітря очистять за рік від автомобільних вихлопних газів 50 каштанів, посаджених уздовж дороги. Відомо, що одне дерево за рік очищує зону 100 м завдовжки, 12 м завширшки, 10 м заввишки.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

17.31. Чи існує трикутник, дві бісектриси якого взаємно перпендикулярні?

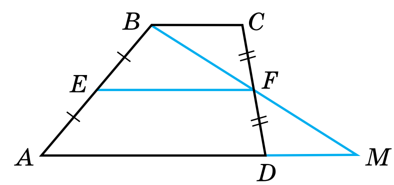
§ 18. Середня лінія трапеції та її властивість

Середньою лінією трапеції **називають відрізок, що сполучає середини її бічних сторін.**

Розглянемо властивість середньої лінії трапеції.

Т Теорема (властивість середньої лінії трапеції). **Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.**

Доведення. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, EF – її середня лінія (мал. 18.1). Доведемо, що $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$ і $EF = \dfrac{AD + BC}{2}$.



Мал. 18.1

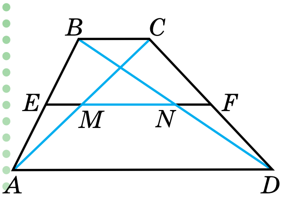
1) Проведемо промінь BF до його перетину з променем AD. Нехай M – точка їхнього перетину. Тоді $\angle BCF = \angle MDF$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AM та січній CD), $\angle CFB = \angle DFM$ (як вертикальні кути), $CF = FD$ (за умовою). Отже, $\triangle CFB = \triangle DFM$ (за стороною і двома прилеглими кутами), звідки $BF = FM$, $BC = DM$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

2) Оскільки $BF = FM$, то EF – середня лінія трикутника ABM. Тоді, за властивістю середньої лінії трикутника, $EF \parallel AM$, отже, $EF \parallel AD$. А оскільки $AD \parallel BC$, то $EF \parallel BC$.

3) Окрім того, $EF = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{AD + DM}{2} = \dfrac{AD + BC}{2}$. ■

Приклад 1. Довести, що відрізок середньої лінії трапеції, який міститься між її діагоналями, дорівнює піврізниці основ.

Доведення. Нехай EF – середня лінія трапеції $ABCD$, M – точка перетину AC і EF, N – точка перетину BD і EF (мал. 18.2). Нехай $AD = a$, $BC = b$. Доведемо, що $MN = \dfrac{a - b}{2}$.



Мал. 18.2

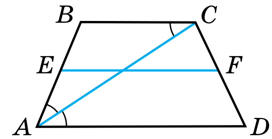
1) Оскільки $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$ і $AE = BE$, то, за теоремою Фалéса: M – середина AC, N – середина BD. Тому EM – середня лінія трикутника ABC, NF – середня лінія трикутника DBC. Тоді $EM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{b}{2}$, $NF = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{b}{2}$.

2) EF – середня лінія трапеції, тому $EF = \dfrac{a + b}{2}$.

3) $MN = EF - (EM + NF) = \dfrac{a + b}{2} - \left(\dfrac{b}{2} + \dfrac{b}{2}\right) = \dfrac{a - b}{2}$. ■

Приклад 2. У рівнобічній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Знайти середню лінію трапеції, якщо її основи відносяться як 3 : 7, а периметр – 48 см.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $BC : AD = 3 : 7$, $\angle CAD = \angle BAC$, EF – середня лінія (мал. 18.3).



Мал. 18.3

1) Позначимо $BC = 3x$, $AD = 7x$. Тоді

$$EF = \frac{AD + BC}{2} = \frac{7x + 3x}{2} = \frac{10x}{2} = 5x \text{ (см)}.$$

2) $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AD і BC та січній AC). $\angle CAD = \angle BAC$ (за умовою). Тому $\angle BCA = \angle BAC$. Отже, $\triangle BAC$ – рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника). Тоді $AB = BC$. Але $AB = CD$ (за умовою). Отже, $AB = BC = CD = 3x$ (см).

3) Оскільки $P_{ABCD} = 48$ см, маємо рівняння:

$7x + 3x + 3x + 3x = 48$, звідки $x = 3$ (см).

4) Тоді $EF = 5 \cdot 3 = 15$ (см).

А ще раніше...

Те, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, було відомо ще давнім єгиптянам; цю інформацію містив папірус Ахмеса (близько XVII ст. до н. е.).

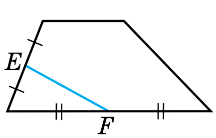
Про властивість середньої лінії трапеції знали й вавилонські землеміри; про неї також згадується й у працях Герона Александрійського (перша половина I ст. н. е.).

Що називають середньою лінією трапеції? Сформулюйте й доведіть властивість середньої лінії трапеції.

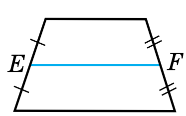
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

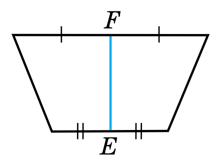
18.1. (*Усно.*) На яких малюнках (18.4–18.7) відрізок EF є середньою лінією трапеції?



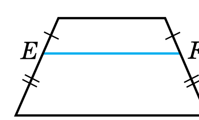
Мал. 18.4



Мал. 18.5



Мал. 18.6



Мал. 18.7

18.2. Основи трапеції дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

18.3. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її основи дорівнюють 8 см і 12 см.

2

18.4. Знайдіть основу трапеції, якщо її друга основа дорівнює 8 см, а середня лінія – 6 см.

18.5. Одна з основ трапеції дорівнює 4 см, а середня лінія – 9 см. Знайдіть другу основу трапеції.

18.6. Одна з основ трапеції дорівнює 8 см, а друга – удвічі більша за неї. Знайдіть відстань між серединами бічних сторін трапеції.

18.7. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище видатної української легкоатлетки, рекорд світу якої з потрійних стрибків тримався 26 років. Знайдіть в інтернеті інформацію про інші видатні досягнення українських спортсменок і спортсменів.

AB і CD — основи трапеції $ABCD$, середня лінія якої дорівнює 30 см. Знайдіть AB і CD, якщо:	AB	CD
$AB - CD = 8$ см	В	А
AB у 4 рази менша від CD	К	Ц
$AB : CD = 3 : 2$	Е	Р

12 см	24 см	26 см	34 см	36 см	48 см	
						Ь

18.8. Середня лінія трапеції дорівнює 16 см. Знайдіть основи трапеції, якщо:
1) одна з них на 2 см менша від іншої;
2) одна з них утричі більша за іншу;
3) їх відношення дорівнює 3 : 5.

18.9. K – точка перетину діагоналі BD трапеції $ABCD$ з її середньою лінією MN. Доведіть, що $BK = KD$.

18.10. Бічні сторони трапеції дорівнюють 7 см і 9 см, а її середня лінія – 10 см. Знайдіть периметр трапеції.

18.11. Бічні сторони трапеції дорівнюють 10 см і 12 см, а її периметр – 52 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

3

18.12. Чи може середня лінія трапеції:
1) дорівнювати одній з основ;
2) бути меншою від меншої основи;
3) бути більшою за більшу основу;
4) бути вдвічі меншою від більшої основи?

18.13. EF – середня лінія трапеції $ABCD$, яка перетинає діагональ BD в точці N, $EN = 5$ см, $NF = 3$ см. Знайдіть основи трапеції.

18.14. MN – середня лінія трапеції $ABCD$, яка перетинає діагональ AC в точці K. Знайдіть MK і KN, якщо основи трапеції дорівнюють 18 см і 12 см.

18.15. У трапеції $ABCD$ $AD = 30$ см, $BC = 12$ см – основи, а точки E і T – середини AB і AE відповідно. Через E і T проведено прямі, паралельні AD. Знайдіть відрізки цих прямих, що містяться між бічними сторонами трапеції.

18.16. У трапеції $ABCD$ M – середина бічної сторони AB, N – середина MB. Через точки M і N проведено прямі, паралельні BC, які перетинають CD в точках K і L відповідно. $MK = 12$ см, $NL = 8$ см. Знайдіть основи трапеції.

18.17. У рівнобічній трапеції $ABCD$ перпендикуляр, проведений з вершини B до більшої основи AD трапеції, ділить її на відрізки 3 см і 7 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

18.18. З вершини B тупого кута рівнобічної трапеції $ABCD$ проведено висоту BK до основи AD, $AK = 4$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

18.19. Точки A і B лежать по один бік від прямої l. Відстань до неї від точки A дорівнює 7 см, а від точки M, яка є серединою AB, – 5 см. Знайдіть відстань від точки B до прямої l.

18.20. По один бік від прямої a на відстані 10 см і 16 см від неї позначено точки M і N. Знайдіть відстань від середини відрізка MN до прямої a.

4

18.21. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 14 см. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три частини. Знайдіть довжини цих частин.

18.22. Діагоналі ділять середню лінію трапеції на три частини, довжини яких 7 см, 8 см і 7 см. Знайдіть основи трапеції.

18.23. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90°$, $\angle C = 135°$, $AB = 6$ см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

18.24. Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл тупий кут трапеції, а її середню лінію – на відрізки 4 см і 6 см. Знайдіть периметр трапеції.

18.25. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її гострий кут навпіл, а середню лінію – на відрізки 3 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.

Вправи для повторення

18.26. Знайдіть кути M і N чотирикутника $MNKL$, вписаного в коло, якщо $\angle K = 37°$, $\angle L = 119°$.

18.27. Коло вписано в рівнобічну трапецію, бічна сторона якої дорівнює a см. Знайдіть периметр трапеції.

18.28. У прямокутній трапеції тупий кут дорівнює 120°, більша основа – 14 см, а більша бічна сторона – 8 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

18.29. Знайдіть значення степеня:

1) $(-2)^3$; 2) 14^2; 3) $(-1)^{11}$; 4) 0^5;

5) $(0,3)^3$; 6) $(-0,8)^2$; 7) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$; 8) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$.

18.30. Обчисліть:

1) $2^5 - 3^2$; 2) $(-1)^9 + (-1)^8$;

3) $4^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2$; 4) $5^3 : \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

18.31. Подайте у вигляді степеня з:
1) основою 2 числа: 2, 4, 8, 16, 32, 128, 512;
2) основою 3 числа: 81, 243;
3) основою 5 числа: 5, 25, 625;
4) основою 10 числа: 100, 10 000.

Життєва математика

18.32. Ширина захвату сівалки становить 2 м, рухається вона зі швидкістю 6 км/год. Норма висіву насіння – 150 кг на 1 га.
1) Запишіть формулу залежності витрати насіння m (у кг) від часу t (у год).
2) На який час роботи сівалки вистачить 270 кг насіння?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

18.33. Усі стінки й дно картонної коробки без кришки мають форму квадрата зі стороною a. Розріжте розгортку коробки двома розрізами так, щоб з отриманих частин можна було скласти квадрат, площа якого дорівнює $5a^2$.

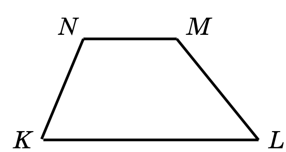
ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4 (§§ 14–18)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. На малюнку 1 зображено трапецію. Укажіть її основи.

А. KN і ML **Б.** KL і MN
В. KN і MN **Г.** ML і MN



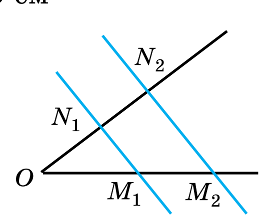
Мал. 1

2. Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть сторону цього трикутника.

А. 3 см **Б.** 9 см **В.** 12 см **Г.** 18 см

3. На малюнку 2 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 = N_1N_2$, $OM_2 = 16$ см. Знайдіть M_1M_2.

А. 4 см **Б.** 8 см
В. 6 см **Г.** Знайти неможливо



Мал. 2

2

4. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло, $\angle A = 20°$, $\angle B = 100°$. Знайдіть кути C і D цього чотирикутника.

А. $\angle C = 80°$, $\angle D = 160°$ **Б.** $\angle C = 150°$, $\angle D = 80°$
В. $\angle C = 20°$, $\angle D = 100°$ **Г.** $\angle C = 160°$, $\angle D = 80°$

5. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см, а бічна сторона – 10 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін заданого трикутника.

А. 11 см **Б.** 12 см **В.** 14 см **Г.** 16 см

6. Середня лінія трапеції дорівнює 20 см, а її основи відносяться як 2 : 3. Знайдіть довжину меншої основи.

А. 16 см **Б.** 24 см **В.** 18 см **Г.** 8 см

7. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі й утворює з нею кут 30°. Знайдіть тупий кут трапеції.

А. 110° **Б.** 95° **В.** 105° **Г.** 115°

8. Коло вписано в рівнобічну трапецію, бічна сторона якої дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трапеції.

А. 50 см **Б.** 20 см **В.** 30 см **Г.** 40 см

9. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60°, а більша бічна сторона й менша основа – по 18 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

А. 36 см **Б.** 24 см **В.** 27 см **Г.** 30 см

10. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її гострий кут навпіл, а середню лінію – на відрізки 4 см і 5 см. Знайдіть периметр трапеції.

А. 32 см **Б.** 34 см **В.** 36 см **Г.** 38 см

11. Точка N – середина медіани AD трикутника ABC. BN перетинає AC у точці F. Знайдіть AF, якщо $AC = 18$ см.

А. 6 см **Б.** 9 см **В.** 3 см **Г.** 2 см

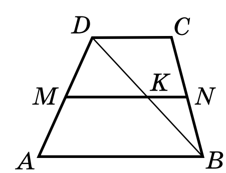
12. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 36 см. Знайдіть відстань від середини катета до гіпотенузи.

А. 12 см **Б.** 6 см **В.** 18 см **Г.** 9 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. MN – середня лінія трапеції $ABCD$ (мал. 3), $MN = 8$ см, $AB = 10$ см. Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Відрізок	*Довжина відрізка*
1. DC	**А.** 3 см
2. MK	**Б.** 4 см
3. KN	**В.** 5 см
	Г. 6 см



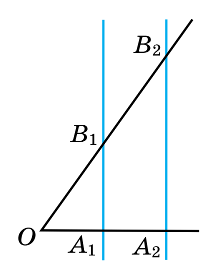
Мал. 3

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 14–18

1. Накресліть трапецію $MKPF$ ($MK \parallel PF$). Укажіть її основи та бічні сторони.

2. Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

3. На малюнку 1 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $OB_1 = B_1B_2$, $OA_1 = 2$ см. Знайдіть OA_2.



Мал. 1

4. Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 140°$, $\angle D = 70°$.

5. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 12 см і 16 см. Знайдіть периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії даного трикутника.

6. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 4 см більша за іншу.

3 **7.** Коло вписано в рівнобічну трапецію, периметр якої 20 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

8. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60°, а більша бічна сторона й більша основа дорівнюють по 12 см. Знайдіть меншу основу.

4 **9.** Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її тупий кут, а середню лінію – на відрізки 9 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.

Додаткові завдання

4 **10.** Точки K, L, M ділять медіану BD трикутника ABC на чотири рівні частини ($BK = KL = LM = MD$). AM перетинає BC в точці F. Знайдіть $CF : FB$.

11. Точка D – середина катета BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Відстань від точки D до гіпотенузи трикутника на 15 см менша від гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 4

До § 14

1 **1.** Накресліть прямокутну трапецію $NMLK$ і рівнобічну $DCFH$. Укажіть основи трапецій та їхні бічні сторони.

2 **2.** Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої 8 см і 5 см, а бічні сторони дорівнюють меншій основі.

3. У рівнобічній трапеції один з кутів на 20° більший за інший. Знайдіть кути трапеції.

4. У прямокутній трапеції більша бічна сторона вдвічі більша за висоту. Знайдіть кути трапеції.

5. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо протилежні її кути відносяться як 4 : 5.

3 **6.** У трапеції $ABCD$ з більшою основою AD через точку K – середину CD – проведено пряму BK, що перетинає пряму AD в точці M. Доведіть, що $\triangle BKC = \triangle MKD$.

7. Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, утворює з бічною стороною кут 30° і ділить навпіл більшу основу. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо більша бічна сторона дорівнює m см.

8. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а її основи дорівнюють 10 см і 6 см. Знайдіть периметр трапеції.

9. $ABCD$ – прямокутна трапеція, $\angle D = \angle C = 90°$, AD – більша основа, $\angle BDC = 45°$, $\angle ABD = 90°$, $AD = 10$ см. Знайдіть BC і CD.

10. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює 5 см, бічна сторона – 3 см, а кут між бічною стороною і більшою основою дорівнює $60°$. Знайдіть периметр трапеції.

11. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі, а бічна сторона – меншій. Знайдіть кути трапеції.

12. Побудуйте трапецію за основами та діагоналями.

13. У трапеції $ABCD$ BC – менша основа. Через точку C проведено пряму, паралельну AB, що перетинає AD в точці E. Знайдіть периметр трикутника ECD, якщо периметр трапеції дорівнює 56 см, а $BC = 10$ см.

До § 15

14. Чи можна вписати коло в чотирикутник $ABCD$, якщо:
1) $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $CD = 4$ см, $DA = 6$ см;
2) $AB = 3$ дм, $BC = 7$ дм, $CD = 8$ дм, $DA = 10$ дм?

15. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого в порядку слідування відносяться як:
1) 2 : 7 : 10 : 5; 2) 3 : 5 : 8 : 4?

16. $ABCD$ – чотирикутник, описаний навколо кола, $AB = 3$ см, $BC = 9$ см, $CD = 10$ см. Знайдіть AD.

17. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle ABC = 100°$, $\angle ADC = 80°$, $\angle BDC = 30°$. Знайдіть $\angle BAC$.

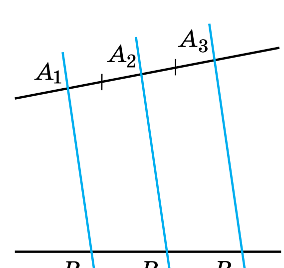
18. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, відносяться в порядку слідування як 3 : 4 : 6. Знайдіть кути чотирикутника.

19. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло, причому AC є діаметром кола. Точка O – точка перетину діагоналей. Знайдіть $\angle AOD$, якщо $\angle BAC = 30°$, $\angle CAD = 58°$.

20. Гострий кут прямокутної трапеції, описаної навколо кола, у 5 разів менший від тупого. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша бічна сторона дорівнює a см.

До § 16

21. На малюнку 1 прямі A_1B_1, A_2B_2 і A_3B_3 – паралельні, $A_1A_2 = A_2A_3$. Знайдіть на цьому малюнку й іншу пару рівних між собою відрізків.



Мал. 1

22. Поділіть даний відрізок на 9 рівних частин (не використовувати лінійку з поділками).

23. Поділіть даний відрізок на 3 частини, довжини яких відносяться як 3 : 1 : 2 (не використовувати лінійку з поділками).

4 **24.** Точка K ділить медіану AN трикутника ABC у відношенні 2 : 1, починаючи від точки A. Доведіть, що пряма CK ділить сторону AB навпіл.

До § 17

1 **25.** Відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника, дорівнює 5 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

26. Побудуйте довільний прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) і його найбільшу середню лінію.

2 **27.** EF – середня лінія трикутника ABC ($E \in AC$, $F \in BC$), $CE = 3$ см, $CF = 5$ см, $EF = 7$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

28. Одна із середніх ліній рівностороннього трикутника дорівнює 2 см. Знайдіть периметр трикутника.

29. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см, а периметр – 20 см. Знайдіть середню лінію, кінці якої належать бічним сторонам.

30. Точки D, E, F – відповідно середини сторін AB, BC і CA трикутника ABC. Доведіть, що чотирикутник $DEFA$ – паралелограм.

3 **31.** Сторона трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з його середніх ліній дорівнює 5 см, а периметр трикутника, утвореного його середніми лініями, дорівнює 18 см.

32. У трикутнику проведено середні лінії. Периметри паралелограмів, що утворилися при цьому, дорівнюють 22 см, 24 см і 26 см. Знайдіть периметр заданого трикутника та трикутника, який утворюють середні лінії.

4 **33.** Побудуйте трикутник за трьома точками – серединами його сторін.

34. Послідовно сполучили середини сторін квадрата, діагональ якого дорівнює d см. Визначте вид чотирикутника, що при цьому утворився, та обчисліть його периметр.

До § 18

1 **35.** Накресліть трапецію $ABCD$ та її середню лінію EF. Виміряйте основи трапеції та обчисліть довжину її середньої лінії.

2 **36.** Сума бічних сторін трапеції дорівнює 17 см, а середня лінія – 8 см. Знайдіть периметр трапеції.

37. Різниця основ трапеції дорівнює 2 см, а середня лінія – 14 см. Знайдіть основи трапеції.

3 **38.** Основи трапеції дорівнюють 20 см і 12 см. Бічну сторону трапеції поділено на 4 рівні частини й через точки поділу проведено прямі, паралельні основам. Знайдіть відрізки цих прямих, що містяться між сторонами трапеції.

39. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія, 18 см завдовжки, поділяється діагоналлю на відрізки, один з яких удвічі більший за інший.

40. Середня лінія трапеції втричі більша за меншу основу й на 12 см менша від більшої основи. Знайдіть основи трапеції.

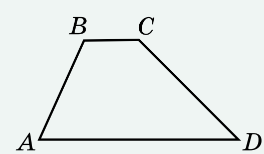
41. Середня лінія трапеції діагоналями ділиться на відрізки, відношення яких дорівнює 2 : 3 : 2. Знайдіть відношення основ трапеції.

42. Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії.

43. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює a см, бічна сторона – c см, а гострий кут – 60°. Знайдіть середню лінію трапеції.

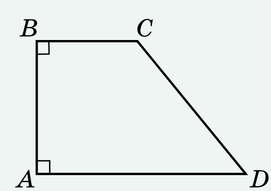
Головне в темі 4

ТРАПЕЦІЯ



Трапеція – це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні.

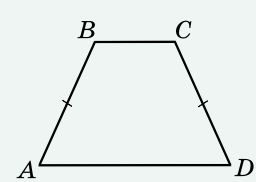
Паралельні сторони трапеції – ***основи***, а непаралельні – ***бічні сторони***. На малюнку AD і BC – основи трапеції, AB і CD – її бічні сторони.



1. Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.
2. Трапеція є опуклим чотирикутником.

Висота трапеції – це перпендикуляр, проведений з будь-якої точки основи трапеції до прямої, що містить протилежну основу.

Трапеція ***прямокутна***, якщо один з її кутів прямий.

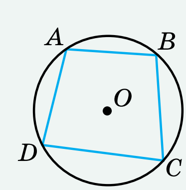


Трапеція ***рівнобічна***, якщо її бічні сторони рівні.

1. У рівнобічній трапеції кути при основі між собою рівні.
2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

Теорема (ознака рівнобічної трапеції). **Якщо у трапеції кути при одній основі рівні, то трапеція – рівнобічна.**

ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ



Чотирикутник називають ***вписаним у коло***, якщо всі його вершини лежать на колі. ***Коло*** у такому разі – ***описане*** навколо чотирикутника.

Теорема 1 (властивість кутів вписаного чотирикутника). **Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.**

Наслідок 1. **Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона рівнобічна.**

Наслідок 2. **Якщо чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.**

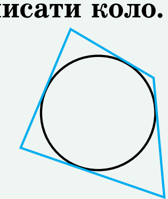
Теорема 2 (ознака вписаного чотирикутника). **Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.**

Наслідок 1. **Якщо у чотирикутника $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$, то навколо нього можна описати коло.**

Наслідок 2. **Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.**

Наслідок 3. **Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.**

Чотирикутник називають ***описаним навколо кола***, якщо всі його сторони дотикаються до кола. ***Коло*** у такому разі – ***вписане*** в чотирикутник.



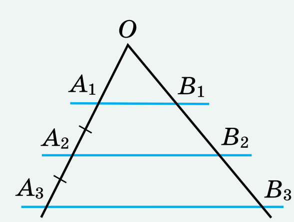
Теорема 3 (властивість сторін описаного чотирикутника). **В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін між собою рівні.**

Теорема 4 (ознака описаного чотирикутника). **Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.**

Наслідок. **У будь-який ромб можна вписати коло.**

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

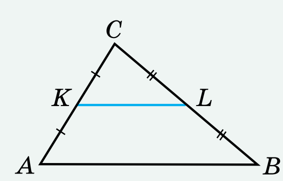
Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні між собою відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки й на іншій його стороні.



Наслідок. **Паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі та відтинають на одній з них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки й на іншій прямій.**

СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА ТА ЇЇ ВЛАСТИВІСТЬ

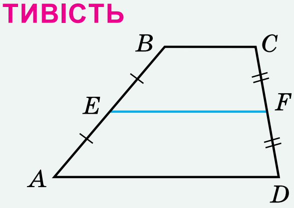
Середня лінія трикутника – це відрізок, який сполучає середини двох його сторін.



Теорема 1 (властивість середньої лінії трикутника). **Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.**

СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ ТА ЇЇ ВЛАСТИВІСТЬ

Середня лінія трапеції – це відрізок, що сполучає середини її бічних сторін.



Теорема (властивість середньої лінії трапеції). **Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.**

ТЕМА 5

СТЕПІНЬ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **ознайомитеся** з функцією $y = \frac{k}{x}$; степенем із цілим показником; стандартним виглядом числа;
- **навчитеся** виконувати дії із числами, що подані у стандартному вигляді.

§ 19. Степінь із цілим показником

1. Поняття про степінь із цілим показником

У 7 класі ми вивчали степінь з натуральним показником. За означенням:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}},$$

де n – натуральне число, $n > 1$ і $a^1 = a$.

У математиці, а також під час розв'язування задач практичного змісту, наприклад з фізики або хімії, трапляються степені, показник яких дорівнює нулю або є цілим від'ємним числом. Степінь з від'ємним показником можна знайти в науковій і довідковій літературі. Наприклад, масу атома гелію записують так: $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг. Як розуміти зміст запису 10^{-27}?

Розглянемо степені числа 3 з показниками 1, 2, 3, 4, ...:

$$3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \ldots \text{ – це відповідно } 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots$$

У цьому рядку кожне наступне число втричі більше за попереднє. Продовжимо рядок у протилежному напрямку, зменшуючи щоразу показник степеня на 1. Одержимо:

$$\ldots,\ 3^{-3},\ 3^{-2},\ 3^{-1},\ 3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ \ldots$$

Таким чином, число 3^0 має бути втричі меншим від 3^1, тобто від числа 3. Але втричі меншим від числа 3 є число 1, отже, $3^0 = 1$.

Рівність $a^0 = 1$ справджується для будь-якої основи a, якщо $a \neq 0$.

Нульовий степінь відмінного від нуля числа a дорівнює одиниці, тобто $a^0 = 1$, де $a \neq 0$.

Повернімося до рядка зі степенями числа 3, де ліворуч від числа $3^0 = 1$ записано число 3^{-1}. Це число втричі менше від 1, тобто дорівнює $\frac{1}{3}$. Отже, $3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$. Міркуючи аналогічно, матимемо: $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$; $3^{-3} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$ і т. д.

Отже, маємо означення степеня із цілим від'ємним показником.

Якщо $a \neq 0$ і n – натуральне число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Приклад 1. Замінити степінь дробом:

1) 5^{-7}; 2) x^{-1}; 3) $(a + b)^{-9}$.

Розв'язання. За означенням:

1) $5^{-7} = \frac{1}{5^7}$; 2) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$; 3) $(a + b)^{-9} = \frac{1}{(a + b)^9}$.

Приклад 2. Замінити дріб степенем:

1) $\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{1}{m - n}$; 3) $\frac{1}{7^{13}}$.

Розв'язання. 1) $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$; 2) $\frac{1}{m - n} = (m - n)^{-1}$; 3) $\frac{1}{7^{13}} = 7^{-13}$.

2. Обчислення значень виразів, що містять степінь із цілим показником

Приклад 3. Обчислити: 1) 4^{-2}; 2) $(-9)^0$; 3) $(-5)^{-3}$.

Розв'язання. 1) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$; 2) $(-9)^0 = 1$;

3) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$.

Розглянемо, як піднести дріб $\frac{a}{b}$ до цілого від'ємного степеня. Якщо n – натуральне число і $a \neq 0$, маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 : \frac{a^n}{b^n} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Отже,

якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, n – натуральне число, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Приклад 4. Обчислити: 1) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 2) $27\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{-4}$; 3) $(1{,}6)^{-2}$.

Розв'язання. 1) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^{2} = \frac{9}{49}$.

2) Враховуючи послідовність виконання арифметичних дій, спочатку піднесемо дріб до степеня, а потім виконаємо множення:

$$27\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{-4} = 27\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{27\cdot 16}{81} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

3) Запишемо десятковий дріб 1,6 у вигляді неправильного дробу та виконаємо піднесення до степеня за формулою:

$$(1,6)^{-2} = \left(1\frac{6}{10}\right)^{-2} = \left(1\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{8}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{8}\right)^{2} = \frac{25}{64}.$$

Відповідь: 1) $\frac{9}{49}$; 2) $5\frac{1}{3}$; 3) $\frac{25}{64}$.

3. Спрощення виразів, що містять степені із цілим показником

Розглянемо спрощення виразів зі степенями із цілим показником.

Приклад 5. Подати вираз $(a^{-3} - b^{-3}) : (a^{-1} - b^{-1})$ у вигляді дробу.

Розв'язання. Маємо: $(a^{-3} - b^{-3}) : (a^{-1} - b^{-1}) = \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) =$

$$= \frac{b^3 - a^3}{a^3b^3} : \frac{b-a}{ab} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)\cdot ab}{a^3b^3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{a^2b^2}.$$

Відповідь: $\frac{b^2+ab+a^2}{a^2b^2}$.

Якого значення набуває вираз a^0, якщо $a \neq 0$? ○ Сформулюйте означення степеня із цілим від'ємним показником. ○ Доведіть тотожність $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

19.1. (*Усно.*) Чи правильна рівність:

1) $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$; 2) $4^0 = 0$; 3) $19^{-5} = -\frac{1}{19^5}$; 4) $(-4)^0 = 1$?

19.2. Замініть дробом степінь із цілим від'ємним показником:

1) 4^{-5}; 2) a^{-1}; 3) p^{-10}; 4) c^{-8}; 5) $(2a)^{-3}$; 6) $(a + b)^{-4}$.

19.3. Запишіть у вигляді дробу степінь із цілим від'ємним показником:
1) b^{-3}; 2) 7^{-1}; 3) 2^{-7};
4) t^{-6}; 5) $(3m)^{-2}$; 6) $(c - d)^{-7}$.

19.4. Запишіть дріб у вигляді степеня:
1) $\frac{1}{9^4}$; 2) $\frac{1}{p^5}$; 3) $\frac{1}{10^9}$;
4) $\frac{1}{m}$; 5) $\frac{1}{(ab)^4}$; 6) $\frac{1}{(m-n)^4}$.

19.5. Замініть степенем із цілим від'ємним показником дріб:
1) $\frac{1}{c^3}$; 2) $\frac{1}{19^7}$; 3) $\frac{1}{t^5}$; 4) $\frac{1}{b}$; 5) $\frac{1}{(cm)^6}$; 6) $\frac{1}{(a+x)^2}$.

2

19.6. Обчисліть:
1) 7^{-2}; 2) $(-2)^{-2}$; 3) $(-1)^{-5}$; 4) 12^{-1};
5) $(-7)^{-1}$; 6) 10^{-3}; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 8) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$;
9) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$; 10) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$; 11) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 12) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^{-1}$;
13) $0{,}1^{-1}$; 14) $(-0{,}2)^{-2}$; 15) $(1{,}2)^{-2}$; 16) $(-0{,}25)^{-3}$.

19.7. Обчисліть:
1) 2^{-3}; 2) $(-1)^{-6}$; 3) 15^{-1}; 4) $(-9)^{-1}$;
5) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$; 6) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 7) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 8) $\left(-3\frac{1}{7}\right)^{-1}$;
9) $0{,}2^{-1}$; 10) $(-0{,}1)^{-2}$; 11) $(1{,}5)^{-2}$; 12) $(-0{,}5)^{-4}$.

19.8. Подайте числа 16; 8; 4; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$ у вигляді степеня з основою 2.

19.9. Подайте у вигляді степеня з основою 10 числа 100; 10; 1; 0,1; 0,01.

19.10. Знайдіть значення виразу:
1) -5^{-2}; 2) $(-0{,}8)^{-2}$; 3) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 4) $-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

19.11. Обчисліть:
1) -2^{-3}; 2) $(-0{,}4)^{-2}$; 3) $-\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 4) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

19.12. Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степеня з від'ємним показником:
1) $2a^{-3}$; 2) $3mb^{-1}$; 3) $a^2b^{-3}c$; 4) $a^{-3}b^{-7}$.

19.13. Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степеня з від'ємним показником:
1) $4b^{-5}$; 2) $7a^{-1}p$; 3) $mn^{-2}p^7$; 4) $c^{-2}b^{-5}$.

3

19.14. Обчисліть:

1) $81 \cdot 3^{-5}$; 2) $-25 \cdot 10^{-2}$; 3) $27 \cdot (-18)^{-1}$;

4) $2\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$; 5) $-8 \cdot 2^{-4} + 3^0$; 6) $8^{-2} + 6^{-1}$;

7) $2{,}5^{-1} + (-13)^0$; 8) $4^{-3} - (-4)^{-2}$; 9) $(-8)^{-2} + (0{,}4)^{-1}$;

10) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} \cdot 10^{-3}$; 11) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} : \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 12) $1{,}25^{-2} + 2{,}5^{-3}$.

19.15. Знайдіть значення виразу:

1) $-64 \cdot 4^{-4}$; 2) $36 \cdot (-27)^{-1}$; 3) $-7 \cdot 0{,}1^{-2} + 5^0$;

4) $-3\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}$; 5) $5^{-2} - 10^{-1}$; 6) $3{,}2^{-1} + \left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

7) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 20^{-2}$; 8) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; 9) $1{,}5^{-2} - 1{,}2^{-3}$.

19.16. Обчисліть значення виразу $100(3^{-1} + 9^{-2} - 5^2 \cdot 3^{-4})^{-1}$ та дізнаєтеся, якою була довжина (у м) прапора України, який розгорнули в Дарницькому районі міста Києва до дня Державного прапора України.

19.17. Порівняйте з нулем вираз:

1) 8^{-13}; 2) $(-3{,}7)^{-10}$;

3) $(-2{,}9)^{-11}$; 4) $-(-2{,}1)^{-7}$.

19.18. Порівняйте з нулем значення виразу a^n, якщо:

1) $a > 0$ і n – ціле число;

2) $a < 0$ і n – парне від'ємне число;

3) $a < 0$ і n – непарне від'ємне число.

19.19. Порівняйте з нулем значення виразу b^m, якщо:

1) $b = 5$, $m = -13$; 2) $b = -1$, $m = -200$; 3) $b = -3$, $m = -41$.

19.20. Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємним показником:

1) $\frac{m^2n^2p^{-3}}{cx^3a^{-4}}$; 2) $\frac{7^0a^{-1}b^2}{5^{-2}x^{-3}m^{-1}}$.

19.21. Використовуючи від'ємний показник степеня, подайте у вигляді добутку дріб:

1) $\frac{3x^2}{p}$; 2) $\frac{15m}{n^2c^3}$; 3) $\frac{2x}{b^5(a-b)^2}$; 4) $\frac{(x+y)^7}{(x-y)^3}$.

19.22. Подайте у вигляді добутку, використовуючи степінь з від'ємним показником, дріб:

1) $\frac{5m^2}{x}$; 2) $\frac{7c^2}{y^7n^5}$; 3) $\frac{p}{c^4(x-y)^3}$; 4) $\frac{(a+2)^5}{(a-5)^2}$.

19.23. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $m^{-3} + n^{-2}$;
2) $ab^{-1} + ba^{-1} + c^0$;
3) $(m + n^{-1})(m^{-1} + n)$;
4) $(a^{-1} + b^{-1}) : (a^{-2} - b^{-2})$.

19.24. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $xy^{-3} + x^{-1}y^2$;
2) $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} - y^{-1})$.

4 **19.25.** Обчисліть:

1) $(1 + (1 - 5^{-2})^{-1})^{-1}$;
2) $(1 - (1 + 3^{-1})^{-2})^{-2}$.

19.26. Знайдіть значення виразу $(1 + (1 - 3^{-1})^{-1})^{-1} + (1 - (1 + 3^{-1})^{-1})^{-1}$.

19.27. Спростіть вираз

$$(1 - x^{-2})\left(1 - \frac{1}{x^{-1} - 1} + \frac{1}{x^{-1} + 1}\right).$$

Вправи для повторення

19.28. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\dfrac{a^2 + 2a}{a^2 - 4a + 4} - \dfrac{4a}{a^2 - 4a + 4}$;
2) $\dfrac{3p}{p^2 - 2p} - \dfrac{8 - p}{p^2 - 2p}$.

19.29. Сергій сказав Олексію: «Дай мені 2 гривні, і тоді грошей у нас стане порівну». Олексій відповів Сергію: «Краще ти дай мені 2 гривні, і тоді грошей у мене стане вдвічі більше, ніж у тебе». Скільки грошей у кожного?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

19.30. Подайте у вигляді степеня:

1) a^5a^3;
2) $b^7 : b^3$;
3) $(c^5)^4$;
4) m^7m;
5) $t^{10} : t$;
6) $(p^7)^2$.

19.31. Піднесіть до степеня одночлен:

1) $(mn^2)^7$;
2) $(-2p^3)^2$;
3) $(-5cm^2)^3$;
4) $(-a^2c^3)^{10}$.

19.32. Спростіть вираз:

1) $(5m^2n)^3 \cdot (0{,}2m^3n)^2$;
2) $(-0{,}1p^7c^3)^4 \cdot (10pc^2)^3$.

Життєва математика

19.33. Рейтингова агенція визначає рейтинг співвідношення «ціна-якість» для мікрохвильових печей за такими параметрами: середня ціна P та показники функціональності F, якості Q і дизайну D, кожний з яких експерти оцінюють від 0 до 4 балів. Підсумовують рейтинг за формулою $R = 8(F + Q) + 4D - 0{,}01P$. За даними таблиці, у якій зазначено всі вищезгадані параметри, визначте, яка з моделей мікрохвильових печей А, Б, В, Г має найнижчий рейтинг і яка – найвищий.

Модель печі	Середня ціна, грн	Функціональність	Якість	Дизайн
А	3200	2	3	2
Б	3600	3	2	4
В	3800	4	3	1
Г	4200	4	2	3

Цікаві задачі – поміркуй одначе

19.34. (*Задача Стенфордського університету.*) Серед дідусевих паперів було знайдено рахунок із записом: 72 індики – *67,9* долара. Першу й останню цифри вартості індиків замінили «зірочками», оскільки вони стерлися і стали нерозбірливими. Що це за цифри і скільки коштував один індик?

§ 20. Властивості степеня із цілим показником

1. Властивості степеня із цілим показником

Відомі нам властивості степеня з натуральним показником справджуються і для степеня з основою, відмінною від нуля, та цілим від'ємним показником. Отже,

для будь-якого $a \neq 0$, $b \neq 0$ і будь-яких цілих m і n:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$
$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Ці властивості можна довести, спираючись на формулу $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ та властивості степеня з натуральним показником.

Доведемо, наприклад, формулу $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ для випадку, коли m і n – від'ємні цілі числа.

Нехай $m = -p$, $n = -q$, де p і q – натуральні числа. Маємо:

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} =$$
$$= a^{-p+(-q)} = a^{m+n}.$$

Отже, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, якщо m і n – від'ємні цілі числа. ■

Якщо один з показників m або n – від'ємне ціле число, а другий – натуральне або нуль, формулу доводять аналогічно.

2. Застосування властивостей степеня із цілим показником до перетворень виразів

Приклад 1. Виконати дію:

1) a^2a^{-7}; 2) $b^{15} : b^{20}$; 3) $(x^{-3})^2 \cdot x^{-14}$.

Розв'язання.

1) $a^2a^{-7} = a^{2+(-7)} = a^{-5}$;

2) $b^{15} : b^{20} = b^{15-20} = b^{-5}$;

3) $(x^{-3})^2 \cdot x^{-14} = x^{-3\cdot 2} \cdot x^{-14} = x^{-6} \cdot x^{-14} = x^{-6+(-14)} = x^{-20}$.

Приклад 2. Подати степінь у вигляді добутку $(4a^5b^{-6})^{-2}$.

Розв'язання. $(4a^5b^{-6})^{-2} = 4^{-2}(a^5)^{-2}(b^{-6})^{-2} = \dfrac{1}{16}a^{-10}b^{12}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{16}a^{-10}b^{12}$.

Приклад 3. Спростити вираз $\dfrac{1}{2}x^{-3}y^5 \cdot (-4xy^{-5})$.

Розв'язання. $\dfrac{1}{2}x^{-3}y^5 \cdot (-4xy^{-5}) = \dfrac{1}{2} \cdot (-4) \cdot x^{-3}x \cdot y^5y^{-5} = -2x^{-3+1}y^{5+(-5)} =$

$= -2x^{-2}y^0 = -\dfrac{2}{x^2}$.

Відповідь: $-\dfrac{2}{x^2}$.

Приклад 4. Подати у вигляді виразу, що не містить степенів з від'ємним показником, вираз $\left(\dfrac{x^{-2}y}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{9}{x^{-3}y^2}\right)^{-2}$.

Розв'язання. $\left(\dfrac{x^{-2}y}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{9}{x^{-3}y^2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{x^{-2}y}\right)^{3} \cdot \left(\dfrac{x^{-3}y^2}{9}\right)^{2} = \dfrac{3^3 \cdot x^{-6}y^4}{x^{-6}y^3 \cdot 9^2} =$

$= \dfrac{27}{81}x^{-6+6}y^{4-3} = \dfrac{1}{3}y$.

Відповідь: $\dfrac{1}{3}y$.

3. Застосування властивостей степеня із цілим показником до обчислень значень виразів

Приклад 5. Обчислити $\dfrac{9^4 \cdot 3^{-22}}{27^{-5}}$.

Розв'язання. Подамо 9 та 27 у вигляді степеня з основою 3 та використаємо властивості степеня:

$$\frac{9^4 \cdot 3^{-22}}{27^{-5}} = \frac{(3^2)^4 \cdot 3^{-22}}{(3^3)^{-5}} = \frac{3^8 \cdot 3^{-22}}{3^{-15}} = \frac{3^{-14}}{3^{-15}} = 3^{-14-(-15)} = 3^1 = 3.$$

Відповідь: 3.

Приклад 6. Обчислити значення виразу $\dfrac{2^{3n-2} \cdot 3^{n+1}}{24^n}$, де n – ціле число.

Розв'язання. $$\frac{2^{3n-2} \cdot 3^{n+1}}{24^n} = \frac{2^{3n} \cdot 2^{-2} \cdot 3^n \cdot 3^1}{(2^3 \cdot 3)^n} = \frac{1}{2^2} \cdot 3 \cdot \frac{2^{3n} \cdot 3^n}{2^{3n} \cdot 3^n} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Відповідь: 0,75.

? Сформулюйте властивості степеня із цілим показником.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

20.1. (*Усно.*) Які з рівностей є тотожностями:
1) $m^3 \cdot m^{-7} = m^{-21}$; 2) $a^7 \cdot a^{-9} = a^{-2}$; 3) $a^5 \cdot a^{-5} = a$;
4) $c^8 : c^{-5} = c^{13}$; 5) $c^4 : c^5 = c$; 6) $m : m^8 = m^{-7}$;
7) $(a^7)^{-1} = a^{-7}$; 8) $(b^{-2})^{-3} = b^{-6}$; 9) $(t^5)^{-2} = t^{10}$?

20.2. Подайте у вигляді степеня добуток:
1) a^5a^{-2}; 2) $a^{-7}a^6$; 3) a^9a^{-9}; 4) $a^{-4}a^{-3}$.

20.3. Подайте у вигляді степеня добуток:
1) b^7b^{-3}; 2) $b^{-6}b^3$; 3) $b^{-5}b^{-7}$; 4) $b^{-8}b^8$.

20.4. Подайте у вигляді степеня частку:
1) $m^3 : m^{-2}$; 2) $m^5 : m^6$; 3) $m^{-3} : m^{-3}$; 4) $m^{-1} : m^{-8}$.

20.5. Подайте у вигляді степеня частку:
1) $c^5 : c^{-1}$; 2) $c^2 : c^8$; 3) $c^{-2} : c^{-3}$; 4) $c^{-4} : c^{-4}$.

20.6. Піднесіть степінь до степеня:
1) $(x^{-4})^{-2}$; 2) $(x^{-1})^{17}$; 3) $(x^0)^{-5}$; 4) $(x^7)^{-4}$.

20.7. Піднесіть степінь до степеня:
1) $(n^{-2})^{-7}$; 2) $(n^{15})^{-1}$; 3) $(n^{-8})^0$; 4) $(n^5)^{-3}$.

2

20.8. Подайте a^{-10} у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами, якщо один з множників дорівнює:
1) a^{-3}; 2) a^7; 3) a^{-1}; 4) a^{12}.

20.9. Подайте у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами степінь:
1) m^8; 2) m^{-2}; 3) m^{-17}; 4) m^0.

20.10. Обчисліть:

1) $2^7 \cdot 2^{-6}$; 2) $5^{-3} \cdot 5$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$;

5) $3^8 : 3^9$; 6) $7^{-15} : 7^{-16}$; 7) $9 : 9^{-1}$; 8) $\left(\frac{1}{15}\right)^{-15} : \left(\frac{1}{15}\right)^{-15}$;

9) $(2^{-2})^3$; 10) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-2}$; 11) $(0{,}1^{-1})^4$; 12) $\left(\left(\frac{1}{19}\right)^{-8}\right)^0$.

20.11. Знайдіть значення виразу:

1) $3^9 \cdot 3^{-8}$; 2) $2^{-3} \cdot 2$; 3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$;

5) $10^4 : 10^5$; 6) $8^{-12} : 8^{-13}$; 7) $7 : 7^{-1}$; 8) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-7} : \left(\frac{2}{7}\right)^{-7}$;

9) $(3^{-1})^4$; 10) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$; 11) $(0{,}2^3)^{-1}$; 12) $\left(\left(\frac{7}{13}\right)^0\right)^{-12}$.

20.12. Подайте у вигляді степеня з основою a вираз:
1) $a^7 : a^3 \cdot a^{-12}$; 2) $(a^5)^{-3} \cdot a^{12}$; 3) $(a^{-8})^3 : a^4$;
4) $a^0 \cdot (a^{-3})^4 \cdot a^5$; 5) $a^{-3} \cdot a^0 : a^5 : a$; 6) $(a^3)^{-2} \cdot (a^{-1})^{-6}$.

20.13. Подайте у вигляді степеня з основою b вираз:
1) $b^3 : b^7 \cdot b^2$; 2) $(b^{-2})^4 \cdot b^{10}$; 3) $(b^3)^{-2} : b^3$;
4) $b^7 \cdot (b^{-2})^3 \cdot b^0$; 5) $b^0 \cdot b^{-4} : b^3 : b$; 6) $(b^{-4})^{-1} \cdot (b^2)^{-2}$.

20.14. Спростіть вираз:
1) $4a^{-8}b^7 \cdot 5a^{10}b^{-3}$; 2) $10m^{-6}n^4 \cdot 0{,}4m^6n^{-9}$;

3) $\frac{1}{3}x^{-4}y^6 \cdot (-9x^5y^{-3})$; 4) $\left(-\frac{2}{7}b^{-6}m^{-4}\right)\left(-1\frac{1}{6}b^{-4}m^{-2}\right)$.

20.15. Спростіть вираз:

1) $10m^3n^{-2} \cdot 2m^{-5}n^4$; 2) $0{,}02a^{-8}b^3 \cdot 100a^8b^{-7}$;

3) $-\frac{1}{8}x^{-3}y^7 \cdot 16x^4y^{-10}$; 4) $\left(-1\frac{1}{4}p^{-3}c^{-5}\right)\left(-\frac{2}{5}p^{-2}c^{-3}\right)$.

20.16. Подайте у вигляді добутку степінь:
1) $(xy)^{-2}$; 2) $(ab^{-2})^{-3}$; 3) $(x^{-4}y^3)^{-1}$; 4) $(m^0c^{-3})^{-2}$;

5) $(0{,}1a^{-2})^{-1}$; 6) $\left(\frac{1}{3}m^{-3}p\right)^{-2}$; 7) $(-2c^{-3}p)^{-3}$; 8) $\left(\frac{2}{3}b^{-1}c^{-8}\right)^{-1}$.

20.17. Подайте у вигляді добутку степінь:
1) $(p^{-2}n)^{-5}$; 2) $(a^{-2}b^3)^{-4}$; 3) $(0{,}2m^{-4})^{-1}$;

4) $\left(\frac{1}{5}a^{-2}b\right)^{-2}$; 5) $(-4ab^{-2})^{-3}$; 6) $\left(\frac{3}{4}c^{-2}b^{-3}\right)^{-1}$.

3

20.18. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $64m^{-3}$; 2) $0{,}01p^{-8}$; 3) $0{,}0025c^{-8}p^{12}$; 4) $5\frac{1}{16}c^{12}x^{-20}$.

20.19. Обчисліть:

1) $((5^{-2})^{-6} \cdot (5^{-8})^{2})^{-1}$; 2) $\dfrac{10^{-8} \cdot (10^{-2})^{4}}{(10^{-5})^{3}}$;

3) $\dfrac{(3^{-2})^{3} \cdot (3^{-1})^{5}}{(3^{6})^{-2}}$; 4) $\dfrac{(7^{-2})^{-5} \cdot (7^{4})^{-3}}{(7^{3})^{-4} \cdot (7^{-1})^{-8}}$.

20.20. Знайдіть значення виразу:

1) $((4^{-4})^{-2} \cdot (4^{-5})^{2})^{-1}$; 2) $\dfrac{2^{-8} \cdot (2^{-2})^{5}}{(2^{-4})^{6} \cdot (2^{2})^{4}}$.

20.21. Знайдіть значення виразу:

1) $243 \cdot 3^{-6}$; 2) $64 \cdot (2^{-3})^{3}$; 3) $5^{-8} \cdot 25^{5} : 125$;

4) $49^{-1} \cdot \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-4}$; 5) $\dfrac{36^{-3} \cdot 6^{-8}}{(-6)^{-13}}$; 6) $\dfrac{8^{-3} \cdot 2^{-10}}{16^{-5}}$.

20.22. Обчисліть:

1) $128 \cdot 2^{-5}$; 2) $81 \cdot (3^{-2})^{3}$; 3) $7^{-8} \cdot 343^{3} : 49$;

4) $36^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^{-6}$; 5) $\dfrac{100^{-2} \cdot 10^{-7}}{1000^{-3}}$; 6) $\dfrac{5^{-3} \cdot 25^{8}}{125^{5}}$.

20.23. Знайдіть значення виразу $\dfrac{6^{-8} \cdot 2^{-13}}{36^{-5} \cdot 4^{-7}}$ та дізнаєтеся, якої висоти (у м) був флагшток у м. Дніпро, де було піднято стяг України розмірами 12 м × 18 м і масою 23 кг.

20.24. Спростіть вираз:

1) $3,5a^{3}b^{7} : (0,5a^{-2}b^{9})$; 2) $3\dfrac{1}{2}x^{-12}y^{-1} : \left(-1\dfrac{3}{4}x^{6}y^{-4}\right)$.

20.25. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{13a}{b^{-5}} \cdot \dfrac{b^{-8}}{26a^{-2}}$; 2) $-\dfrac{12a^{-3}}{35x} \cdot \dfrac{7x^{-7}}{6a^{-8}}$.

20.26. Спростіть вираз:

1) $4,9m^{3}n^{-4} : (0,7mn^{-2})$; 2) $\dfrac{7c^{-3}}{x^{5}} \cdot \left(-\dfrac{x^{7}}{21c^{-1}}\right)$.

20.27. Подайте у вигляді виразу, що не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\left(\dfrac{p^{-8}c^{12}}{m^{-4}t^{15}}\right)^{-2}$; 2) $\left(\dfrac{b^{-3}}{c^{5}}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{b^{-2}}{c^{-4}}\right)^{3}$;

3) $\left(\dfrac{7x^{-2}}{3y^{-4}}\right)^{-2} \cdot 49x^{-4}y^{3}$; 4) $\left(\dfrac{a^{-3}b}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2}{a^{-2}b^{2}}\right)^{-3}$.

20.28. Подайте у вигляді виразу, що не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\left(\frac{c^{-7}a^2}{b^{-2}x}\right)^{-3}$; 2) $\left(\frac{x^{-4}}{y^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{x^{-3}}{y^{-3}}\right)^2$;

3) $\left(\frac{5a^{-2}}{2b^{-3}}\right)^{-2} \cdot 25a^{-4}b^2$; 4) $\left(\frac{m^{-2}n^3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{8}{m^{-3}n^4}\right)^{-2}$.

4

20.29. Спростіть вираз (n – ціле число):

1) $\frac{25^n}{5^{2n-3}}$; 2) $\frac{12^n}{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}}$; 3) $\frac{a^{4n}b^{2n-1}}{a^{2n}b^{3+2n}}$.

20.30. Спростіть вираз (m – ціле число):

1) $\frac{49^m}{7^{2m-2}}$; 2) $\frac{18^m}{2^{m+2} \cdot 3^{2m-1}}$; 3) $\frac{x^{9m}y^{3m-2}}{x^{3m}y^{4+3m}}$.

20.31. Скоротіть дріб:

1) $\frac{5^{n+2} - 5^n}{12}$ (n – ціле число); 2) $\frac{x^7 + x^{10}}{x^{-1} + x^2}$;

3) $\frac{m^{-3} + 5 - m^7}{5m^2 - m^9 + m^{-1}}$.

20.32. Скоротіть дріб:

1) $\frac{18}{4^{n+1} - 4^n}$ (n – ціле число); 2) $\frac{x^9 + x^5}{x^{-3} + x}$; 3) $\frac{b^{-5} + 3 - b^2}{3b^3 - b^5 + b^{-2}}$.

20.33. Доведіть, що для будь-яких цілих значень m і n вираз набуває одного й того самого значення:

1) $\frac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n}$; 2) $\frac{7^{2m} \cdot 4^n}{49^{m+1} \cdot 2^{2n-1} - 49^{m-1} \cdot 2^{2n+1}}$.

Вправи для повторення

20.34. Відомо, що 3 кг огірків і 2 кг помідорів разом коштували 136 грн. Після того як огірки подешевшали на 20 %, а помідори подорожчали на 10 %, за 2 кг огірків і 3 кг помідорів заплатили 144 грн. Знайдіть початкову ціну кілограма огірків і кілограма помідорів.

20.35. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 8.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

20.36. Виконайте дії:

1) $2{,}7 \cdot 10^3$; 2) $1{,}32 \cdot 10^5$;
3) $4{,}7 \cdot 10^{-3}$; 4) $3{,}42 \cdot 10^{-4}$.

Життєва математика

20.37. У магазині спортивного одягу проходить акція: за умови купівлі товару на суму понад 5000 грн надається знижка в розмірі 10 % на наступну покупку. Юля хоче придбати велокуртку вартістю 4500 грн, велочеревики вартістю 1200 грн і светр вартістю 800 грн. Як вона має здійснити покупку, щоб заплатити найменше? Скільки у такому разі вона заплатить і скільки заощадить?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

20.38. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1977 р.*) Розв'яжіть рівняння $2^x + 1 = y^2$ в натуральних числах[2].

§ 21. Стандартний вигляд числа

1. Поняття про стандартний вигляд числа

У фізиці, хімії, техніці, астрономії часто мають справу і з дуже великими, і з дуже малими значеннями величин. Наприклад, маса Землі дорівнює 5 976 000 000 000 000 000 000 000 кг, а діаметр молекули водню – 0,00000000025 м.

Читати та записувати такі числа у вигляді десяткових дробів незручно, як і використовувати такий запис під час обчислень. Тому такі числа доцільно записувати у вигляді $a \cdot 10^n$, де n – ціле число, $1 \leqslant a < 10$. Наприклад,

5 976 000 000 000 000 000 000 000 кг $= 5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг;

0,00000000025 м $= 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ м.

Кажуть, що числа 5 976 000 000 000 000 000 000 000 і 0,00000000025 записано у ***стандартному вигляді***.

Стандартним виглядом числа **називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$, n – ціле число.**

Якщо число записано у стандартному вигляді, то показник степеня n називають ***порядком числа***. Наприклад, порядок числа, яким записано масу Землі в кілограмах, дорівнює 24, а порядок числа, яким записано діаметр молекули водню в метрах, дорівнює -10.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число. Порядок числа дає уявлення про це число.

Наприклад, якщо порядок числа x дорівнює 4, то це означає, що $1 \cdot 10^4 \leqslant x < 10 \cdot 10^4$, тобто $10\,000 \leqslant x < 100\,000$. Якщо порядок числа y дорівнює -2, то $1 \cdot 10^{-2} \leqslant y < 10 \cdot 10^{-2}$, тобто $0{,}01 \leqslant y < 0{,}1$.

Великий додатний порядок числа показує, що число дуже велике. Великий за модулем від'ємний порядок числа показує, що число дуже

[2] Розв'язати в натуральних числах означає знайти ті розв'язки, що є натуральними числами.

мале. Отже, якщо кажуть, *що одне число на порядок більше за інше*, то це означає, що воно в 10 разів більше за інше; відповідно, якщо на два порядки – у 100 разів більше і т. д.

Приклад 1. Подати число 272 000 у стандартному вигляді.

Розв'язання. У цьому числі поставимо кому так, щоб у цілій частині була одна цифра, відмінна від нуля. У результаті матимемо 2,72. Комою відокремили 5 цифр праворуч, чим зменшили це число у 10^5 разів. Отже, $272\ 000 = 2{,}72 \cdot 10^5$.

Відповідь: $2{,}72 \cdot 10^5$.

Приклад 2. Подати число 0,00013 у стандартному вигляді.

Розв'язання. У цьому числі перенесемо кому на 4 знаки праворуч, матимемо 1,3. Водночас число збільшили в 10^4 разів (на 4 порядки). Отже, $0{,}00013 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$.

Відповідь: $1{,}3 \cdot 10^{-4}$.

2. Дії над числами, записаними у стандартному вигляді

Приклад 3. Виконати дію і подати результат у стандартному вигляді:

1) $(5{,}7 \cdot 10^8) \cdot (3{,}6 \cdot 10^{-2})$;
2) $(2{,}1 \cdot 10^7) : (4{,}2 \cdot 10^{-3})$.

Розв'язання. 1) $(5{,}7 \cdot 10^8) \cdot (3{,}6 \cdot 10^{-2}) = (5{,}7 \cdot 3{,}6) \cdot (10^8 \cdot 10^{-2}) =$
$= 20{,}52 \cdot 10^6 = 2{,}052 \cdot 10^1 \cdot 10^6 = 2{,}052 \cdot 10^7$;

2) $(2{,}1 \cdot 10^7) : (4{,}2 \cdot 10^{-3}) = \dfrac{2{,}1 \cdot 10^7}{4{,}2 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{2{,}1}{4{,}2} \cdot \dfrac{10^7}{10^{-3}} = 0{,}5 \cdot 10^{10} =$
$= 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^9$.

Відповідь: 1) $2{,}052 \cdot 10^7$; 2) $5 \cdot 10^9$.

Приклад 4. Знайти різницю $4{,}7 \cdot 10^{-3} - 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ та записати результат у стандартному вигляді.

Розв'язання. Маємо зменшуване і від'ємник одного порядку.
$4{,}7 \cdot 10^{-3} - 3{,}2 \cdot 10^{-3} = 10^{-3}(4{,}7 - 3{,}2) = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Відповідь: $1{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Приклад 5. Знайти суму $2{,}3 \cdot 10^4 + 3{,}7 \cdot 10^3$ та записати результат у стандартному вигляді.

Розв'язання. Маємо два доданки різних порядків.
$2{,}3 \cdot 10^4 + 3{,}7 \cdot 10^3 = 2{,}3 \cdot 10^4 + 3{,}7 \cdot 10^4 \cdot 10^{-1} = 10^4(2{,}3 + 3{,}7 \cdot 10^{-1}) =$
$= (2{,}3 + 0{,}37) \cdot 10^4 = 2{,}67 \cdot 10^4$.

Відповідь: $2{,}67 \cdot 10^4$.

? Який запис числа називають його стандартним виглядом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

21.1. (*Усно.*) Чи записано число у стандартному вигляді:
1) 0,42; 2) $2{,}9 \cdot 10^0$; 3) $3{,}7 \cdot 10^{-8}$; 4) $0{,}05 \cdot 10^{-12}$;
5) $19{,}2 \cdot 10^2$; 6) $1{,}92 \cdot 10^{-29}$; 7) $1{,}92 \cdot 8^{-29}$; 8) $1{,}001 \cdot 10^7$?

21.2. Які із чисел подано у стандартному вигляді:
1) $3{,}0017 \cdot 10^0$; 2) $4{,}2 \cdot 10^{-5}$; 3) 0,03; 4) 117;
5) $10{,}5 \cdot 10^7$; 6) $1{,}115 \cdot 1017$; 7) $2{,}7 \cdot 10^{-3}$; 8) $2{,}7 \cdot 5^{-3}$?

21.3. (*Усно.*) Назвіть порядок числа, поданого у стандартному вигляді:
1) $1{,}7 \cdot 10^5$; 2) $2{,}001 \cdot 10^{-17}$; 3) $4{,}5 \cdot 10^1$; 4) 3,7.

21.4. Яким є порядок числа, поданого у стандартному вигляді:
1) $2{,}7 \cdot 10^{-5}$; 2) $3{,}8 \cdot 10^{12}$; 3) $2{,}45 \cdot 10^0$; 4) $4{,}11 \cdot 10^{-1}$?

2

21.5. Запишіть у стандартному вигляді число:
1) 200 000; 2) 5800; 3) 20 500; 4) 739;
5) 107,5; 6) 37,04; 7) 2700,5; 8) 300,8;
9) 0,37; 10) 0,0029; 11) 0,000007; 12) 0,010203.

21.6. Подайте у стандартному вигляді число:
1) 50 000; 2) 470 000; 3) 5 030 000; 4) 975;
5) 32,5; 6) 409,1; 7) 12900,5; 8) 87,08;
9) 0,43; 10) 0,00017; 11) 0,00004; 12) 0,90807.

21.7. Розгляньте таблицю, у якій подано кількість населення в деяких містах України на момент останнього перепису населення. Подайте ці числа у стандартному вигляді.

Місто	Область	Чисельність населення, осіб	Місто	Область	Чисельність населення, осіб
Арциз	Одеська	16 370	Енергодар	Запорізька	56 242
Батурин	Чернігівська	3066	Житомир	Житомирська	284 236
Біла Церква	Київська	200 131	Іршава	Закарпатська	9515
Дніпро	Дніпропетровська	1 065 008	Харків	Харківська	1 470 092

21.8. Подайте у стандартному вигляді число:
1) $27 \cdot 10^5$; 2) $427 \cdot 10^{-3}$;
3) $0{,}00027 \cdot 10^5$; 4) $0{,}0037 \cdot 10^{-4}$.

21.9. Запишіть у стандартному вигляді число:
1) $58 \cdot 10^{-8}$; 2) $237{,}2 \cdot 10^7$;
3) $0{,}2 \cdot 10^{-4}$; 4) $0{,}0017 \cdot 10^5$.

21.10. Подайте у вигляді десяткового дробу або цілого числа значення величини:
1) територія України становить $6{,}037 \cdot 10^5$ км^2;
2) діаметр молекули води дорівнює $2{,}8 \cdot 10^{-7}$ мм;
3) населення м. Києва на 1 січня 2015 року становило приблизно $2{,}888 \cdot 10^6$ осіб;
4) маса пташки колібрі дорівнює $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг.

21.11. Округліть число до сотень і отриманий результат запишіть у стандартному вигляді:
1) 137 152; 2) 12 311; 3) 2197,2; 4) 1000,135.

21.12. Запишіть у вигляді десяткового дробу або цілого числа:
1) $2{,}735 \cdot 10^4$; 2) $3{,}7 \cdot 10^{-3}$; 3) $3{,}17 \cdot 10^7$; 4) $1{,}2 \cdot 10^{-5}$.

21.13. Виконайте множення та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $(1{,}7 \cdot 10^3) \cdot (3 \cdot 10^{-8})$; 2) $(2{,}5 \cdot 10^{-5}) \cdot (6 \cdot 10^{-2})$.

21.14. Виконайте множення та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $(1{,}2 \cdot 10^{-8}) \cdot (4 \cdot 10^5)$; 2) $(1{,}5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3)$.

21.15. Виконайте ділення та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $(4{,}2 \cdot 10^7) : (2{,}1 \cdot 10^3)$; 2) $(1{,}4 \cdot 10^5) : (2{,}8 \cdot 10^{-2})$.

21.16. Виконайте ділення та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $(7{,}2 \cdot 10^5) : (2{,}4 \cdot 10^2)$; 2) $(1{,}7 \cdot 10^{-3}) : (8{,}5 \cdot 10^{-7})$.

21.17. Порівняйте числа:
1) $1{,}7 \cdot 10^5$ і $2{,}8 \cdot 10^5$; 2) $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ і $1{,}29 \cdot 10^{-4}$.

21.18. Порівняйте числа:
1) $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ і $3{,}7 \cdot 10^{-3}$; 2) $1{,}42 \cdot 10^5$ і $1{,}5 \cdot 10^5$.

21.19. Виконайте дію та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $2{,}7 \cdot 10^3 + 3{,}2 \cdot 10^3$; 2) $4{,}7 \cdot 10^{-15} - 3{,}2 \cdot 10^{-15}$.

21.20. Виконайте дію та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $4{,}7 \cdot 10^{-8} + 5{,}1 \cdot 10^{-8}$; 2) $2{,}9 \cdot 10^7 - 1{,}8 \cdot 10^7$.

3

21.21. Порівняйте числа:
1) $2{,}9 \cdot 10^8$ і $1{,}8 \cdot 10^9$; 2) $1{,}12 \cdot 10^{-7}$ і $1{,}12 \cdot 10^{-8}$.

21.22. Порівняйте числа:
1) $1{,}7 \cdot 10^5$ і $1{,}7 \cdot 10^4$; 2) $1{,}8 \cdot 10^{-6}$ і $8{,}9 \cdot 10^{-7}$.

21.23. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $2{,}7 \cdot 10^4 + 3{,}2 \cdot 10^5$; 2) $1{,}42 \cdot 10^{-1} - 2{,}8 \cdot 10^{-2}$.

21.24. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:
1) $2{,}7 \cdot 10^{-5} + 1{,}7 \cdot 10^{-4}$; 2) $3{,}7 \cdot 10^3 - 2{,}3 \cdot 10^2$.

21.25. Площа Автономної Республіки Крим дорівнює $2{,}61 \cdot 10^4$ км^2, а площа Чернівецької області – $8{,}1 \cdot 10^3$ км^2. Скільки відсотків складає площа Чернівецької області від площі Автономної Республіки Крим? (Відповідь округліть до цілих.)

21.26. Відстань від Землі до найближчої після Сонця зорі α-Центавра дорівнює $4{,}1 \cdot 10^{13}$ км. За який час світло від Землі досягне зорі α-Центавра? (Швидкість світла $3 \cdot 10^5$ км/с.)

21.27. Виразіть:

1) $8{,}3 \cdot 10^6$ т у грамах; 2) $3{,}72 \cdot 10^{-3}$ г у тоннах;
3) $4{,}9 \cdot 10^{-5}$ км у сантиметрах; 4) $4{,}97 \cdot 10^7$ см у метрах.

21.28. Подайте:

1) $3{,}87 \cdot 10^5$ см у кілометрах; 2) $4{,}92 \cdot 10^{-2}$ км у метрах;
3) $3{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг у центнерах; 4) $1{,}8 \cdot 10^9$ т у кілограмах.

21.29. У ставку живуть бактерії, які, перебуваючи в поживному середовищі, діляться навпіл кожні 3 години. Скільки бактерій утвориться з однієї бактерії через місяць (30 днів)? Відповідь запишіть наближено у стандартному вигляді. Розв'яжіть задачу, використовуючи калькулятор або комп'ютер.

4 **21.30.** Порядок числа a дорівнює –18. Яким є порядок числа:

1) $100a$; 2) $0{,}00001a$; 3) $a \cdot 10^7$; 4) $\dfrac{a}{10^{-3}}$?

21.31. Порядок числа b дорівнює 15. Яким є порядок числа:

1) $1000b$; 2) $0{,}01b$; 3) $b \cdot 10^{-3}$; 4) $\dfrac{b}{10^5}$?

Вправи для повторення

21.32. Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{2x^4 - 6x^2}{12x^3 - 4x^5}$, якщо $x = -0{,}5$; 2) $\dfrac{8y^6 - 8y^4}{4y^4 + 4y^3}$, якщо $y = 10$.

21.33. За яких значень a рівняння $\dfrac{(x + a - 1)(x + 2a - 3)}{x - 5} = 0$ має лише один корінь?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

21.34. Функцію задано формулою $y = \dfrac{x - 2}{x + 4}$.

1) Знайдіть область визначення функції.
2) Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її, обчисливши відповідні значення функції:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y										

21.35. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -5x$; 3) $y = -\frac{2}{3}x + 5$;

4) $y = -5$; 5) $y = 4$; 6) $y = 0,3x + 2$.

21.36. Чи належить графіку функції $y = x^2 - x$ точка:

1) $A(1;\ 1)$; 2) $B(-1;\ 2)$; 3) $C(0;\ 0)$; 4) $D(5;\ 30)$?

Життєва математика

21.37. 1) У родині Столярчуків пошкодився водопровідний кран. Щосекунди з нього випадає крапля води, а за 24 хв набігає повна склянка. 5 склянок води – це 1 л. Скільки літрів води втрачається із цього крана за добу? За місяць, у якому 30 днів?

2) На скільки діб вистачило б втраченої за місяць води одній людині, якщо за добу людина витрачає в середньому 100 л води?

3) Що треба зробити, щоб уникнути цих втрат?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

21.38. (*Київська міська олімпіада, 1985 р.*) Знайдіть усі трицифрові числа, які у 12 разів більші за суму своїх цифр.

§ 22. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік і властивості

1. Поняття про обернену пропорційність

Приклад 1. Пішохід має подолати 16 км. Якщо він ітиме зі швидкістю v км/год, то залежність часу t (у год), за який він подолає цю відстань, від швидкості руху можна подати формулою $t = \frac{16}{v}$. Зі збільшенням значення v у кілька разів значення t у стільки само разів зменшиться. У такому разі кажуть, що змінні t і v ***обернено пропорційні***.

Приклад 2. Площа прямокутника дорівнює 32 см^2, а одна з його сторін a см. Тоді другу сторону b (у см) можна знайти за формулою $b = \frac{32}{a}$. Тут змінні a і b також обернено пропорційні.

У прикладах 1 і 2 змінні t, v, a і b набувають лише додатних значень. Далі розглядатимемо функції, які задають формулою вигляду $y = \frac{k}{x}$, де k – число, $k \neq 0$, де змінні x і y можуть набувати і додатних, і від'ємних значень. Кожну з таких функцій називають ***оберненою пропорційністю***.

Функцію вигляду $y = \frac{k}{x}$, де x — незалежна змінна, k — деяке відмінне від нуля число, називають *оберненою пропорційністю*.

Областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ є всі числа, окрім нуля, оскільки для $x = 0$ вираз $\frac{k}{x}$ не має змісту.

2. Графік функції $y = \frac{k}{x}$

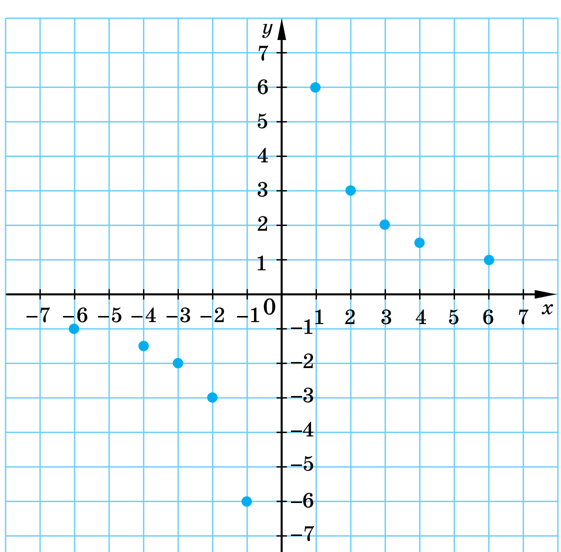
Побудуємо графік функції $y = \frac{k}{x}$ окремо для випадків, якщо $k > 0$ і якщо $k < 0$.

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = \frac{6}{x}$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції $y = \frac{6}{x}$ для кількох значень аргументу:

x	−6	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	6
y	−1	−1,5	−2	−3	−6	6	3	2	1,5	1

Позначимо на координатній площині точки, координати яких отримали в таблиці (мал. 22.1).

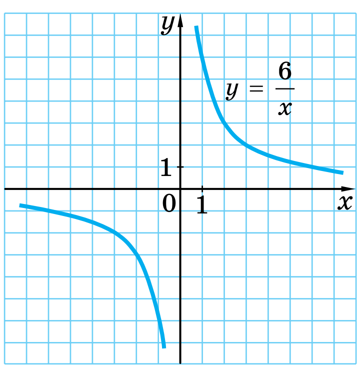


Мал. 22.1

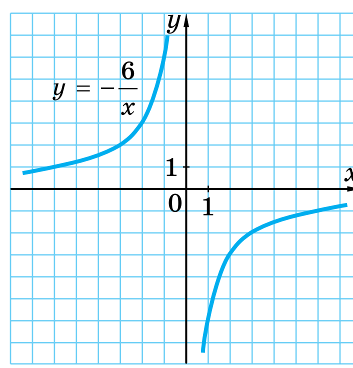
Якби на цій площині позначили більшу кількість точок, координати яких задовольняють формулу $y = \frac{6}{x}$, а потім сполучили їх плавною лінією, то отримали б графік функції $y = \frac{6}{x}$. Графік функції $y = \frac{6}{x}$ зображено на малюнку 22.2.

Графік оберненої пропорційності називають ***гіперболою***. Гіпербола складається з двох *гілок*. У випадку функції $y = \frac{6}{x}$ одна з гілок лежить у першій координатній чверті, а друга – у третій.

Оскільки число 0 не належить області визначення функції $y = \frac{6}{x}$, то на графіку цієї функції не буде точки з абсцисою $x = 0$, а отже гіпербола не буде перетинати вісь ординат, а також немає точки з ординатою $y = 0$, адже рівняння $\frac{6}{x} = 0$ не має коренів.



Мал. 22.2



Мал. 22.3

Що більшим за модулем є значення x, то меншим за модулем є значення y, і навпаки, що меншим за модулем є значення x, то більшим за модулем є значення y. Це означає, що гілки гіперболи необмежено наближаються до осей координат. Такий самий вигляд має графік функції $y = \frac{k}{x}$ для будь-якого $k > 0$.

Приклад 4. Побудувати графік функції $y = -\frac{6}{x}$.

Розв'язання. Міркуючи так само, як у попередньому прикладі, побудуємо графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Його зображено на малюнку 22.3.

Це також гіпербола, одна з гілок якої лежить у другій координатній чверті, а друга – у четвертій. Такий самий вигляд має графік функції $y = \frac{k}{x}$ для будь-якого $k < 0$.

Приклад 5. Побудувати графік функції $y = \dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$.

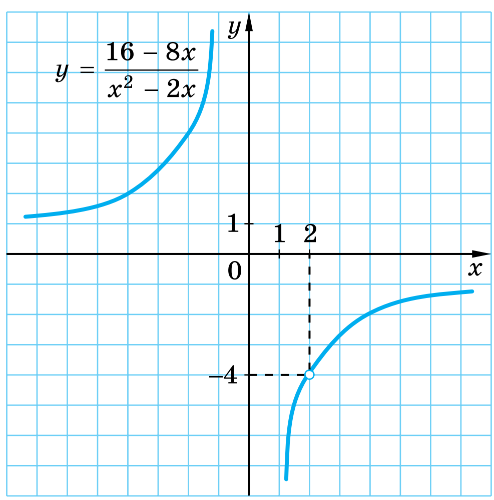
Розв'язання. Областю визначення функції є всі числа, крім 0 і 2, тобто ті, для яких знаменник $x^2 - 2x$ не дорівнює нулю.

Спростимо дріб: $\dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x} = \dfrac{8(2 - x)}{x(x - 2)} = -\dfrac{8(x - 2)}{x(x - 2)} = -\dfrac{8}{x}$.

Тому за умови, що $x \neq 0$ і $x \neq 2$, функція має вигляд $y = -\dfrac{8}{x}$.

Отже, графіком функції $y = \dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$ є гіпербола $y = -\dfrac{8}{x}$, що не містить точок з абсцисами 0 і 2, тобто з «виколотою» точкою (2; −4), а точок з абсцисою $x = 0$ у гіперболи немає.

Графік функції $y = \dfrac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$ зображено на малюнку 22.4.



Мал. 22.4

3. Властивості функції $y = \dfrac{k}{x}$

Узагальнимо *властивості оберненої пропорційності* $\boldsymbol{y = \dfrac{k}{x}}$.

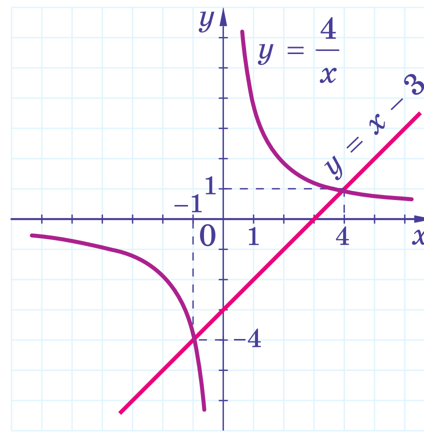
1. **Область визначення функції складається з усіх чисел, крім числа нуль.**
2. **Область значень функції складається з усіх чисел, крім числа нуль.**
3. **Графік функції — гіпербола, гілки якої лежать у першому і третьому координатних кутах, якщо $k > 0$, та в другому і четвертому, якщо $k < 0$.**
4. **Гілки гіперболи необмежено наближаються до осей координат.**

4. Графічний метод розв'язування рівнянь

Приклад 6. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = x - 3$. Знайти точки їх перетину та, користуючись побудованими графіками, розв'язати рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.

Розв'язання. Графіком функції $y = \frac{4}{x}$ є гіпербола, гілки якої лежать у першому і третьому координатних кутах, а графіком функції $y = x - 3$ є пряма, що проходить через точки $(0; -3)$ і $(3; 0)$.

Графіки зображено на малюнку 22.5. Вони перетинаються в точках $(4; 1)$ і $(-1; -4)$, абсциси яких 4 і -1 і є розв'язками рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.



Мал. 22.5

Справді, якщо $x = 4$, то вирази $\frac{4}{x}$ і $x - 3$ набувають однакових значень: $\frac{4}{x} = \frac{4}{4} = 1$ і $x - 3 = 4 - 3 = 1$.

Якщо $x = -1$, аналогічно: $\frac{4}{x} = \frac{4}{-1} = -4$ і $x - 3 = -1 - 3 = -4$.

Отже, числа 4 і -1 – корені рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.

Відповідь: $(4; 1)$; $(-1; -4)$ – точки перетину; 4, -1 – корені рівняння.

Запропонований у прикладі 6 метод розв'язування рівнянь називають ***графічним методом розв'язування рівнянь***.

Якщо абсциса точки перетину графіків функцій – ціле число, треба виконати перевірку, оскільки в багатьох випадках корені рівняння цим методом можна знайти лише наближено.

Яку функцію називають оберненою пропорційністю? Що є графіком оберненої пропорційності та як він розташований у координатній площині? Які властивості має обернена пропорційність?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

22.1. (*Усно.*) Які з функцій є оберненою пропорційністю:

1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = \frac{x}{8}$; 3) $y = -\frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{2}{x}$;

5) $y = \frac{0}{x}$; 6) $y = 7$; 7) $y = \frac{0,0002}{x}$; 8) $y = \frac{0,0002}{x^2}$?

22.2. Випишіть функції, що задають обернену пропорційність:

1) $y = \frac{x}{7}$; 2) $y = \frac{7}{x}$; 3) $y = -\frac{3}{x}$; 4) $y = -\frac{x}{3}$;

5) $y = -9$; 6) $y = -\frac{0,01}{x}$; 7) $y = -\frac{0,01}{x^2}$; 8) $y = 0{,}01x$.

22.3. У яких координатних кутах лежить графік функції:

1) $y = \frac{15}{x}$; 2) $y = -\frac{9}{x}$?

2

22.4. Обчисліть значення функції $y = \frac{20}{x}$, якщо значення аргументу дорівнює –2; 5; –10; 1.

22.5. Обчисліть значення функції $y = \frac{12}{x}$, якщо значення аргументу дорівнює –3; 4; –6; 1.

22.6. Обернену пропорційність задано формулою $y = \frac{100}{x}$. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її:

x	–50		–20		5	10		
y		–4		1000			5	0,1

22.7. Обернену пропорційність задано формулою $y = \frac{80}{x}$. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її:

x	–80	–40		1			160	
y			–5		20	16		0,1

22.8. Побудуйте графік функції $y = -\frac{8}{x}$, склавши таблицю значень функції для значень аргументу –8; –4; –2; –1; 1; 2; 4; 8.

22.9. Побудуйте графік функції $y = \frac{12}{x}$, склавши таблицю її значень для x = –12; –6; –4; –3; –2; –1; 1; 2; 3; 4; 6; 12.

22.10. Не виконуючи побудови графіка функції $y = \frac{128}{x}$, з'ясуйте, чи належить йому точка:

1) $A(4; 32)$; 2) $B(-8; 16)$; 3) $C(-2; -64)$; 4) $D(0; -128)$.

22.11. Чи належить графіку функції $y = -\frac{162}{x}$ точка:

1) $A(-6; 27)$; 2) $B(9; 18)$; 3) $C(0; -162)$; 4) $D(81; -2)$?

22.12. (*Усно.*) Графіки яких функцій проходять через точку $A(4; -3)$:

1) $y = \frac{12}{x}$; 2) $y = -\frac{12}{x}$; 3) $y = -\frac{24}{x}$; 4) $y = x - 7$?

22.13. На 145 грн придбали y кг цукерок по x грн за кілограм. Запишіть формулою залежність y від x. Чи є ця залежність оберненою пропорційністю?

3

22.14. Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x}$. За графіком знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -2; $2{,}5$; -1;

2) значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 10; -4; 2;

3) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

22.15. Побудуйте графік функції $y = -\frac{4}{x}$. За графіком знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює $-0{,}5$; 2; -4;

2) значення аргументу, для яких функція дорівнює 4; -1; 2;

3) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

22.16. Графік оберненої пропорційності проходить через точку $M(-4; 12)$. Задайте цю функцію формулою.

22.17. Запишіть формулу оберненої пропорційності, якщо її графік проходить через точку $P\left(12;\ 1\frac{1}{6}\right)$.

22.18. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x}$ для $1 \leqslant x \leqslant 4$. Запишіть область значень цієї функції.

22.19. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{8}{x} = 2$; 2) $2x = \frac{18}{x}$; 3) $-\frac{4}{x} = 3 - x$.

22.20. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{6}{x} = 3$; 2) $\frac{4}{x} = x$; 3) $4 - x = -\frac{5}{x}$.

4

22.21. Побудуйте графік функції: 1) $y = \frac{4}{|x|}$; 2) $y = -\frac{8}{|x|}$.

22.22. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ -1{,}5x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

22.23. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ \dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

22.24. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{24}{(x+3)^2 - (x-3)^2}$; 2) $y = \dfrac{6x - 18}{3x - x^2}$.

Вправи для повторення

22.25. Знайдіть значення виразу:

1) 3^{-4}; 2) $(-19)^{-1}$; 3) $\left(1\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$; 4) $(-0{,}2)^{-3}$.

22.26. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{2}{3}a^{-1}b\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{9}{10}a^{-3}b^{-2}\right)^{-1}$; 2) $\left(\dfrac{4mn^{-2}}{5a}\right)^{-1} \cdot 8m^{-3}n^{-2}a^5$.

22.27. Обчисліть $((1 - (1 + 2^{-1})^{-1})^{-1})^{-4}$.

Життєва математика

22.28. Квиток на поїзд Київ – Харків для дорослого коштує 520 гривень. Вартість квитка для дитини віком від 6 до 14 років становить 25 % від вартості квитка для дорослого. Група у складі 20 школярів віком 13–14 років і 2 дорослих вирушає на екскурсію з Києва до Харкова поїздом (туди і назад). Скільки коштують квитки на всю групу?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

22.29. Вираз $(x^2 - x - 1)^{13}$ перетворили на многочлен. Знайдіть суму коефіцієнтів цього многочлена.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5 (§§ 19–22)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Подайте вираз $a^{-5}a^2$ у вигляді степеня з основою a.

А. a^{-3} **Б.** a^3
В. a^{-10} **Г.** a^{10}

2. Укажіть число, яке подано у стандартному вигляді.

А. $12 \cdot 10^{-7}$ **Б.** $1{,}7 \cdot 8^{10}$
В. $0{,}05 \cdot 10^{15}$ **Г.** $1{,}7 \cdot 10^8$

3. Укажіть функцію, що є оберненою пропорційністю.

А. $y = \frac{x}{2}$ **Б.** $y = \frac{2}{x}$ **В.** $y = 2x$ **Г.** $y = 2$

2 **4.** Обчисліть $(-5)^{-3}$.

А. 15 **Б.** $\frac{1}{25}$ **В.** $-\frac{1}{125}$ **Г.** $\frac{1}{125}$

5. Спростіть вираз $-4a^{-5}b^{7} \cdot 1\frac{1}{4}a^{-3}b^{-2}$.

А. $-a^{-8}b^{5}$ **Б.** $-5a^{-8}b^{5}$ **В.** $-5a^{15}b^{-14}$ **Г.** $5a^{-8}b^{5}$

6. Укажіть стандартний вигляд числа 217,38.

А. $2{,}1738 \cdot 10^{2}$
Б. $2{,}1738 \cdot 10^{-2}$
В. $2{,}1738 \cdot 10$
Г. $2{,}1738 \cdot 10^{4}$

3 **7.** Подайте частку $(3{,}5a^{5}b^{-3}) : (0{,}5a^{-3}b^{-2})$ у вигляді виразу, який не містить степеня з від'ємним показником.

А. $\frac{5a^{8}}{b}$ **Б.** $7a^{8}b$ **В.** $\frac{7a^{8}}{b}$ **Г.** $\frac{7a^{2}}{b^{5}}$

8. Виконайте додавання $4{,}7 \cdot 10^{3} + 2{,}1 \cdot 10^{4}$ та подайте відповідь у стандартному вигляді.

А. $2{,}57 \cdot 10^{3}$ **Б.** $2{,}57 \cdot 10^{4}$ **В.** $25{,}7 \cdot 10^{3}$ **Г.** $6{,}8 \cdot 10^{4}$

9. Укажіть формулу оберненої пропорційності, графік якої проходить через точку $A(-6;\ 1{,}5)$.

А. $y = -4x$ **Б.** $y = -\frac{6}{x}$

В. $y = -\frac{9}{x}$ **Г.** $y = \frac{9}{x}$

4 **10.** Обчисліть $(1 + (1 - 2^{-1})^{-2})^{-3}$.

А. $\frac{64}{125}$ **Б.** $\frac{1}{8}$

В. $\frac{1}{25}$ **Г.** $\frac{1}{125}$

11. Скоротіть дріб $\frac{x^{-2} + x^{3}}{x^{2} + x^{-3}}$.

А. Дріб є нескоротним **Б.** 1 **В.** x **Г.** $\frac{1}{x}$

12. Порядок числа a дорівнює -16. Знайдіть порядок числа $0{,}0001a$.

А. -12 **Б.** -20 **В.** -4 **Г.** -16

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г).

Вираз	*Значення виразу*
1. $5 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^{-1}$	**А.** $\frac{1}{4}$
2. $\frac{2^{-3} \cdot 4^8}{8^5}$	**Б.** $\frac{1}{2}$
3. $\frac{5^{-6} \cdot 2^{11}}{25^{-3} \cdot 4^6}$	**В.** 2
	Г. 4

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 19–22

1 **1.** Подайте у вигляді степеня з основою a:
1) a^2a^{-3}; 2) $a^{-5}a^{-4}$; 3) $a^5 : a^{-7}$; 4) $(a^{-2})^3$.

2. Чи записано у стандартному вигляді число:
1) $0{,}37 \cdot 10^5$; 2) $2{,}4 \cdot 10^{-12}$; 3) $1{,}5 \cdot 10^8$; 4) $3{,}5 \cdot 8^{10}$?

3. Які з функцій задають обернену пропорційність:
1) $y = \frac{x}{5}$; 2) $y = \frac{5}{x}$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = -\frac{6}{x^2}$?

2 **4.** Обчисліть:
1) 2^{-3}; 2) $(-5)^{-1}$; 3) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 4) $(2{,}7 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{-8})$.

5. Спростіть вираз:
1) $-7a^{-3}b^9 \cdot 1\frac{1}{7}a^{-5}b^{-3}$; 2) $\left(-\frac{2}{3}x^3y\right) \cdot \left(-\frac{9}{10}x^{-5}y^{-1}\right)$.

6. Подайте число у стандартному вигляді:
1) 27 000; 2) 0,002; 3) 371,5; 4) 0,0109.

3 **7.** Перетворіть на вираз, що не містить степеня з від'ємним показником:
1) $(4{,}2a^7b^{-9}) : (0{,}7a^{-3}b^{-5})$; 2) $\left(\frac{2x^4}{5y^7}\right)^{-2} \cdot 4x^8y^{-18}$.

8. Побудуйте графік функції $y = -\frac{12}{x}$. За графіком знайдіть:
1) значення функції, якщо $x = 4;\ -2$;
2) значення аргументу, для яких функція дорівнює $-6;\ 1$;
3) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

9. Скоротіть дріб: 1) $\frac{48}{5^{n+2}-5^n}$; 2) $\frac{x^{-3}+x^2}{x+x^6}$.

Додаткові завдання

10. Обчисліть $((1+(1-2^{-1})^{-1})^{-1})^{-3}$.

11. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ -4, & \text{якщо } -2 < x < 3, \\ -\frac{12}{x}, & \text{якщо } x \geqslant 3. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 5

До § 19

1. Замініть дробом степінь із цілим від'ємним показником:
1) 8^{-3}; 2) c^{-1}; 3) $(3m)^{-2}$; 4) $(a+2)^{-5}$.

2. Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником:
1) $\frac{1}{8^2}$; 2) $\frac{1}{c}$; 3) $\frac{1}{(ab)^3}$; 4) $\frac{1}{(1-m)^4}$.

3. Обчисліть:
1) 9^{-2}; 2) 4^{-1}; 3) $(-5)^{-1}$; 4) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$;
5) $0{,}1^{-3}$; 6) $\left(2\frac{1}{7}\right)^{-1}$; 7) $0{,}25^{-4}$; 8) $(-2{,}5)^{-3}$.

4. Обчисліть значення виразу:
1) $100x^{-2}$, якщо $x = 1; 10; 100$;
2) $a^{-3}b$, якщо $a = 4$, $b = 8$.

5. Знайдіть значення виразів a^n і $-a^n$, якщо:
1) $a = -1$, $n = 8$; 2) $a = 5$, $n = -2$.

6. Не виконуючи обчислень, порівняйте:
1) 7^{-3} і $(-7)^3$; 2) $(-1{,}2)^0$ і $(-5)^{-5}$; 3) $(-13)^{-4}$ і $(-13)^4$;
4) $(-12)^6$ і 12^{-6}; 5) -14^{-2} і $(-14)^{-2}$; 6) $(-9)^{-5}$ і -9^{-5}.

7. Обчисліть:
1) $-0{,}25^{-2} : (-4^3)$; 2) $0{,}02 \cdot (-0{,}5)^{-3}$;
3) $0{,}4^{-2} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^{-1}$; 4) $(-1{,}8)^0 - 4^{-1} \cdot 0{,}05^{-2}$.

8. Подайте вираз у вигляді дробу:
1) $(1+a^{-3})(1+a)^{-2}$; 2) $\left(\frac{1}{x^{-1}} - \frac{1}{y^{-1}}\right)(y-x)^{-1}$.

4 **9.** Обчисліть $\dfrac{0,6^{-4}\left(1\frac{2}{3}\right)^{-6}}{(0,36)^{-5}\left(2\frac{7}{9}\right)^{-6}}$.

10. Розв'яжіть рівняння $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-1}+\left(\dfrac{x-1}{2x}\right)^{-1}=3$.

11. Спростіть вираз $\left(\dfrac{1}{b^{-8}}-\dfrac{1}{a^{-8}}\right)\left(\dfrac{a^{-8}+b^{-8}}{a^{-16}-b^{-16}}\right)$.

До § 20

1 **12.** Подайте у вигляді степеня з основою a:
1) a^3a^{-5}; 2) $a^8a^{-7}a^{-2}$; 3) $a^7 : a^{-3}$;
4) $a^{-5} : a^{-4}$; 5) $(a^2)^{-6}$; 6) $(a^{-3})^{-5}$.

2 **13.** Обчисліть:
1) $4^{-5}\cdot 4^6$; 2) $2^{-7}\cdot 2^4$; 3) $3^{-9} : 3^{-7}$;
4) $5^{17} : 5^{19}$; 5) $((0,3)^{-1})^{-2}$; 6) $\left(\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-9}\right)^0$.

14. Спростіть вираз:
1) $12a^{-2}b\cdot\dfrac{1}{3}ab^{-3}\cdot\dfrac{3}{4}a^{-3}b^2$; 2) $\left(-\dfrac{7}{12}x^{-2}\right)\cdot(-6x^3)\cdot\dfrac{1}{7}x^{-8}$.

15. Подайте вираз x^{-12}, де $x\neq 0$, у вигляді степеня з основою:
1) x^2; 2) x^{-3}.

3 **16.** Знайдіть значення виразу $\dfrac{9}{28}x^{-2}y^7\cdot\dfrac{14}{15}x^7y^{-2}\cdot(-10x^{-5}y^{-6})$, якщо $x=-1{,}19$, $y=-0{,}1$.

17. Спростіть вираз:
1) $(-3p^{-3}ca^{-2})^{-2}(0{,}1pc^{-2}a)^2$; 2) $\left(\dfrac{1}{4}a^{-4}b^{-2}\right)^2\left(\dfrac{a^{-3}}{4b}\right)^{-3}$.

18. Доведіть тотожність $(a^{-2}-a^{-1}+1):(a^{-2}+a)=\dfrac{1}{a+1}$.

4 **19.** Подайте вираз x^3+5+x^{-5} у вигляді добутку двох множників, один з яких дорівнює:
1) x; 2) x^{-1}; 3) x^{-3}.

20. Доведіть, що для будь-якого цілого значення k справджується рівність:
1) $3\cdot 7^k+4\cdot 7^k=7^{k+1}$; 2) $5\cdot 4^k-4^k=4^{k+1}$.

До § 21

21. Які із чисел записано у стандартному вигляді? Для чисел, записаних у стандартному вигляді, назвіть порядок числа:

1) $3{,}7 \cdot 108$; 2) $0{,}29 \cdot 10^{11}$; 3) $2{,}94$; 4) $10{,}94$;
5) $1{,}135 \cdot 10^{-11}$; 6) $0{,}311$; 7) $1{,}02 \cdot 10^{15}$; 8) $1{,}02 \cdot 15^{10}$.

22. Подайте у стандартному вигляді число:

1) 130 000; 2) 783,5;
3) 0,0012; 4) 0,001002003.

23. Виконайте дію над числами, поданими у стандартному вигляді:

1) $(2{,}7 \cdot 10^8)(5 \cdot 10^{-5})$; 2) $(9{,}6 \cdot 10^{-8}) : (3{,}2 \cdot 10^{-12})$;
3) $2{,}7 \cdot 10^4 + 3{,}1 \cdot 10^4$; 4) $3{,}42 \cdot 10^{-5} - 2{,}11 \cdot 10^{-5}$.

24. Площа басейну річки Дніпро становить $5{,}04 \cdot 10^5$ км^2, а площа басейну річки Південний Буг – 12,6 % від площі басейну Дніпра. Знайдіть площу басейну Південного Бугу та подайте її у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$, округливши число a до сотих.

25. Виразіть час у системі СІ та запишіть результат у стандартному вигляді:

1) 1 година; 2) 1 доба; 3) 1 місяць (30 днів);
4) 1 рік (365 днів); 5) 1 сторіччя.

До § 22

26. Які з функцій задають обернену пропорційність? У яких координатних кутах лежать їх графіки:

1) $y = \frac{x^2}{4}$; 2) $y = \frac{4}{x^2}$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 4) $y = \frac{4}{x}$;
5) $y = -\frac{4}{x}$; 6) $y = -\frac{x}{4}$; 7) $y = 4x$; 8) $y = -4x$?

27. Обернену пропорційність задано формулою $y = -\frac{16}{x}$. Не будуючи її графіка, знайдіть значення:

1) функції, якщо значення аргументу дорівнює -8; 2; -5;
2) аргументу, для якого значення функції дорівнює 4; $-0{,}5$; 2,5.

28. Побудуйте графік функції:

1) $y = -\frac{10}{x}$; 2) $y = \frac{2}{x}$, де $-2 \leqslant x \leqslant 4$, $x \neq 0$.

29. Точка $A(-3;\ 4)$ належить графіку оберненої пропорційності. Чи належить цьому графіку точка:

1) $B(1;\ 12)$; 2) $C(2;\ -6)$?

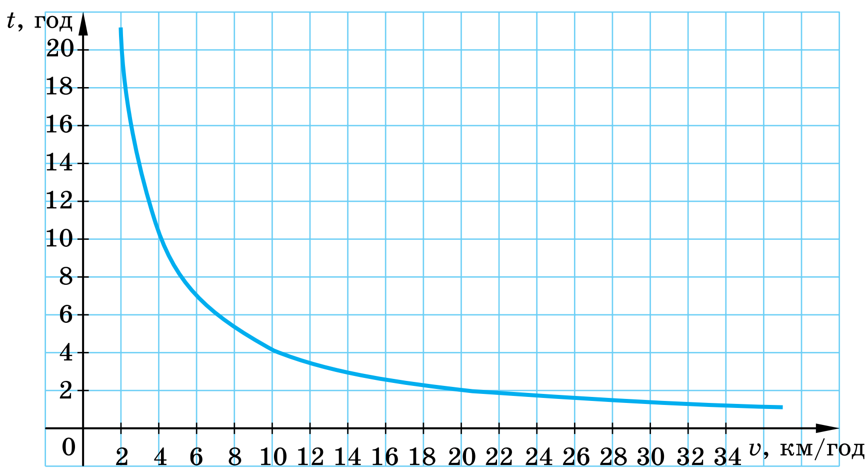
30. Прямокутний паралелепіпед, сторони основи якого дорівнюють x см і y см, має висоту 10 см та об'єм 120 см^3. Виразіть формулою залежність y від x. Чи є ця залежність оберненою пропорційністю? Якою є область визначення функції? Побудуйте її графік.

31. На малюнку 1 зображено залежність часу на подолання відстані між пунктами A і B від швидкості. За графіком з'ясуйте:

1) скільки потрібно часу, щоб подолати відстань від A до B, якщо швидкість руху буде 10 км/год; 20 км/год;

2) з якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з A до B за 2 год; 8 год;

3) якою є відстань від A до B.



Мал. 1

4 **32.** Не будуючи графіка функції $y = \frac{4}{x}$, знайдіть ті його точки, координати яких між собою рівні.

33. Не будуючи графіка функції $y = -\frac{9}{x}$, знайдіть ті його точки, координати яких є протилежними числами.

34. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{30x - 18x^2}{3x^3 - 5x^2}$; 2) $y = \frac{4 + x}{x^2 + x} + \frac{3}{x + 1}$.

Головне в темі 5

СТЕПІНЬ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^0 = 1,\ a \neq 0.$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0,\ n \text{ — натуральне число,}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n},\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ n \text{ — натуральне число.}$$

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

Для будь-якого $a \neq 0$, $b \neq 0$ і будь-яких цілих m і n:

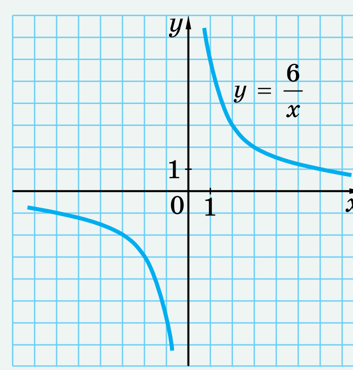
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$ і n — ціле число.

ФУНКЦІЯ $y = \frac{k}{x}$

Функцію вигляду $y = \frac{k}{x}$, де x — незалежна змінна, $k \neq 0$, називають ***оберненою пропорційністю***.



ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $y = \frac{k}{x}$

1. Область визначення функції складається з усіх чисел, крім числа нуль.
2. Область значень функції складається з усіх чисел, крім числа нуль.
3. Графік функції — гіпербола, гілки якої лежать у першому і третьому координатних кутах, якщо $k > 0$, та у другому і четвертому, якщо $k < 0$.
4. Гілки гіперболи необмежено наближаються до осей координат.

ТЕМА 6

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **дізнаєтеся** про подібні трикутники та їхні властивості; про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику та їх властивості; про властивість бісектриси трикутника;
- **навчитеся** обґрунтовувати подібність трикутників; використовувати узагальнену теорему Фалéса та подібність трикутників для розв'язування задач.

§ 23. Узагальнена теорема Фалéса

1. Відношення та пропорційність відрізків

Відношенням відрізків AB і CD називають відношення їхніх довжин, тобто $\frac{AB}{CD}$.

Кажуть, що відрізки AB і CD *пропорційні відрізкам* A_1B_1 і C_1D_1, якщо $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$.

Наприклад, якщо $AB = 6$ см, $CD = 8$ см, $A_1B_1 = 3$ см, $C_1D_1 = 4$ см, то $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}$, справді $\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=2$.

Поняття пропорційності можна поширити й на більшу кількість відрізків. Наприклад, три відрізки AB, CD і MN пропорційні трьом відрізкам A_1B_1, C_1D_1 і M_1N_1, якщо

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{MN}{M_1N_1}.$$

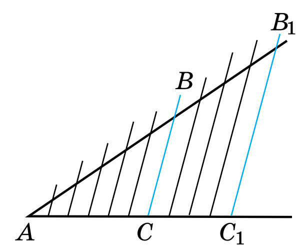
2. Узагальнена теорема Фалéса та наслідки з неї

Т Узагальнена теорема Фалéса (теорема про пропорційні відрізки). **Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.**

Доведення. Нехай паралельні прямі BC і B_1C_1 перетинають сторони кута A (мал. 23.1). Доведемо, що $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$.

1) Розглянемо випадок, коли довжини відрізків AC і CC_1 є раціональними числами (цілими або дробовими). Тоді існує відрізок завдовжки h, який можна відкласти ціле число разів і на відрізку AC, і на відрізку CC_1. Нехай $AC = a$, $CC_1 = b$, a і b – раціональні числа. Запишемо їх у вигляді дробу з однаковим знаменником: $AC = \frac{p}{n}$, $CC_1 = \frac{q}{n}$. Тому $h = \frac{1}{n}$. Маємо: $AC = ph$, $CC_1 = qh$.

2) Розіб'ємо відрізок AC на p рівних частин завдовжки h, а відрізок CC_1 – на q рівних частин завдовжки h. Проведемо через точки розбиття прямі, паралельні прямій BC (мал. 23.1). За теоремою Фалéса, вони розіб'ють відрізок AB_1 на $(p + q)$ рівних відрізків завдовжки h_1, причому AB складатиметься з p таких відрізків, а BB_1 – з q таких відрізків. Маємо: $AB = ph_1$, $BB_1 = qh_1$.



Мал. 23.1

3) Знайдемо відношення $\frac{AB}{BB_1}$ і $\frac{AC}{CC_1}$. Матимемо:

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{ph_1}{qh_1} = \frac{p}{q} \text{ і } \frac{AC}{CC_1} = \frac{ph}{qh} = \frac{p}{q}.$$

Отже, $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$. ■

Враховуючи, що у пропорції середні члени можна поміняти місцями, з доведеної рівності приходимо до такого.

Наслідок 1. $\boldsymbol{\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}}$.

Наслідок 2. $\boldsymbol{\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}}$.

Доведення. Оскільки $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$, то $\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$. Додамо до обох частин цієї рівності по одиниці: $1 + \frac{BB_1}{AB} = 1 + \frac{CC_1}{AC}$, тобто $\frac{AB + BB_1}{AB} = \frac{AC + CC_1}{AC}$.

Враховуючи, що $AB + BB_1 = AB_1$, $AC + CC_1 = AC_1$, матимемо: $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$.

Звідки $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$. ■

3. Побудова четвертого пропорційного відрізка

Розглянемо, як побудувати один із чотирьох відрізків, що утворюють пропорцію, якщо відомо три з них.

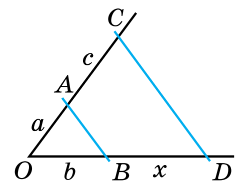
Приклад. Дано відрізки a, b, c. Побудувати відрізок $x = \frac{bc}{a}$.

Розв'язання. Оскільки $x = \frac{bc}{a}$, то $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$ і $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Для побудови відрізка x можна використовувати й узагальнену теорему Фале́са, й один з її наслідків. Використаємо, наприклад, наслідок 1.

1) Будуємо нерозгорнутий кут з вершиною O (мал. 23.2). Відкладаємо на одній з його сторін відрізок $OB = b$, а на другій – відрізки $OA = a$ і $AC = c$.

2) Проведемо пряму AB. Через точку C паралельно AB проведемо пряму, яка перетне сторону OB кута в точці D. Тому $CD \parallel AB$.



Мал. 23.2

3) За наслідком 1 з узагальненої теореми Фале́са, маємо: $\frac{a}{b} = \frac{c}{BD}$, звідки $BD = \frac{bc}{a}$. Отже, $BD = x$.

Побудований відрізок x називають *четвертим пропорційним відрізків a, b і c*, оскільки справджується рівність $a : b = c : x$.

А ще раніше...

Відношення й пропорції в геометрії використовувалися з давніх-давен. Про це свідчать давньоєгипетські храми, деталі гробниці Менеса в Накаді, піраміди в Гізі (III ст. до н. е.), перські палаци, давньоіндійські пам'ятки тощо.


Гробниця Менеса


Піраміди в Гізі

У сьомій книзі «Начал» Евклід виклав *арифметичну* теорію вчення про відношення, яку застосував тільки до співрозмірних величин і цілих чисел. Теорія виникла на основі дій з дробами та застосовувалася для дослідження властивостей цілих чисел.

У п'ятій книзі Евклід виклав загальну теорію відношень і пропорцій, яку приблизно за 100 років до Евкліда розробив давньогрецький математик, механік і астроном Евдокс (408 р. до н. е. – 355 р. до н. е.). Ця теорія є основою вчення про подібність фігур, яку Евклід виклав у шостій книзі «Начал», де також було розв'язано задачу про ділення відрізка в заданому відношенні.

Пропорційність відрізків прямих, які перетнуто кількома паралельними прямими, була відома ще вавилонським ученим, хоча багато істориків математики вважають, що це відкриття належить Фалéсу Мілетському.

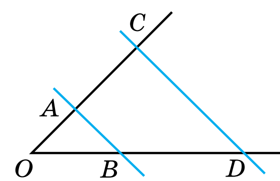
Що називають відношенням відрізків? Сформулюйте узагальнену теорему Фалéса. За якої умови відрізок x є четвертим пропорційним відрізків a, b і c?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

23.1. (*Усно.*) На малюнку 23.3 $AB \parallel CD$. Які з пропорцій справджуються:

1) $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$; 2) $\frac{AC}{OA} = \frac{OB}{OD}$;

3) $\frac{AC}{OA} = \frac{OB}{BD}$; 4) $\frac{OB}{BD} = \frac{OA}{AC}$?

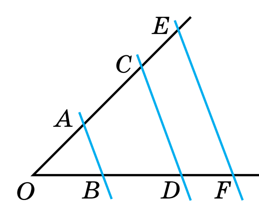


Мал. 23.3

23.2. На малюнку 23.3 $AB \parallel CD$, $OA = 3$, $AC = 5$, $BD = 10$. Знайдіть OB.

23.3. На малюнку 23.3 $AB \parallel CD$, $OB = 2$, $BD = 3$, $OA = 1$. Знайдіть AC.

23.4. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута O (мал. 23.4). $AC = 6$ см, $CE = 2$ см, $BD = 5$ см. Знайдіть BF.



Мал. 23.4

23.5. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута O (мал. 23.4), $BD = 4$ см, $DF = 2$ см, $CE = 3$ см. Знайдіть AE.

23.6. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 23.4). $OA = 3$ см, $AC = 4$ см, $BD = 5$ см, $DF = 2$ см. Знайдіть CE і OB.

23.7. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 23.4). $OB = 5$, $BD = 7$, $AC = 4$, $CE = 3$. Знайдіть OA і DF.

23.8. Дано відрізки a, b, c. Побудуйте відрізок $x = \frac{ab}{c}$.

23.9. Дано відрізки l, n, m. Побудуйте відрізок $x = \frac{mn}{l}$.

23.10. На малюнку 23.3 $AB \parallel CD$, $OA = 4$, $AC = 6$. Знайдіть відрізки OB і BD, якщо $OD = 15$.

23.11. На малюнку 23.3 $AB \parallel CD$, $OB = 5$, $BD = 7$. Знайдіть відрізки OA і AC, якщо $AC - OA = 1$.

23.12. На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MB = 1 : 3$. У якому відношенні відрізок CM ділить медіану AP трикутника ABC?

23.13. AD – медіана трикутника ABC, точка M лежить на стороні AC, відрізок BM ділить AD у відношенні $5 : 3$, починаючи від точки A. Знайдіть $AM : MC$.

Вправи для повторення

23.14. Діагональ чотирикутника дорівнює 5 см, а периметри трикутників, на які вона розбиває чотирикутник, дорівнюють 12 см і 14 см. Знайдіть периметр чотирикутника.

23.15. Тупий кут прямокутної трапеції дорівнює 120°, а менша діагональ трапеції дорівнює більшій бічній стороні. Знайдіть відношення середньої лінії трапеції до більшої бічної сторони.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

23.16. $\triangle ABC = \triangle MKL$. Заповніть пропуски:
1) $\angle A = \ldots$; 2) $\angle B = \ldots$; 3) $\angle C = \ldots$;
4) $MK = \ldots$; 5) $ML = \ldots$; 6) $KL = \ldots$.

23.17. Сторони одного трикутника вдвічі більші за відповідні сторони другого трикутника. У скільки разів периметр першого трикутника більший за периметр другого?

23.18. Дано: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$. Відомо, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Чи можна стверджувати, що
1) $\angle C = \angle C_1$; 2) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$?

Життєва математика

23.19. 1) Щоб залити один квадратний метр ковзанки, потрібно 40 л води. Скільки води знадобиться, щоб залити ковзанку прямокутної форми 30 м завдовжки і 20 м завширшки?
2) Дізнайтеся, скільки коштує 1 м^3 води у вашій місцевості. Обчисліть, яку суму потрібно буде сплатити муніципальній владі за спожиту воду.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

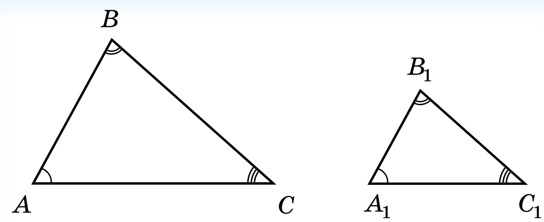
23.20. Дано квадрат $ABCD$. Скільки існує точок K у площині цього квадрата таких, що кожний із трикутників ABK, BCK, CDK і ADK — рівнобедрений?

§ 24. Подібні трикутники

У повсякденному житті трапляються предмети однакової форми, але різних розмірів, наприклад футбольний м'яч і металева кулька, картина та її фотознімок, літак і його модель, географічні карти різного масштабу. У геометрії фігури однакової форми прийнято називати ***подібними***. Так, подібними між собою є всі квадрати, усі круги, усі відрізки.

Два *трикутники* називають *подібними*, якщо їхні кути відповідно рівні й сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам іншого.

$$\angle A = \angle A_1,\quad \angle B = \angle B_1,\quad \angle C = \angle C_1$$
$$\text{і}\quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні між собою, записують: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Нехай значення кожного з отриманих відношень відповідних сторін дорівнює k. Число k називають ***коефіцієнтом подібності*** трикутника ABC до трикутника $A_1B_1C_1$, або коефіцієнтом подібності трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

Зауважимо, якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то із співвідношення $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ слідує співвідношення $AB : BC : AC = A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1$.

Задача 1. Довести, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін цих трикутників.

Доведення. Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$.

1) Тоді $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$.

2) Маємо: $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} =$

$= \frac{k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k = \frac{AB}{A_1B_1}$. ■

Задача 2. Сторони трикутника ABC відносяться як $4 : 7 : 9$, а більша сторона подібного йому трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 27 см. Знайти інші сторони другого трикутника.

Розв'язання. 1) Оскільки за умовою $AB : BC : AC = 4 : 7 : 9$ і $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то $A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1 = 4 : 7 : 9$.

2) Позначимо: $A_1B_1 = 4x$, $B_1C_1 = 7x$, $A_1C_1 = 9x$. За умовою $9x = 27$, тоді $x = 3$ (см).

3) Маємо: $A_1B_1 = 4 \cdot 3 = 12$ (см), $B_1C_1 = 7 \cdot 3 = 21$ (см).

Відповідь: 12 см, 21 см.

Зауважимо, що подібні трикутники легко створювати за допомогою сучасних комп'ютерних програм, зокрема графічних редакторів. Для цього достатньо побудований трикутник розтягнути або стиснути, «потягнувши» за один з кутових маркерів.

А ще раніше...

Однакові за формою, але різні за розміром фігури використовувалися ще у вавилонських та єгипетських пам'ятках архітектури. Так, наприклад, у гробниці батька фараона Рамзеса II є стіна, що вкрита сіткою квадратиків, за допомогою яких на цю стіну переносили у збільшеному вигляді малюнки маленьких розмірів.

Учення про подібні фігури, яке ґрунтувалося на теорії відношень і пропорцій, було створено в Давній Греції у V–IV ст. до н. е. завдяки працям Гіппократа Хіоського, Архита Тарентського, Евдокса та інших. Узагальнив ці відомості Евклід у шостій книзі «Начал». Починається теорія подібності з такого означення:

«Подібні прямолінійні фігури – це ті, які мають відповідно рівні кути й пропорційні сторони».

? Наведіть з довкілля приклади предметів однакової форми. ○ Які трикутники називають подібними? ○ Що таке коефіцієнт подібності?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

24.1. (*Усно.*) Дано: $\triangle ABC \sim \triangle MNK$. Заповніть пропуски:
1) $\angle A = \angle ...$;
2) $\angle B = \angle ...$;
3) $\angle C = \angle ...$.

24.2. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle KLM$, $\dfrac{AB}{KL} = 3$. Заповніть пропуски:

1) $\dfrac{AC}{KM} = ...$; 2) $\dfrac{BC}{LM} = ...$.

24.3. Дано: $\triangle MLF \sim \triangle PNK$. Складіть усі можливі пропорції для сторін трикутників.

2

24.4. Дано: $\triangle MNL \sim \triangle ABC$, $\angle M = 50°$, $\angle B = 70°$. Знайдіть невідомі кути обох трикутників.

24.5. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\angle A = 40°$, $\angle F = 90°$. Знайдіть невідомі кути обох трикутників.

24.6. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 12$ см, $A_1B_1 = 3$ см. Знайдіть:

1) $\dfrac{A_1C_1}{AC}$; 2) $\dfrac{B_1C_1}{BC}$.

24.7. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 10$, $BC = 8$, $CA = 6$, $A_1B_1 = 5$. Знайдіть: B_1C_1, C_1A_1.

24.8. Дано: $\triangle KLM \sim \triangle K_1L_1M_1$, $KL = 12$, $KM = 9$, $LM = 21$, $K_1L_1 = 4$. Знайдіть: K_1M_1, L_1M_1.

3

24.9. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, відтак прочитаєте прізвище видатної української фахівчині в царині математики, котра стала другою жінкою у світі, яка отримала найпрестижнішу премію світу для математиків — медаль Філдса.

У трикутнику ABC $AB : BC : CA = 7 : 8 : 9$. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо його:	A_1B_1	B_1C_1	C_1A_1
менша сторона дорівнює 21 см	В	Я	О
більша сторона на 5 см більша за середню	З	Ь	А
периметр дорівнює 48 см	В	С	К

14 см	24 см	35 см	27 см	21 см	16 см	40 см	18 см	45 см

24.10. Сторони трикутника відносяться як $5 : 6 : 9$. Знайдіть невідомі сторони подібного йому трикутника у випадках, якщо його:
1) більша сторона дорівнює 18 см;
2) менша сторона на 3 см менша від середньої;
3) периметр дорівнює 100 см.

24.11. Доведіть, що два рівносторонніх трикутники між собою подібні.

24.12. Периметри подібних трикутників відносяться як $2 : 3$, а сума їхніх найбільших сторін дорівнює 20 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як $2 : 3 : 4$.

24.13. Периметри подібних трикутників відносяться як $4 : 3$, а сума їхніх найменших сторін дорівнює 21 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як $3 : 4 : 5$.

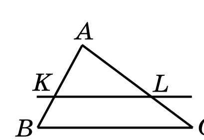
Вправи для повторення

24.14. У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Знайдіть усі пари рівних трикутників, що при цьому утворилися.

24.15. Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, належить середній лінії трапеції.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

24.16. На малюнку пряма KL паралельна стороні BC різностороннього трикутника ABC. Знайдіть усі рівні між собою кути на цьому малюнку.



Життєва математика

24.17. Скільки потрібно робітників для перенесення соснової балки розміром 4,5 м × 20 см × 55 см? Кожен робітник може підняти в середньому 70 кг. Щільність сосни – 520 кг/м^3.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

24.18. Точки K і L належать відповідно сторонам AB і AC трикутника ABC. Чи може точка перетину відрізків BL і KC ділити кожний з них навпіл?

§ 25. Ознаки подібності трикутників

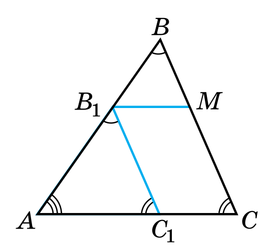
1. Лема про властивість прямої, яка паралельна стороні трикутника

Подібність трикутників аналогічно до рівності трикутників можна встановлювати за допомогою ознак.

Перш ніж їх розглянути, сформулюємо й доведемо *лему*, тобто допоміжне твердження, яке є правильним і використовується для доведення однієї або кількох теорем.

Лема. **Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.**

Доведення. Нехай пряма B_1C_1 перетинає сторони AB і AC трикутника ABC відповідно в точках B_1 і C_1 (мал. 25.1). Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$.



Мал. 25.1

1) Кут A є спільним для обох трикутників, $\angle B = \angle B_1$ (як відповідні кути при паралельних прямих BC і B_1C_1 та січній AB), $\angle C = \angle C_1$ (аналогічно для січної AC). Отже, три кути трикутника ABC дорівнюють відповідним кутам трикутника AB_1C_1.

2) За наслідком 2 з узагальненої теореми Фале́са маємо: $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$.

3) Доведемо, що $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AB_1}$. Проведемо через точку B_1 пряму, паралельну AC, що перетинає BC в точці M. Оскільки B_1MCC_1 – паралелограм, то $B_1C_1 = MC$. За узагальненою теоремою Фале́са: $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BB_1}{AB_1}$. Додамо число 1 до обох частин цієї рівності. Матимемо:

$$\frac{BM}{MC} + 1 = \frac{BB_1}{AB_1} + 1; \quad \frac{BM + MC}{MC} = \frac{BB_1 + AB_1}{AB_1}; \quad \frac{BC}{MC} = \frac{AB}{AB_1}.$$

Але $MC = B_1C_1$. Отже, $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AB_1}$.

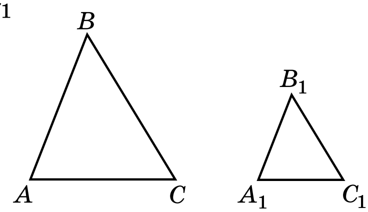
4) Остаточно маємо: $\angle A = \angle A$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $\dfrac{AB}{AB_1} =$

$= \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$. Отже, $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$. ■

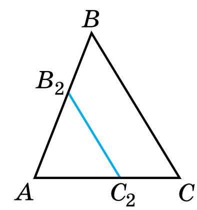
2. Ознака подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними

Т Теорема 1 (ознака подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними). **Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого й кути, утворені цими сторонами, між собою рівні, то трикутники подібні.**

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$ і $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ (мал. 25.2). Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 25.2



Мал. 25.3

1) Відкладемо на стороні AB трикутника ABC відрізок $AB_2 = A_1B_1$ і проведемо через B_2 пряму, паралельну BC (мал. 25.3). Тоді $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$ (за лемою).

2) За наслідком 2 з узагальненої теореми Фале́са $\dfrac{AB}{AB_2} = \dfrac{AC}{AC_2}$.

Але $AB_2 = A_1B_1$ (за побудовою). Тому $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{AC_2}$. За умовою $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, отже, $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AC}{AC_2}$ і звідси $A_1C_1 = AC_2$.

3) Оскільки $\angle A = \angle A_1$, $AB_2 = A_1B_1$ і $AC_2 = A_1C_1$, то $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за двома сторонами й кутом між ними).

4) Але $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$, отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■

Н Наслідок 1. **Прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного з них пропорційні катетам другого.**

Н Наслідок 2. **Якщо кут при вершині одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при вершині другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.**

3. Ознака подібності трикутників за двома кутами

Теорема 2 (ознака подібності трикутників за двома кутами). **Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то ці трикутники подібні.**

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (мал. 25.2).

1) Виконаємо побудови, аналогічні до тих, що й у доведенні теореми 1 (мал. 25.3). Маємо: $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$.

2) $\angle AB_2C_2 = \angle B$, але $\angle B = \angle B_1$. Тому $\angle AB_2C_2 = \angle B_1$.

3) Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за стороною і двома прилеглими кутами).

4) Отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■

Наслідок 1. **Рівносторонні трикутники подібні.**

Наслідок 2. **Якщо кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.**

Наслідок 3. **Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то ці трикутники подібні.**

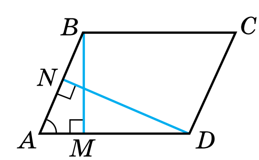
Приклад 1. Сторони паралелограма дорівнюють 15 см і 10 см, а висота, проведена до більшої сторони, – 8 см. Знайти висоту, проведену до меншої сторони.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – паралелограм (мал. 25.4). $AD = 15$ см, $AB = 10$ см, $BM = 8$ см – висота паралелограма.

1) Проведемо DN – другу висоту паралелограма.

2) $\triangle ABM \sim \triangle ADN$ (як прямокутні зі спільним гострим кутом). Тоді $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{DN}$, тобто $\frac{10}{15} = \frac{8}{DN}$, звідки $10 \cdot DN = 8 \cdot 15$, отже, $DN = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.



Мал. 25.4

4. Ознака подібності трикутників за трьома сторонами

Теорема 3 (ознака подібності трикутників за трьома сторонами). **Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то ці трикутники подібні.**

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (мал. 25.2).

1) Виконаємо побудови, аналогічні до тих, що й у доведенні теореми 1 (мал. 25.3). Маємо: $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$.

2) Тоді $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$, але $AB_2 = A_1B_1$, тому

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$. Враховуючи, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, маємо: $AC_2 = A_1C_1$, $B_2C_2 = B_1C_1$.

3) Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за трьома сторонами).

4) Отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■

Приклад 2. Сторони одного трикутника дорівнюють 9 см, 15 см і 18 см, а сторони другого трикутника відносяться як 3 : 5 : 6. Чи подібні ці трикутники?

Розв'язання. Позначимо сторони другого трикутника через $3x$, $5x$ і $6x$. Оскільки $\frac{9}{3x} = \frac{15}{5x} = \frac{18}{6x} = \frac{3}{x}$, то трикутники подібні (за трьома сторонами).

Відповідь: так.

Сформулюйте й доведіть ознаки подібності трикутників і наслідки з них.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

25.1. (*Усно.*) За яких умов два трикутники подібні:
1) у трикутників є спільний кут;
2) два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам іншого;
3) дві сторони одного трикутника дорівнюють двом сторонам іншого?

25.2. За яких умов $\triangle ABC \sim \triangle DEF$:
1) $\angle A = \angle D$;
2) $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle D = 50°$, $\angle E = 60°$;
3) $AB = 3DE$, $BC = 3EF$;
4) $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$, $\angle D = 40°$, $\angle E = 90°$?

25.3. За яких умов $\triangle ABC \sim \triangle MNK$:
1) $AB = MN = 15$ см, $BC = NK = 12$ см;
2) $\angle A = \angle M$, $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}$;
3) $\angle A = 100°$, $\angle B = 30°$, $\angle M = 70°$, $\angle N = 20°$;
4) $\angle C = \angle K$, $CB = 5$, $CA = 2$, $KN = 10$, $KM = 4$?

25.4. Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$, $A_1B_1 = 4$, $B_1C_1 = 6$, $A_1C_1 = 8$;
2) $\angle A = 20°$, $\angle A_1 = 20°$, $AB = 3$, $AC = 5$, $A_1B_1 = 9$, $A_1C_1 = 15$;
3) $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$, $\angle B_1 = 40°$, $\angle C_1 = 110°$.

25.5. Доведіть, що $\triangle MNK \backsim \triangle M_1N_1K_1$, якщо:
1) $\angle M = \angle M_1$, $MN = 5$, $MK = 6$, $M_1N_1 = 10$, $M_1K_1 = 12$;
2) $\angle M = 90°$, $\angle N = 50°$, $\angle K_1 = 40°$, $\angle N_1 = 50°$;
3) $MN = 3$, $NK = 4$, $MK = 5$, $M_1N_1 = 6$, $N_1K_1 = 8$, $M_1K_1 = 10$.

25.6. Прямі AB і CD перетинаються в точці O, $AC \parallel BD$. Доведіть, що $\triangle AOC \backsim \triangle BOD$.

25.7. Прямі MN і KL перетинаються в точці O, $\angle MLO = \angle NKO$. Доведіть, що $\triangle MOL \backsim \triangle NOK$.

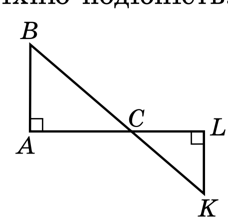
25.8. На сторонах AB і AC трикутника ABC відповідно позначено точки P і L так, що $AP = \frac{1}{3}AB$, $AL = \frac{1}{3}AC$. Доведіть, що $\triangle APL \backsim \triangle ABC$.

25.9. На сторонах KL і KN трикутника KLN відповідно позначено точки A і B так, що $KA = \frac{2}{3}KL$, $KB = \frac{2}{3}KN$. Доведіть, що $\triangle KAB \backsim \triangle KLN$.

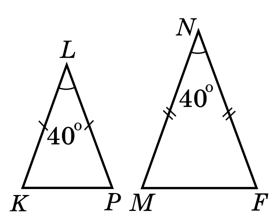
25.10. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB : BC : CA = 3 : 4 : 6$, $A_1B_1 = 6$, $B_1C_1 = 8$, $C_1A_1 = 11$;
2) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle A_1 : \angle B_1 : \angle C_1 = 1 : 2 : 3$?

25.11. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB : BC : CA = 4 : 3 : 7$, $A_1B_1 = 8$, $B_1C_1 = 6$, $C_1A_1 = 14$;
2) $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$, $\angle A_1 = 20°$, $\angle B_1 = 50$?

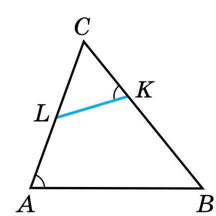
25.12. На малюнках 25.5–25.7 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.



Мал. 25.5

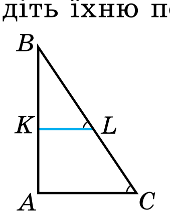


Мал. 25.6

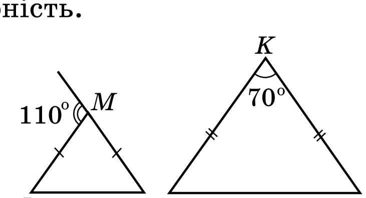


Мал. 25.7

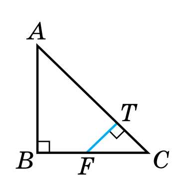
25.13. На малюнках 25.8–25.10 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.



Мал. 25.8



Мал. 25.9



Мал. 25.10

25.14. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Доведіть, що $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

25.15. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, у якої $AB \parallel CD$, $AB = 10$ см, $CD = 5$ см, $OD = 4$ см. Знайдіть OB.

25.16. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) поділяє діагональ BD на відрізки $DO = 3$ см, $OB = 9$ см. Знайдіть AB, якщо $DC = 2$ см.

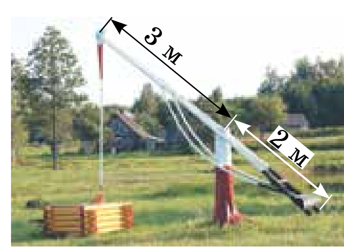
25.17. У трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) на катеті AC і гіпотенузі AB позначено точки M і N так, що $AM = \frac{3}{4}AC$, $AN = \frac{3}{4}AB$. Доведіть, що $\triangle AMN$ – прямокутний.

25.18. На катеті BC та гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точки P і F так, що $BP = \frac{1}{3}BC$, $BF = \frac{1}{3}BA$. Доведіть, що $PF = \frac{1}{3}CA$.

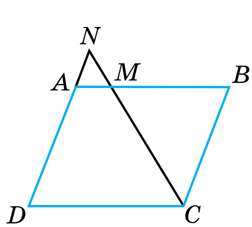
25.19. Кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі іншого рівнобедреного трикутника. Периметр першого трикутника – 36 см. Знайдіть його сторони, якщо у другого трикутника бічна сторона відноситься до основи як 5 : 2.

25.20. Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при вершині одного з них дорівнює куту при вершині іншого. Периметр першого трикутника – 30 см. Знайдіть його сторони, якщо у другого трикутника основа відноситься до бічної сторони як 1 : 2.

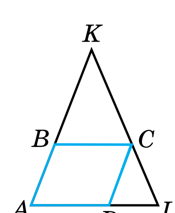
25.21. На малюнку зображено колодязь із «журавлем». Коротке плече має довжину 2 м, а довге – 3 м. На скільки метрів опуститься кінець довгого плеча, коли кінець короткого підніметься на 1 м?



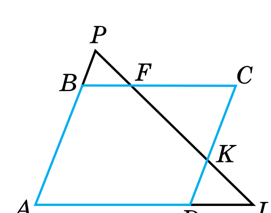
25.22. На малюнках 25.11–25.13 $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть на цих малюнках усі пари подібних трикутників і доведіть їхню подібність.



Мал. 25.11

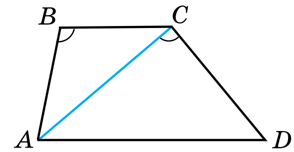


Мал. 25.12



Мал. 25.13

25.23. На малюнку 25.14 $ABCD$ – трапеція, $\angle ABC = \angle ACD$. Знайдіть подібні трикутники на цьому малюнку й доведіть, що $CA^2 = BC \cdot AD$.



Мал. 25.14

25.24. Кути одного трикутника відносяться як $2 : 3 : 4$, а один з кутів другого трикутника на $20°$ більший за другий і на $20°$ менший від третього. Чи подібні ці трикутники?

25.25. Кути першого трикутника відносяться як $1 : 3 : 2$, а другий трикутник є прямокутним, у якого один з гострих кутів дорівнює половині другого. Чи подібні ці трикутники?

25.26. У паралелограмі $ABCD$ точки E, F, M і N належать відповідно сторонам AB, BC, CD і DA, $\dfrac{EB}{BF} = \dfrac{DM}{DN}$. Доведіть, що $\angle BFE = \angle DNM$.

25.27. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{DO}{OC}$. Доведіть, що $\angle BCO = \angle ADO$.

25.28. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $BO = 4$ см, $DO = 7$ см. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 22 см.

25.29. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $AD = 11$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть відрізки BO і OD, якщо їхня різниця дорівнює 3 см.

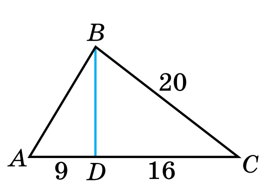
25.30. У трикутнику ABC $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $AC = 18$ см. На стороні AC відкладено відрізок $CK = 6$ см, на стороні BC – відрізок $CP = 4$ см.
1) Чи подібні трикутники ABC і KPC?
2) Чи паралельні прямі AB і KP?
3) Знайдіть довжину відрізка PK.

25.31. Пряма MN паралельна стороні AB трикутника ABC, $M \in AC$, $N \in BC$. $AB = 10$ см, $MN = 4$ см, $MA = 2$ см. Знайдіть довжину сторони AC.

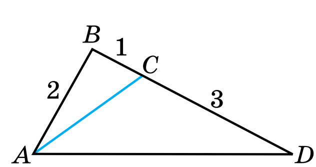
25.32. Пряма KL паралельна стороні BC трикутника ABC, $K \in AB$, $L \in AC$. $KB = 6$ см, $BC = 12$ см, $KL = 9$ см. Знайдіть довжину сторони AB.

25.33. На малюнку 25.15 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.

25.34. На малюнку 25.16 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.

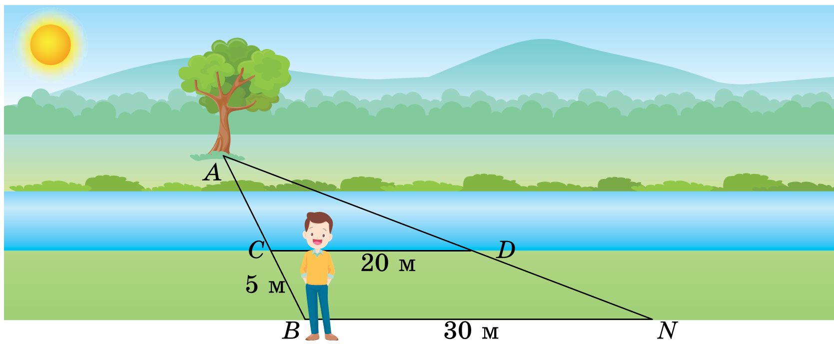


Мал. 25.15



Мал. 25.16

25.35. Знайдіть відстань від подорожнього B (мал. 25.17), який стоїть на одному березі річки, до дерева A на іншому березі, якщо $BN = 30$ м, $CD = 20$ м, $BC = 5$ м. На малюнку $BN \parallel CD$.



Мал. 25.17

4

25.36. Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при вершині одного з них дорівнює куту при вершині іншого. Периметр першого трикутника дорівнює 90 см. Знайдіть його сторони, якщо сторони другого трикутника відносяться як 4 : 7. Скільки випадків слід розглянути?

25.37. Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при основі одного трикутника дорівнює куту при основі іншого. Сторони одного з трикутників відносяться як 5 : 8, а периметр іншого дорівнює 126 см. Знайдіть сторони другого трикутника. Скільки випадків слід розглянути?

25.38. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, CD і C_1D_1 – бісектриси даних трикутників. Доведіть, що $\triangle ADC \sim \triangle A_1D_1C_1$.

25.39. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, AM і A_1M_1 – медіани даних трикутників. Доведіть, що $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C_1$.

25.40. На стороні BC трикутника ABC позначено точку F так, що $\angle BAF = \angle C$, $BF = 4$ см, $AB = 6$ см. Знайдіть BC.

25.41. На стороні AC трикутника ABC позначено точку K так, що $\angle ABK = \angle C$. Знайдіть KC, якщо $AB = 2$ см, $AK = 1$ см.

25.42. У прямокутний трикутник ABC з катетами a см і b см і прямим кутом A вписано квадрат $AKLM$, $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in AC$. Знайдіть сторону квадрата.

25.43. Периметр паралелограма дорівнює 24 см, а його висоти відносяться як 5 : 3. Знайдіть сторони паралелограма.

25.44. Периметр паралелограма дорівнює 30 см, а його висоти – 4 см і 8 см. Знайдіть сторони паралелограма.

25.45. У трикутник ABC вписано ромб $AKFP$ так, що кут A в них спільний, $P \in AB$, $F \in BC$, $K \in AC$. Знайдіть сторону ромба, якщо $CK = 4$ см, $PB = 9$ см.

25.46. У рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а бічна сторона – 10 см, вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику кола до бічних сторін.

Вправи для повторення

25.47. Знайдіть кути трикутника, якщо три його середні лінії рівні між собою.

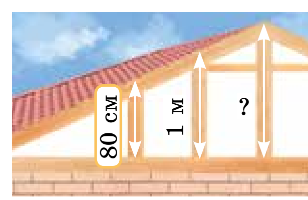
25.48. У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) E – середина AD, F – середина BC, K – середина AB. Доведіть, що $KE = KF$.

25.49. Кожна з бічних сторін рівнобедреного трикутника дорівнює a см. З точки, узятої на основі трикутника, проведено прямі, паралельні бічним сторонам. Обчисліть периметр паралелограма, який утворився.

25.50. Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, який не є квадратом, перетинаючись, утворюють квадрат.

Життєва математика

25.51. Похила балка підтримується трьома стовпами, установленими вертикально на однаковій відстані один від одного (мал. 25.18). Довжини двох менших стовпів – 80 см і 1 м. Знайдіть довжину більшого стовпа.



Мал. 25.18

Цікаві задачі – поміркуй одначе

25.52. Чи можуть бісектриса й медіана, що виходять з вершини прямого кута трикутника, утворювати рівнобедрений трикутник? Якщо так, то знайдіть менший з гострих кутів прямокутного трикутника.

§ 26. Середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику

1. Лема про висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута

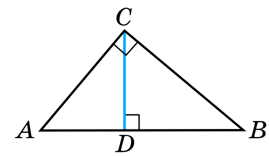
Т Лема. **Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, розбиває трикутник на два подібних між собою прямокутних трикутники, кожний з яких подібний даному трикутнику.**

Доведення. Нехай ABC – прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), CD – висота трикутника (мал. 26.1). Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ і $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

1) У прямокутних трикутників ABC і ACD кут A – спільний. Тому $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (за гострим кутом).

2) Аналогічно $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ ($\angle B$ – спільний, $\angle BCA = \angle BDC = 90°$). Звідки $\angle A = \angle BCD$.

3) У трикутників ACD ($\angle D = 90°$) і CBD ($\angle D = 90°$) $\angle A = \angle BCD$. Тому $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (за гострим кутом). ■



Мал. 26.1

Відрізок AD називають *проєкцією* катета AC на гіпотенузу AB, а відрізок BD – *проєкцією* катета BC на гіпотенузу AB.

2. Теорема про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику

Відрізок k називають *середнім пропорційним* (або *середнім геометричним*) відрізків m і n, якщо $k^2 = m \cdot n$.

Т Теорема (про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику). **1) Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним проєкцій катетів на гіпотенузу.**
2) Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи та проєкції цього катета на гіпотенузу.

Доведення. Розглянемо малюнок 26.1.

1) $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (за лемою). Тому $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$, або $CD^2 = AD \cdot BD$.

2) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (за лемою). Тому $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$, або $AC^2 = AB \cdot AD$.

3) $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ (за лемою). Тому $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BD}{BC}$, або $BC^2 = AB \cdot BD$. ■

Приклад 1. CD – висота прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C. Доведіть, що $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$.

Доведення. Розглянемо малюнок 26.1.

1) Оскільки $AC^2 = AB \cdot AD$, то $AB = \dfrac{AC^2}{AD}$, а оскільки $BC^2 = AB \cdot BD$, то $AB = \dfrac{BC^2}{BD}$.

2) Тому $\dfrac{AC^2}{AD} = \dfrac{BC^2}{BD}$, звідки $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$. ■

Приклад 2. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 9 см і 16 см. Знайдіть периметр трикутника.

Розв'язання. Розглянемо малюнок 26.1, де $AD = 9$ см, $DB = 16$ см.
1) $AB = AD + DB = 9 + 16 = 25$ (см).
2) $AC^2 = AB \cdot AD$, тобто $AC^2 = 25 \cdot 9 = 225$. Оскільки $15^2 = 225$, то $AC = 15$ (см).
3) $BC^2 = AB \cdot BD$, $BC^2 = 25 \cdot 16 = 400$. Оскільки $20^2 = 400$, то $BC = 20$ (см).
4) $P_{ABC} = 25 + 15 + 20 = 60$ (см).
Відповідь: 60 см.

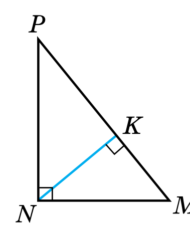
Під час розв'язування задач цього параграфа варто використовувати таблицю квадратів натуральних чисел.

Сформулюйте й доведіть лему із цього параграфа. ○ Який відрізок називають середнім пропорційним двох відрізків? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

26.1. (*Усно.*) На малюнку 26.2 NK – висота прямокутного трикутника PNM ($\angle N = 90°$). Назвіть:
1) проєкцію катета NM на гіпотенузу;
2) проєкцію катета NP на гіпотенузу.



Мал. 26.2

26.2. (*Усно.*) NK – висота прямокутного трикутника PNM (мал. 26.2). Які з рівностей правильні:
1) $NK = PK \cdot KM$;   2) $NM^2 = KM \cdot PM$;
3) $PN = PK \cdot KM$;   4) $PK \cdot KM = NK^2$?

26.3. NK – висота прямокутного трикутника PNM з прямим кутом N (мал. 26.2). Заповніть пропуски:
1) $NK^2 = ...$;   2) $NM^2 = ...$;
3) $PK \cdot PM = ...$;   4) $PK \cdot KM = ...$.

26.4. Знайдіть середнє пропорційне відрізків завдовжки:
1) 2 см і 8 см;   2) 27 дм і 3 дм.

26.5. Знайдіть середнє пропорційне відрізків завдовжки:
1) 16 дм і 1 дм;   2) 4 см і 9 см.

2

26.6. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо проєкції катетів на гіпотенузу дорівнюють 9 см і 25 см.

26.7. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки 2 см і 8 см.

26.8. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проєкція на гіпотенузу дорівнює 4 см, а гіпотенуза – 16 см.

26.9. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 25 см, а проєкція катета на гіпотенузу – 9 см.

26.10. Катет прямокутного трикутника дорівнює 18 см, а його проєкція на гіпотенузу – 9 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

26.11. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а гіпотенуза – 9 см. Знайдіть проєкцію цього катета на гіпотенузу.

26.12. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 8 см і 4,5 см. Знайдіть катети трикутника.

26.13. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 50 см, а проєкція одного з катетів на гіпотенузу – 18 см. Знайдіть катети трикутника.

3

26.14. Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки 1 см і 8 см, починаючи від вершини кута при основі. Знайдіть периметр трикутника.

26.15. Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки 6 см і 2 см, починаючи від вершини, протилежної основі. Знайдіть периметр трикутника.

26.16. Висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, ділить гіпотенузу на відрізки, що відносяться як 9 : 16. Знайдіть катети трикутника, якщо його висота дорівнює 24 см.

26.17. Висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких дорівнює 16 см, а другий відноситься до висоти як 3 : 4. Знайдіть висоту трикутника.

26.18. Коло, вписане в ромб, точкою дотику ділить сторону ромба на відрізки 1 см і 4 см. Знайдіть радіус кола.

4

26.19. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої 10 см і 8 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

26.20. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої 13 см і 5 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

26.21. Коло, вписане у трапецію, точкою дотику ділить бічну сторону на відрізки 4 см і 9 см завдовжки. Знайдіть висоту трапеції.

26.22. Коло, вписане у трапецію, точкою дотику ділить одну з бічних сторін на відрізки 2 см і 8 см завдовжки, а іншу – на відрізки, один з яких дорівнює 4 см. Знайдіть периметр трапеції.

Вправи для повторення

26.23. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника утворює зі стороною трикутника кут 18°. Знайдіть кути трикутника.

26.24. Про трикутники ABC і KLM відомо, що $\angle A + \angle B = \angle K + \angle L$, $\angle B + \angle C = \angle L + \angle M$. Чи подібні ці трикутники?

26.25. У рівнобічній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Доведіть, що тупий кут трапеції дорівнює тупому куту між діагоналями.

Життєва математика

26.26. Студенти агроекологічного коледжу на експериментальній ділянці 40 м завдовжки і 20 м завширшки висаджують картоплю раннього сорту. Обчисліть, скільки знадобиться картоплі для такої ділянки, якщо в середньому на 1 а потрібно 40 кг картоплі.

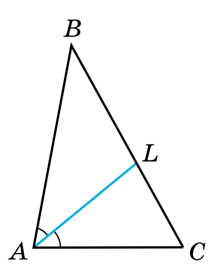
Цікаві задачі – поміркуй одначе

26.27. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1976 р.*) Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці O, а на відрізках OB і OC позначено точки B_1 і C_1, для яких $\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90°$. Доведіть, що $AB_1 = AC_1$.

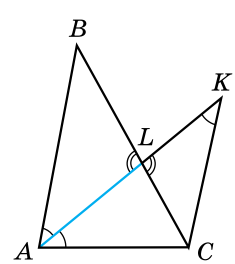
§ 27. Властивість бісектриси трикутника

Т Теорема (властивість бісектриси трикутника). **Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до неї сторонам.**

Доведення. Нехай AL – бісектриса трикутника ABC (мал. 27.1). Доведемо, що $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BL}{LC}$.



Мал. 27.1



Мал. 27.2

1) Проведемо через точку C пряму, паралельну AB, та продовжимо бісектрису AL до перетину із цією прямою в точці K (мал. 27.2). Тоді $\angle LKC = \angle BAL$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і CK та січній AK).

2) Трикутник AKC – рівнобедрений (оскільки $\angle BAL = \angle LAC$ і $\angle BAL = \angle LKC$, а тому $\angle KAC = \angle AKC$), а отже, $AC = KC$.

3) $\angle BLA = \angle CLK$ (як вертикальні). Тому $\triangle ABL \sim \triangle KCL$ (за двома кутами). Отже, $\frac{AB}{KC} = \frac{BL}{CL}$.

Але $KC = AC$, тому $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$. ■

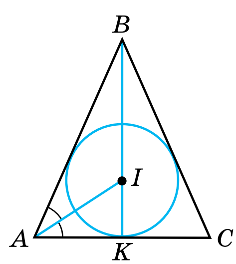
З пропорції $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$ можна отримати й таку: $\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{LC}$.

Приклад 1. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $AC = 4$ см, $BC = 9$ см, AL – бісектриса трикутника. Знайти BL і LC.

Розв'язання. Розглянемо $\triangle ABC$ на малюнку 27.1.
1) Нехай $BL = x$ (см), тоді $LC = BC - BL = 9 - x$ (см).
2) Оскільки $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$, маємо рівняння: $\frac{8}{4} = \frac{x}{9-x}$, звідки $x = 6$ (см).
3) Отже, $BL = 6$ см, $LC = 9 - 6 = 3$ (см).
Відповідь: 6 см, 3 см.

Приклад 2. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 24 см, а бічна сторона відноситься до основи як 3 : 2. Знайти радіус кола, вписаного у трикутник.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC $AB = BC$, BK – медіана (мал. 27.3).
1) Тоді BK є також висотою і бісектрисою. Оскільки точка I – центр вписаного кола – є точкою перетину бісектрис трикутника, то $I \in BK$, IK – радіус кола.
2) Оскільки $AB : AC = 3 : 2$, позначимо $AB = 3x$, $AC = 2x$. K – середина AC, тому $AK = \frac{AC}{2} = \frac{2x}{2} = x$.
3) Оскільки AI – бісектриса трикутника ABK, то $\frac{AB}{AK} = \frac{BI}{IK}$.



Мал. 27.3

4) Нехай $IK = r$. Тоді $BI = 24 - r$. Маємо: $\frac{3x}{x} = \frac{24-r}{r}$, звідки $r = 6$ (см).
Відповідь: 6 см.

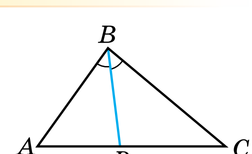
Сформулюйте й доведіть теорему про властивість бісектриси трикутника.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

27.1. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 27.4). Які з рівностей є пропорціями:

1) $\frac{AB}{BC} = \frac{CP}{AP}$; 2) $\frac{BC}{AB} = \frac{CP}{AP}$;



Мал. 27.4

3) $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{BA}{BC}$; 4) $\dfrac{AB}{AP} = \dfrac{BC}{PC}$?

27.2. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 27.4). $AP : PC = 1 : 2$, $AB = 3$ см. Знайдіть BC.

27.3. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 27.4). $AB : BC = 1 : 2$, $AP = 5$ см. Знайдіть PC.

2

27.4. BD – бісектриса трикутника ABC, $AD = 3$ см, $DC = 9$ см. Знайдіть відношення сторін $\dfrac{AB}{BC}$.

27.5. MA – бісектриса трикутника MNL, $ML = 4$ см, $MN = 16$ см. Знайдіть відношення відрізків $\dfrac{LA}{AN}$.

27.6. MD – бісектриса трикутника KMP, $KM = 8$ см, $MP = 6$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса MD ділить сторону KP, дорівнює 3 см. Знайдіть KP.

27.7. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 12$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса BK ділить сторону AC, дорівнює 6 см. Знайдіть AC.

3

27.8. AL – бісектриса трикутника ABC, $AB = 15$ см, $AC = 12$ см, $BC = 18$ см. Знайдіть BL і LC.

27.9. Бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, різниця довжин яких 1 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють 8 см і 6 см.

27.10. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а бісектриса ділить бічну сторону на відрізки, з яких той, що суміжний з основою, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр трикутника.

27.11. У рівнобедреному трикутнику основа менша від бічної сторони на 9 см, а бісектриса ділить бічну сторону на відрізки, які відносяться як 2 : 5. Знайдіть периметр трикутника.

4

27.12. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 15 см, 21 см і 24 см, проведено півколо, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається до двох інших сторін. На які відрізки центр півкола ділить більшу сторону?

27.13. У трикутник ABC вписано ромб $CKLM$ так, що кут C у них спільний, $K \in AC$, $L \in AB$, $M \in BC$. Знайдіть довжини відрізків AL і LB, якщо $AC = 18$ см, $BC = 12$ см, $AB = 20$ см.

Вправи для повторення

27.14. Сторони паралелограма дорівнюють a і b ($a > b$). Знайдіть відрізки, на які бісектриса гострого кута ділить його більшу сторону.

27.15. Чи може діагональ AC трапеції $ABCD$ ділити навпіл і кут A, і кут C?

27.16. У трикутнику ABC проведено висоту CH, причому $CH^2 = AH \cdot BH$ і точка H належить стороні AB. Доведіть, що трикутник ABC – прямокутний ($\angle C = 90°$).

Життєва математика

27.17. Бригаді з ремонту квартир потрібно потинькувати (поштукатурити) стіни кімнати 3,5 м завширшки, 4,5 м завдовжки і 2,8 м заввишки. Зазвичай бригада витрачає 6 мішків сухої суміші на 5 м^2 поверхні. Кімната має одні двері й одне вікно. Ширина дверей – 0,9 м, висота – 2 м, ширина вікна – 2,2 м, висота – 1,8 м. Скільки мішків сухої суміші потрібно придбати бригаді, щоб повністю потинькувати стіни від підлоги до стелі?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

27.18. 1) Розв'яжіть задачу, відтак дізнаєтеся прізвище видатного українця – ученого в галузі ракетобудування та космонавтики, конструктора перших штучних супутників Землі й космічних кораблів.

Знайдіть кути A і B паралелограма $ABCD$, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A$ на 20° більший за $\angle B$	Л	Р
$\angle A$ втричі менший від $\angle B$	К	В
$\angle A : \angle B = 7 : 5$	Ь	О

45°	75°	80°	75°	100°	105°	75°	135°

2) Поцікавтеся (використовуючи різні джерела інформації) біографією та досягненнями нашого видатного земляка.

§ 28. Застосування подібності трикутників до розв'язування задач

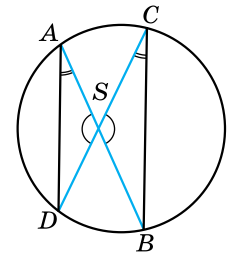
Розглянемо деякі цікаві властивості геометричних фігур, які можна встановити з подібності трикутників, та застосування подібності до практичних задач.

1. Пропорційність відрізків хорд

Т Теорема 1 (про пропорційність відрізків хорд). **Якщо хорди *AB* і *CD* перетинаються в точці *S*, то**

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Доведення. Нехай хорди AB і CD перетинаються в точці S (мал. 28.1).



Мал. 28.1

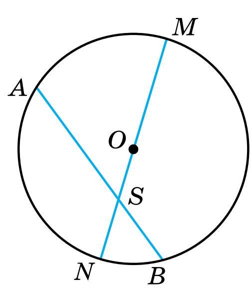
1) Розглянемо $\triangle SAD$ і $\triangle SCB$, у яких $\angle ASD = \angle CSB$ (як вертикальні кути), $\angle DAB = \angle DCB$ (як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу).

2) Тоді $\triangle SAD \sim \triangle SCB$, за двома кутами, а отже, $\dfrac{AS}{CS} = \dfrac{DS}{BS}$, тобто $AS \cdot BS = CS \cdot DS$. ■

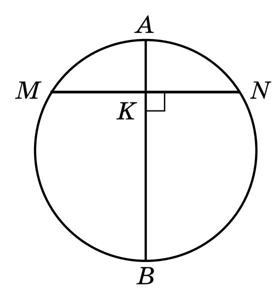
Наслідок. Якщо O – центр кола, R – його радіус, AB – хорда, $S \in AB$, то $AS \cdot BS = R^2 - a^2$, де $a = SO$.

Доведення. Проведемо діаметр MN, що проходить через точку S (мал. 28.2).

Тоді $AS \cdot BS = MS \cdot NS$, $AS \cdot BS = (R + a)(R - a)$, $AS \cdot BS = R^2 - a^2$. ■



Мал. 28.2



Мал. 28.3

Приклад 1. Діаметр кола AB перпендикулярний до хорди MN і перетинає її у точці K. $AK = 4$ см, $KB = 9$ см. Знайти довжину хорди MN.

Розв'язання. На малюнку 28.3 AB – діаметр кола, MN – хорда, $AB \perp MN$.

1) За теоремою про пропорційність відрізків хорд, маємо: $MK \cdot KN = AK \cdot KB$. Тоді $MK \cdot KN = 4 \cdot 9 = 36$.

2) За властивістю діаметра кола, перпендикулярного до хорди, маємо: $MK = KN$.

3) Позначимо $MK = KN = x$ см, тоді $x^2 = 36$ і $x = 6$ (см).

4) $MK = KN = 6$ (см), тому $MN = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.

2. Формула бісектриси трикутника

Приклад 2. AL – бісектриса трикутника ABC. Довести *формулу бісектриси*: $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$.

Доведення. Опишемо навколо трикутника ABC коло й продовжимо AL до перетину з колом у точці T (мал. 28.4).

1) $\angle ABC = \angle ATC$ (як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу AC), $\angle BAL = \angle CAL$ (за умовою). Тому $\triangle ABL \sim \triangle ATC$ (за двома кутами).

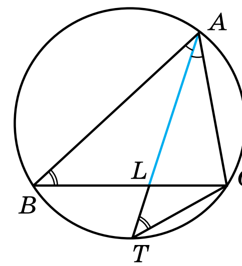
2) Маємо: $\dfrac{AB}{AT} = \dfrac{AL}{AC}$, звідки $AL \cdot AT = AB \cdot AC$;

$AL \cdot (AL + LT) = AB \cdot AC$; $AL^2 + AL \cdot LT = AB \cdot AC$.

Але за теоремою про пропорційність відрізків хорд:

$AL \cdot LT = BL \cdot CL$.

3) Отже, $AL^2 + BL \cdot CL = AB \cdot AC$, тобто $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$. ■



Мал. 28.4

3. Пропорційність відрізків січної та дотичної

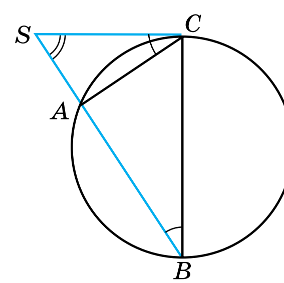
Теорема 2 (про пропорційність відрізків січної та дотичної). **Якщо з точки S поза колом провести січну, яка перетинає коло в точках A і B, та дотичну SC, де C – точка дотику, то**

$$SC^2 = SA \cdot SB.$$

Доведення. Розглянемо малюнок 28.5.

1) $\angle ABC$ – вписаний, тому $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$, $\angle SCA = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (див. задачу 49.14 з підручника для 7 класу), тобто $\angle SCA = \angle ABC$.

2) Тому $\triangle CSA \sim \triangle BSC$ (за двома кутами). Отже, $\dfrac{SC}{SB} = \dfrac{SA}{SC}$. Звідки $SC^2 = SA \cdot SB$. ■



Мал. 28.5

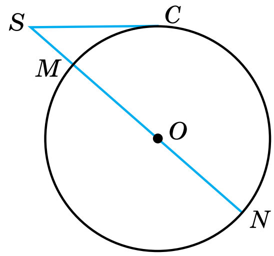
Наслідок 1. **Якщо з точки S провести дві січні, одна з яких перетинає коло в точках A і B, а друга – в точках M і N, то $SA \cdot SB = SM \cdot SN$.**

Наслідок є очевидним, оскільки кожний з добутків $SA \cdot SB$ і $SM \cdot SN$ за теоремою дорівнює SC^2.

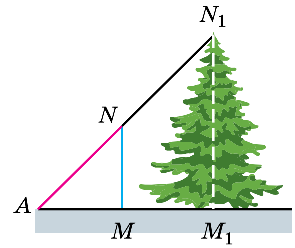
Наслідок 2. **Якщо O – центр кола, R – його радіус, SC – дотична, C – точка дотику, то $SC^2 = a^2 - R^2$, де $a = SO$.**

Доведення. Проведемо січну через центр кола – точку O (мал. 28.6). Тоді за теоремою: $SC^2 = SM \cdot SN$; $SC^2 = (a - R)(a + R)$.

Отже, $SC^2 = a^2 - R^2$. ■



Мал. 28.6



Мал. 28.7

4. Вимірювальні роботи на місцевості

Припустимо, що нам потрібно виміряти висоту деякого предмета, наприклад висоту ялини M_1N_1 (мал. 28.7). Для цього встановимо на деякій відстані від ялини жердину MN з планкою, що обертається навколо точки N. Спрямуємо планку на верхню точку N_1 ялини, як показано на малюнку 28.7. На землі позначимо точку A, у якій планка впиратиметься в поверхню землі.

Розглянемо $\triangle ANM$ ($\angle M = 90°$) і $\triangle AN_1M_1$ ($\angle M_1 = 90°$). $\angle A$ – їхній спільний гострий кут.

Тоді $\triangle ANM \sim \triangle AN_1M_1$ (за гострим кутом).

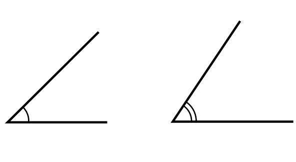
Тому $\dfrac{MN}{AM} = \dfrac{M_1N_1}{AM_1}$, звідки $M_1N_1 = \dfrac{MN \cdot AM_1}{AM}$.

Якщо, наприклад, $MN = 2$ м, $AM = 3{,}2$ м, $AM_1 = 7{,}2$ м, то $M_1N_1 = \dfrac{2 \cdot 7{,}2}{3{,}2} = 4{,}5$ (м).

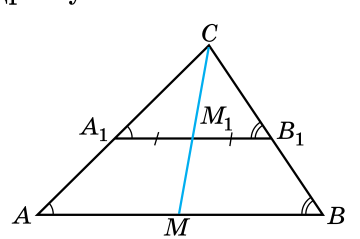
5. Задачі на побудову

Приклад 3. Побудувати трикутник за двома кутами та медіаною, проведеною з вершини третього кута.

Розв'язання. На малюнку 28.8 зображено два заданих кути й заданий відрізок. Побудуємо трикутник, у якого два кути відповідно дорівнюють двом заданим кутам, а медіана, проведена з вершини третього кута, дорівнює заданому відрізку.



Мал. 28.8



Мал. 28.9

1) Будуємо деякий трикутник, подібний до шуканого. Для цього побудуємо довільний трикутник A_1B_1C, у якого кути A_1 і B_1 дорівнюють заданим (мал. 28.9).

2) Проводимо медіану CM_1 трикутника A_1CB_1 і відкладаємо на прямій CM_1 відрізок CM, що дорівнює заданому.
3) Через точку M проводимо пряму, паралельну A_1B_1. Вона перетинає сторони кута C в деяких точках A і B (мал. 28.9).
4) Оскільки $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Отже, два кути трикутника ABC дорівнюють заданим.
Доведемо, що M – середина AB.

$\triangle A_1CM_1 \sim \triangle ACM$ (за двома кутами). Тому $\dfrac{CM_1}{CM} = \dfrac{A_1M_1}{AM}$.

$\triangle B_1CM_1 \sim \triangle BCM$ (за двома кутами). Тому $\dfrac{CM_1}{CM} = \dfrac{B_1M_1}{BM}$.

Отже, $\dfrac{A_1M_1}{AM} = \dfrac{B_1M_1}{BM}$, тобто $\dfrac{A_1M_1}{B_1M_1} = \dfrac{AM}{BM}$. Але $A_1M_1 = B_1M_1$ (за побудовою), тому $\dfrac{AM}{BM} = 1$ і $AM = BM$.

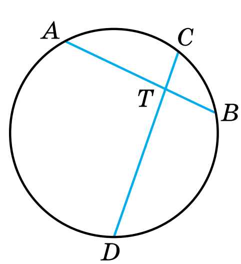
Отже, CM – медіана трикутника ABC і трикутник ABC – шуканий.

Сформулюйте теорему про пропорційність відрізків хорд і наслідок з неї. Сформулюйте теорему про пропорційність відрізків січної та дотичної і наслідки з неї.

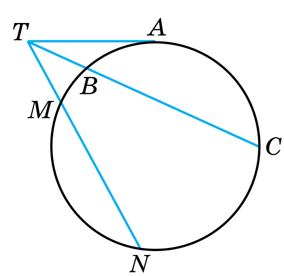
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

28.1. (*Усно.*) T – точка перетину хорд AB і CD (мал. 28.10). Які з рівностей є правильними:
1) $AT \cdot TC = BT \cdot TD$; 2) $AT \cdot TB = CT \cdot TD$;
3) $AT \cdot DT = CT \cdot BT$; 4) $CT \cdot DT = AT \cdot BT$?



Мал. 28.10



Мал. 28.11

28.2. (*Усно.*) TA – відрізок дотичної до кола. Дві січні перетинають коло відповідно в точках B і C та M і N (мал. 28.11). Які з рівностей є правильними:
1) $TA^2 = TB \cdot BC$; 2) $TA^2 = TM \cdot TN$;
3) $TB \cdot TC = TM \cdot MN$; 4) $TM \cdot TN = TB \cdot TC$?

2

28.3. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці P, $AP = 9$, $PB = 2$, $DP = 4$. Знайдіть CP.

28.4. Хорди MN і KL кола перетинаються в точці A, $KA = 6$, $AL = 3$, $MA = 4$. Знайдіть AN.

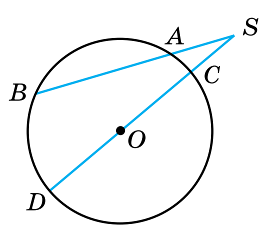
28.5. SA – відрізок дотичної до кола, A – точка дотику. Січна, що проходить через точку S, перетинає коло в точках B і C, $SA = 6$ см, $SB = 4$ см. Знайдіть SC і BC.

28.6. MP – відрізок дотичної до кола, P – точка дотику. Січна, що проходить через точку M, перетинає коло в точках B і C, $MP = 4$ см, $MC = 8$ см. Знайдіть MB і BC.

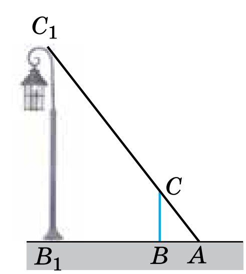
28.7. Хорда AB, довжина якої 16 см, перетинається з хордою CD в точці T. $AT = 2$ см, $CT = 1$ см. Знайдіть довжину хорди CD.

28.8. Хорда CD завдовжки 13 см перетинає хорду MN у точці A, $CA = 4$ см, $MA = 2$ см. Знайдіть довжину хорди MN.

28.9. Січна, що проходить через точку S, перетинає коло в точках A і B, а інша січна, що проходить через точки S і центр кола O, – в точках C і D (мал. 28.12). $SA = 4$ см, $SB = 16$ см, $SC = 2$ см. Знайдіть радіус кола.



Мал. 28.12



Мал. 28.13

28.10. Січна, що проходить через точку S, перетинає коло в точках A і B, а друга січна, що проходить через точки S і центр кола O, – у точках C і D (мал. 28.12). $SA = 4$ см, $SB = 9$ см, $SC = 3$ см. Знайдіть діаметр кола.

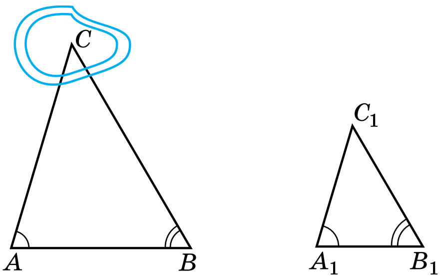
28.11. Для знаходження висоти ліхтаря B_1C_1 використали жердину BC завдовжки 1,5 м (мал. 28.13). $AB = 1$ м, $AB_1 = 6$ м. Знайдіть висоту ліхтаря B_1C_1.

28.12. Двірник виміряв висоту ліхтаря B_1C_1, використавши жердину BC з планкою AC (мал. 28.13). Знайдіть довжину використаної жердини BC, якщо висота ліхтаря склала 8 м і $AB_1 = 10$ м, $AB = 2{,}5$ м.

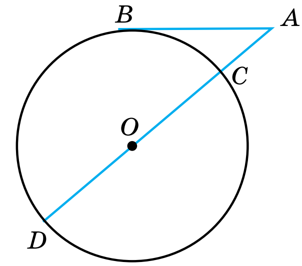
28.13. Щоб знайти на місцевості відстань від точки A до недоступної точки C, вибрали точку B, а потім на папері побудували трикутник $A_1B_1C_1$ так, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (мал. 28.14). Знайдіть AC, якщо $AB = 30$ м, $A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 7$ см.

3

28.14. Хорди кола AB і CD перетинаються в точці E. $AE : BE = 1 : 3$, $CD = 20$ см, $DE = 5$ см. Знайдіть AB.



Мал. 28.14



Мал. 28.15

28.15. Через точку M, що розміщена всередині кола, проведено дві хорди AB і CD, $AM = MB$, $CM = 16$ см, $DM : MC = 1 : 4$. Знайдіть AB.

28.16. На малюнку 28.15 AB – дотична до кола, $AB = 3$ см. Точка O – центр кола, $AO = 5$ см. Знайдіть діаметр кола.

28.17. На малюнку 28.15 AB – дотична до кола, точка O – центр кола, $AB = 8$ см, $AO = 10$ см. Знайдіть радіус кола.

28.18. Діаметр кола AB перпендикулярний до хорди CD, AB і CD перетинаються в точці M, $AM = 2$ см, $CM = 4$ см. Знайдіть радіус кола.

28.19. Діаметр кола MN і хорда AB – взаємно перпендикулярні й перетинаються в точці P, $PB = 12$ см, $NP = 18$ см. Знайдіть діаметр кола.

4

28.20. Перпендикуляр, проведений з точки кола до радіуса, дорівнює 24 см і ділить радіус у відношенні 5 : 8, починаючи від центра. Знайдіть радіус кола.

28.21. Знайдіть бісектрису AL трикутника ABC, якщо $AC = 15$ см, $AB = 12$ см, $BC = 18$ см.

28.22. Побудуйте трикутник за двома кутами й бісектрисою, проведеною з вершини третього кута.

28.23. Побудуйте трикутник за двома кутами й висотою, проведеною з вершини третього кута.

28.24. Побудуйте трикутник ABC за даним кутом C, відношенням сторін $AC : CB = 3 : 2$ та медіаною CM.

Вправи для повторення

28.25. PL – бісектриса трикутника PMN, $PN = 6$ см, $PM = 10$ см. Більший з двох відрізків, на які бісектриса PL ділить сторону MN, дорівнює 5 см. Знайдіть менший із цих відрізків.

28.26. Сторони трикутника відносяться як 3 : 4 : 6. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 52 см.

28.27. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a см і b см ($a > b$). Знайдіть квадрат висоти трапеції, якщо її бічна сторона перпендикулярна до діагоналі.

Життєва математика

28.28. На дачі родини Гордієнків потрібно пофарбувати із зовнішнього та внутрішнього боків бак із кришкою для води. Він має форму куба, ребро якого дорівнює 1,2 м. У магазині є фарба в банках по 1 кг і 2,5 кг.
1) Скільки м^2 потрібно пофарбувати?
2) Скільки фарби і в яких банках потрібно придбати, якщо на 1 м^2 витрачається 0,2 кг фарби?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

28.29. На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок $CM = BC$. Чи може кут ABM бути:
1) гострим; 2) прямим?

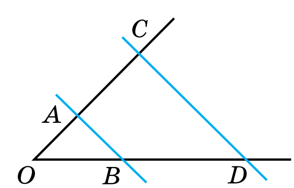
ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 6 (§§ 23–28)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Дано: $AB \parallel CD$ (мал. 1), $OA = 3$ см, $OB = 4$ см, $BD = 12$ см. Знайдіть AC.

А. 8 см **Б.** 9 см
В. 10 см **Г.** 16 см



Мал. 1

2. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB : DE = 2 : 3$. Знайдіть відношення $EF : BC$.

А. 5 : 2 **Б.** 3 : 5
В. 2 : 3 **Г.** 3 : 2

3. За яких з наведених умов $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$?

А. $\angle A = \angle A_1 = 30°$
Б. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = 40°$, $\angle B_1 = 50°$
В. $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = 47°$, $\angle C_1 = 47°$
Г. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = 150°$, $\angle C_1 = 150°$

2

4. CL – бісектриса трикутника ABC, $AC = 6$ см, $BC = 9$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса CL ділить сторону AB, дорівнює 3 см. Знайдіть AB.

А. 7,5 см **Б.** 6 см **В.** 5 см **Г.** 6,5 см

5. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проєкція на гіпотенузу – 8 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

А. 15 см **Б.** 18 см **В.** 16 см **Г.** 24 см

6. Хорда AB завдовжки 12 см перетинає хорду CD в точці K, $AK = 2$ см, $CK = 4$ см. Знайдіть довжину хорди CD.

А. 9 см **Б.** 8 см **В.** 12 см **Г.** 10 см

3

7. Сторони трикутника відносяться як 3 : 4 : 5. Знайдіть найменшу сторону подібного йому трикутника, якщо сума його середньої за величиною і найбільшої сторін дорівнює 72 см.

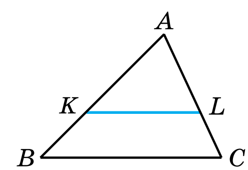
А. 18 см **Б.** 27 см **В.** $30\frac{6}{7}$ см **Г.** 24 см

8. *ABCD* – трапеція, *AB* і *CD* – її основи, *O* – точка перетину діагоналей. $AB - CD = 4$ см, $AO = 8$ см, $OC = 6$ см. Знайдіть *AB*.

А. 12 см **Б.** 16 см **В.** 14 см **Г.** 18 см

9. Пряма *KL* паралельна стороні *BC* трикутника *ABC*, $K \in AB$, $L \in AC$ (мал. 2). $BC = 9$ см, $KL = 6$ см, $KB = 4$ см. Знайдіть довжину сторони *AB*.

А. 12 см **Б.** 8 см
В. 16 см **Г.** 10 см



Мал. 2

4

10. Периметр паралелограма дорівнює 30 см, а його висоти – 4 см і 6 см. Знайдіть більшу сторону паралелограма.

А. 6 см **Б.** 8 см **В.** 9 см **Г.** 12 см

11. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Висота трапеції дорівнює 6 см і ділить більшу основу на два відрізки, менший з яких дорівнює 3 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

А. 6 см **Б.** 8 см **В.** 9 см **Г.** 12 см

12. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 8 см, 12 см і 15 см, проведено півколо, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається до двох інших сторін. На які відрізки центр півкола ділить більшу сторону трикутника?

А. 6 см і 9 см **Б.** 8 см і 7 см
В. 7,5 см і 7,5 см **Г.** 5 см і 10 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3

13. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90°$, *CK* — висота трикутника, $KB = 9$ см, $AK : CK = 4 : 3$. Установіть відповідність між сторонами трикутника *ABC* (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Сторона трикутника	*Довжина*
1. *AB*	**А.** 15 см
2. *BC*	**Б.** 16 см
3. *AC*	**В.** 20 см
	Г. 25 см

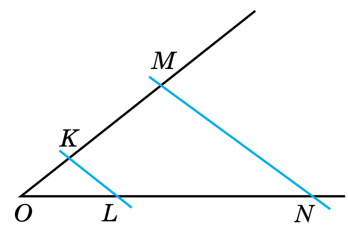
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 23–28

1

1. $\triangle ABC \backsim \triangle LMN$, $\dfrac{AB}{LM} = 3$. Знайдіть відношення $\dfrac{AC}{LN}$.

2. Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, якщо $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см, $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 8$ см, $A_1C_1 = 10$ см.

3. Дано: $KL \parallel MN$ (мал. 1), $OL = 3$ см, $LN = 6$ см, $OK = 2$ см. Знайдіть KM.



Мал. 1

2

4. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проєкція на гіпотенузу дорівнює 4 см, а гіпотенуза – 25 см.

5. AL – бісектриса трикутника ABC, $AB = 8$ см, $AC = 10$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса AL ділить сторону BC, дорівнює 4 см. Знайдіть BC.

6. Хорда CD завдовжки 9 см перетинає хорду AB у точці M, $CM = 3$ см, $AM = 9$ см. Знайдіть довжину хорди AB.

3

7. Сторони трикутника відносяться як 5 : 6 : 7. Знайдіть невідомі сторони подібного йому трикутника, якщо сума його більшої і меншої сторін дорівнює 24 см.

8. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AO = 6$ см, $OC = 4$ см. Знайдіть основи трапеції, якщо їхня сума дорівнює 20 см.

4

9. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 6 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

Додаткові завдання

4

10. У двох рівнобедрених трикутниках кути при вершині між собою рівні. Периметр одного з трикутників дорівнює 56 см. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо дві сторони іншого трикутника відносяться як 2 : 3.

11. На стороні AC трикутника ABC позначено точку K таку, що $\angle ABK = \angle C$, $AB = 8$ см, $AK = 4$ см. Знайдіть KC.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 6

До § 23

1

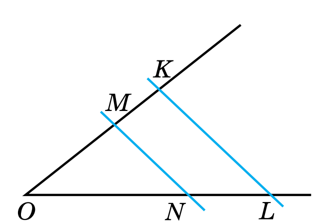
1. На малюнку 1 $MN \parallel KL$.

1) $OM : ON = 2 : 3$. Знайдіть $MK : NL$.

2) $OL : ON = 7 : 5$. Знайдіть $OK : OM$.

2

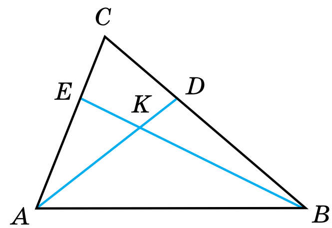
2. Паралельні прямі MN і KL перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 1). $OM = 4$, $NL = 9$, $ON = MK$. Знайдіть довжину відрізка ON.



Мал. 1

3 **3.** Дано відрізки a і b. Побудуйте відрізок $x = \frac{a^2}{b}$.

4 **4.** На малюнку 2 $AE : EC = 2 : 1$, $BD : DC = 3 : 2$. Знайдіть $BK : KE$.



Мал. 2

До § 24

1 **5.** $\triangle ABC \backsim \triangle KLM$. Заповніть порожні комірки:

1) $\frac{AB}{AC} = \frac{\square}{\square}$; 2) $\frac{BC}{AC} = \frac{\square}{\square}$.

2 **6.** $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Знайдіть невідомі сторони обох трикутників.

3 **7.** Сторони трикутника відносяться як $2 : 5 : 6$. Знайдіть периметр трикутника, подібного даному, якщо:

1) його середня за розміром сторона дорівнює 20 см;

2) сума більшої та меншої сторін дорівнює 40 см.

4 **8.** У трикутнику проведено середню лінію. Чи подібний трикутник, що утворився, даному трикутнику?

До § 25

1 **9.** За яких умов два трикутники подібні:

1) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого;

2) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого;

3) три кути одного трикутника дорівнюють трьом кутам іншого?

2 **10.** На катеті AC і гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точки P і L такі, що $\angle APL = 90°$. Доведіть, що $\triangle APL \backsim \triangle ACB$.

11. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, $OB = 3OA$, $OC = 3OD$. Доведіть, що $\triangle AOD \backsim \triangle BOC$.

12. Діагоналі трапеції діляться точкою перетину у відношенні $2 : 3$. Менша основа трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

13. У трикутниках KLM і $K_1L_1M_1$ $\angle K = \angle K_1$, а сторони трикутника KLM, що утворюють кут K, у 2,5 раза більші за сторони, що утворюють кут K_1. Знайдіть LM, якщо $L_1M_1 = 4$ см.

14. $ABCD$ – трапеція, $AD \parallel BC$, $\angle BAC = \angle ADC$.
1) Знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.
2) Доведіть, що $AC^2 = AD \cdot BC$.

15. На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено точки M і N так, що $AC \cdot CM = BC \cdot CN$. Знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.

16. На стороні AC трикутника ABC вибрано точку K так, що $\angle BKC = \angle ABC$, причому $\angle BKC$ – тупий. Знайдіть BC, якщо $AK = 16$ см, $CK = 9$ см.

17. У трикутнику ABC через точку N, що належить стороні BC, проведено прямі, що перетинають сторони AB і AC відповідно в точках M і K, і паралельні AC і AB. Доведіть, що $MN \cdot NK = BM \cdot CK$.

18. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, точки I і I_1 – точки перетину бісектрис цих трикутників. Доведіть, що $\triangle AIB \sim \triangle A_1I_1B_1$.

19. У трикутник ABC вписано прямокутник $KLMN$, у якого $KN = 16$ см, $LK = 10$ см. Причому $K \in AC$, $N \in AC$, $M \in BC$, $L \in AB$. Знайдіть висоту трикутника, проведену з вершини B, якщо $AC = 24$ см.

20. BD і AE – висоти гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що $DC \cdot AC = EC \cdot BC$.

До § 26

21. Накресліть прямокутний трикутник KLM ($\angle K = 90°$) і проведіть у ньому висоту KP. Які відрізки є проєкціями катетів KL і KM на гіпотенузу?

22. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 1 см і 8 см. Знайдіть менший катет трикутника.

23. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 24 см, а проєкція одного з катетів на гіпотенузу – 18 см. Знайдіть проєкцію іншого катета на гіпотенузу та катети трикутника.

24. BM – бісектриса рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). З точки M до BC проведено перпендикуляр MK. Знайдіть BM і периметр трикутника, якщо $KC = 9$ см, $MK = 12$ см.

25. Перпендикуляр, проведений з вершини кута прямокутника до діагоналі, ділить її на відрізки, довжини яких відносяться як 9 : 16. Знайдіть периметр прямокутника, якщо довжина перпендикуляра 12 см.

26. Коло, вписане в ромб, точкою дотику ділить сторону ромба на відрізки 3,6 см і 6,4 см. Знайдіть діагоналі ромба.

27. У рівнобічній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Висота трапеції дорівнює 6 см, а середня лінія – 9 см. Знайдіть основи трапеції.

До § 27

28. BM – бісектриса трикутника ABC. Знайдіть відношення $\frac{AM}{MC}$, якщо $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$.

29. BD – бісектриса трикутника ABC. Знайдіть сторону AB, якщо $AD : DC = 3 : 5$, $BC = 20$ см.

30. Одна зі сторін паралелограма на 9 см більша за іншу. Бісектриса кута паралелограма ділить діагональ паралелограма на відрізки 4 см і 10 см. Знайдіть периметр паралелограма.

31. Периметр прямокутника – 60 см. Бісектриса, що виходить з вершини кута прямокутника, ділить його діагональ на відрізки, що відносяться як 7 : 8. Знайдіть сторони прямокутника.

32. Точка D належить стороні AB трикутника ABC. Порівняйте кути ACD і BCD, якщо $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $AD = 3$ см, $DB = 7$ см.

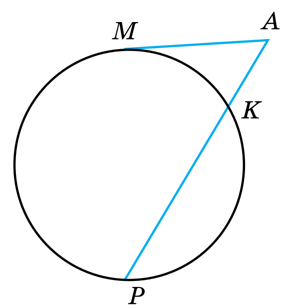
33. У рівнобедреному трикутнику радіус вписаного кола в 5 разів менший від висоти, проведеної до основи. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 90 см.

До § 28

34. S – точка перетину хорд AB і CD, $AS = 4$, $SB = 1$. Якому числу дорівнює добуток $CS \cdot DS$?

35. Січні a і b виходять з точки M, що лежить поза колом. Січна a перетинає коло в точках A і B, а січна b – в точках C і D. Відомо, що $MA \cdot MB = 28$, $MC = 4$. Знайдіть MD і CD.

36. З точки A до кола проведено дотичну AM і січну AP (мал. 3). Знайдіть довжини відрізків AK і PK, якщо $AM = 8$ см, $AP = 16$ см.



Мал. 3

37. З точки A до кола проведено дотичну AM і січну, яка перетинає коло в точках K і P (мал. 3). $AM = 10$ см, $AP : AK = 4 : 1$. Знайдіть AK, AP та KP.

38. Продовження медіани AM рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) перетинає коло, описане навколо трикутника, у точці P, $AM = 6$ см, $BC = 8$ см. Знайдіть AP.

39. У трикутнику ABC з вершини B проведено бісектрису BL. Відомо, що $BL = 5$ см, $AL = 4$ см, $LC = 5$ см. Знайдіть AB і BC.

40. Побудуйте трикутник ABC за даним кутом A, відношенням сторін $AC : AB = 4 : 3$ і бісектрисою AL.

Головне в темі 6

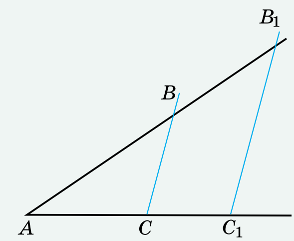
УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕ́СА
(теорема про пропорційні відрізки)

Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}.$$

Наслідок 1. $\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}.$

Наслідок 2. $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}.$

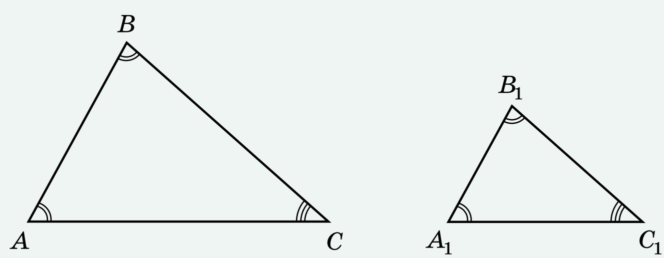


ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

Два ***трикутники*** називають ***подібними***, якщо їхні кути відповідно рівні й сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам іншого.

Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні між собою, то

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1 \text{ і } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



Якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то із співвідношення $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ випливає співвідношення:

$$AB : BC : AC = A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1.$$

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін цих трикутників.

ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Теорема 1 (за двома сторонами та кутом між ними). **Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, між собою рівні, то трикутники подібні.**

Наслідок 1. **Прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного з них пропорційні катетам другого.**

Наслідок 2. **Якщо кут при вершині одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при вершині другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.**

Теорема 2 (за двома кутами). **Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то ці трикутники подібні.**

Наслідок 1. **Рівносторонні трикутники подібні.**

Наслідок 2. **Якщо кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.**

Наслідок 3. **Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то ці трикутники подібні.**

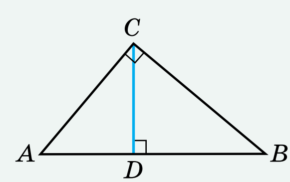
Теорема 3 (за трьома сторонами). **Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то ці трикутники подібні.**

СЕРЕДНІ ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ У ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ

Теорема (про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику). **1) Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним проєкцій катетів на гіпотенузу.**

2) Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи та проєкції цього катета на гіпотенузу.

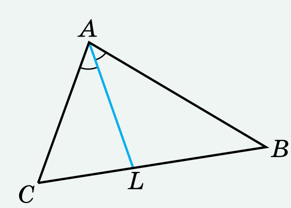
$CD^2 = AD \cdot BD,$
$AC^2 = AB \cdot AD,$
$BC^2 = AB \cdot BD.$



ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ ТРИКУТНИКА

Теорема (властивість бісектриси трикутника). **Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до неї сторонам.**

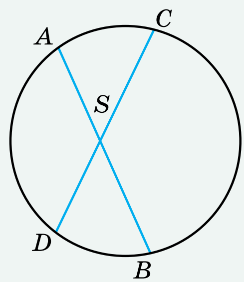
$$\frac{AB}{KC} = \frac{BL}{CL}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$$
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}, \quad \frac{AB}{BL} = \frac{AC}{LC}$$

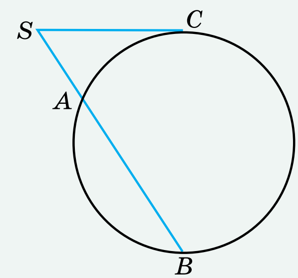


ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

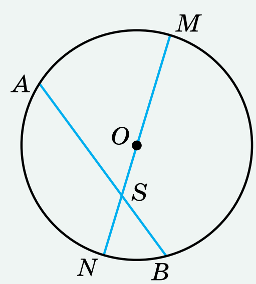
Теорема 1 (про пропорційність відрізків хорд). **Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці S, то**

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$





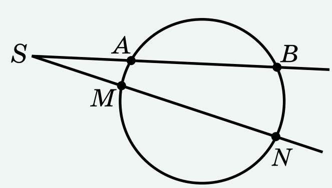
Наслідок. **Якщо O — центр кола, R — його радіус, AB — хорда, $S \in AB$, то $AS \cdot BS = R^2 - a^2$, де $a = SO$.**



Теорема 2 (про пропорційність відрізків січної і дотичної). **Якщо з точки S поза колом провести січну, яка перетинає коло в точках A і B, та дотичну SC (C — точка дотику), то**

$$SC^2 = SA \cdot SB.$$

Наслідок 1. **Якщо з точки S провести дві січні, одна з яких перетинає коло в точках A і B, а друга — у точках M і N, то $SA \cdot SB = SM \cdot SN$.**



Наслідок 2. **Якщо O — центр кола, R — його радіус, SC — дотична, C — точка дотику, то $SC^2 = a^2 - R^2$, де $a = SO$.**

ВІДОМОСТІ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

Рівняння

Коренем, або *розв'язком*, *рівняння* називають число, яке перетворює рівняння в правильну числову рівність.

Приклади. 1) Число 3 є коренем рівняння $2x - 5 = 1$, оскільки $2 \cdot 3 - 5 = 1$.

2) Число -2 не є коренем рівняння $3x + 7 = 0$, оскільки $3 \cdot (-2) + 7 = 1 \neq 0$.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які не мають коренів.

Приклади. 1) Рівняння $4x = 8$ і $x + 3 = 5$ – рівносильні, оскільки кожне з них має єдиний корінь, що дорівнює 2.

2) Рівняння $7 - x = 6$ і $10x = 20$ не є рівносильними, оскільки перше має корінь – число 1, а друге – число 2.

Під час розв'язування *рівнянь* використовують такі *властивості*:

1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме, відмінне від нуля, число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Рівняння вигляду $ax = b$, де a і b – деякі числа, x – змінна, називають *лінійним рівнянням з однією змінною.*

Дані про розв'язки лінійного рівняння подамо за допомогою схеми:

$ax = b$

Якщо $a \neq 0$, то $x = \dfrac{b}{a}$	Якщо $a = 0$, $b = 0$, то x – будь-яке число	Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то коренів немає

Приклади. 1) $-0{,}5x = 14$;
$x = 14 : (-0{,}5)$;
$x = -28$.

2) $0x = 5$;
рівняння не має коренів.

Багато рівнянь послідовними перетвореннями зводять до лінійного рівняння, рівносильного даному.

Приклади. 1) $5(x + 2) - 4x = -3(x + 7)$.

Розкриємо дужки: $5x + 10 - 4x = -3x - 21$.

Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину рівняння, а інші – у праву, змінивши знаки доданків, які переносимо, на протилежні: $5x - 4x + 3x = -21 - 10$;

зведемо подібні доданки: $4x = -31$;

розв'яжемо отримане лінійне рівняння: $x = -31 : 4$;

$x = -7,75$.

Відповідь: $-7,75$.

2) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{5-x}{3} = \dfrac{x+13}{6}$.

Помножимо обидві частини рівняння на найменше спільне кратне знаменників дробів – число 6:

$\dfrac{6(x+1)}{2} + \dfrac{6(5-x)}{3} = \dfrac{6(x+13)}{6}$;

$3(x + 1) + 2(5 - x) = x + 13$.

Далі розв'язуємо, як у попередньому прикладі:

$3x + 3 + 10 - 2x = x + 13$;

$3x - 2x - x = 13 - 3 - 10$;

$0x = 0$;

x – будь-яке число.

Відповідь: будь-яке число.

Степінь з натуральним показником

Степенем числа a з натуральним показником n називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a. *Степенем числа a* з показником 1 називають саме це число.

Приклади. 1) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$;

2) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 = -\dfrac{2}{3} \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{8}{27}$;

3) $1,8^1 = 1,8$;

4) $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$.

Властивості степеня з натуральним показником

$a^m a^n = a^{m+n}$,	$a^{m+n} = a^m a^n$,
$a^m : a^n = a^{m-n}$,	$a^{m-n} = a^m : a^n$,
$(a^m)^n = a^{mn}$,	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$,
$(ab)^n = a^n b^n$,	$a^n b^n = (ab)^n$.

Приклади. 1) $a^7 a^8 = a^{7+8} = a^{15}$;

2) $m^5 : m = m^{5-1} = m^4$;

3) $(b^5)^{10} = b^{5 \cdot 10} = b^{50}$.

Використовуючи властивості степеня з натуральним показником, можемо значно спрощувати обчислення.

Приклади. 1) $127^5 : 127^4 = 127^{5-4} = 127^1 = 127$;

2) $(2^3)^8 : 4^{10} = 2^{3\cdot 8} : (2^2)^{10} = 2^{24} : 2^{20} = 2^{24-20} = 2^4 = 16$;

3) $\dfrac{3^5 \cdot 9^2}{27^2} = \dfrac{3^5 \cdot (3^2)^2}{(3^3)^2} = \dfrac{3^5 \cdot 3^4}{3^6} = 3^{5+4-6} = 3^3 = 27$;

4) $5^{12} \cdot 0{,}2^{12} = (5 \cdot 0{,}2)^{12} = 1^{12} = 1$;

5) $2^9 \cdot 0{,}5^8 = 2 \cdot 2^8 \cdot 0{,}5^8 = 2 \cdot (2 \cdot 0{,}5)^8 = 2 \cdot 1^8 = 2 \cdot 1 = 2$.

Одночлен

Цілі вирази – числа, змінні, їх степені й добутки – називають *одночленами*.

Наприклад, 7; $-\dfrac{9}{13}b^2c$; $7a^5m^3$ – одночлени;

вирази $m + c^2$, $p^3 - 2a + 3b$; $\dfrac{a+b}{a-b}$ – не є одночленами.

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, і до того ж цей множник записано першим, та містить степені різних змінних, то такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.

Наприклад, $2a^2b$ – одночлен стандартного вигляду, а одночлен $2a^2b \cdot (-3ab^7)$ не є одночленом стандартного вигляду. Цей одночлен можна звести до одночлена стандартного вигляду:

$$2a^2b \cdot (-3ab^7) = 2 \cdot (-3) \cdot (a^2a) \cdot (bb^7) = -6a^3b^8.$$

Множення одночленів

Приклади.

1) $-2x^2y^7 \cdot 5x = -2 \cdot 5 \cdot (x^2x) \cdot y^7 = -10x^3y^7$;

2) $\dfrac{1}{3}p^3c^8 \cdot \left(-\dfrac{2}{7}p^4m^2\right) \cdot 1\dfrac{1}{6}c^3m =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{2}{7}\right) \cdot \dfrac{7}{6}(p^3p^4) \cdot (c^8c^3) \cdot (m^2m) = -\dfrac{1}{9}p^7c^{11}m^3$.

Піднесення одночлена до степеня

Приклади. 1) $(-2m^3n^4)^3 = (-2)^3 \cdot (m^3)^3 \cdot (n^4)^3 = -8m^9n^{12}$;

2) $(-c^5d^8)^6 = (-1)^6 \cdot (c^5)^6 \cdot (d^8)^6 = c^{30}d^{48}$.

Многочлен

Многочленом називають суму одночленів. Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Многочлен $3m^2n - 5mn^2 + 7m^2n + mn^2$ не є многочленом стандартного вигляду, але його можна звести до многочлена стандартного вигляду:

$$\underline{3m^2n} - \underline{\underline{5mn^2}} + \underline{7m^2n} + \underline{\underline{mn^2}} = 10m^2n - 4mn^2.$$

Додавання і віднімання многочленів

Приклади. 1) $(2x^2 + 3x - 5) + (x^2 - 3x) = \underline{\underline{2x^2}} + \underline{3x} - 5 + \underline{\underline{x^2}} - \underline{3x} = 3x^2 - 5;$

2) $(3a^2 - 5 + 2a) - (2a^2 + 7 - 3a) = \underline{3a^2} - 5 + \underline{\underline{2a}} - \underline{2a^2} - 7 + \underline{\underline{3a}} = a^2 + 5a - 12.$

Множення одночлена на многочлен

Приклади. 1) $3a(a^3 - 2a + 7) = 3a \cdot a^3 + 3a \cdot (-2a) + 3a \cdot 7 = 3a^4 - 6a^2 + 21a;$

2) $-2xy(3x^2 - 5xy + y^2) = -2xy \cdot 3x^2 - 2xy \cdot (-5xy) - 2xy \cdot y^2 = -6x^3y + 10x^2y^2 - 2xy^3.$

Множення многочлена на многочлен

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Приклади. 1) $(3x - 5)(x + 2) = 3x^2 + 6x - 5x - 10 = 3x^2 + x - 10;$

2) $(2a - b)(a^2 - 3ab + b^2) = 2a^3 - 6a^2b + 2ab^2 - ba^2 + 3ab^2 - b^3 = 2a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - b^3.$

Формули скороченого множення

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3,$

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$

Приклади. 1) $(x - 5)(x + 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25;$

2) $(2m + 3)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot 3 + 3^2 = 4m^2 + 12m + 9;$

3) $(5x^2 - 2xy)^2 = (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 2xy + (2xy)^2 = 25x^4 - 20x^3y + 4x^2y^2;$

4) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) = (a - 3)(a^2 + 3a + 3^2) = a^3 - 3^3 = a^3 - 27;$

5) $\left(\frac{1}{2}b + c^2\right)\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}bc^2 + c^4\right) = \left(\frac{1}{2}b + c^2\right) \times$

$\times\left(\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{2}b \cdot c^2 + (c^2)^2\right) = \left(\frac{1}{2}b\right)^3 + (c^2)^3 = \frac{1}{8}b^3 + c^6.$

Розкладання многочленів на множники

Винесення спільного множника за дужки

$$\underline{a}b + \underline{a}c = \underline{a}(b + c).$$

Приклади. 1) $12x^2 + 15x = \underline{3x} \cdot 4x + \underline{3x} \cdot 5 = \underline{3x}\,(4x + 5);$

2) $25a^3b - 20a^2b^2 = \underline{5a^2b} \cdot 5a - \underline{5a^2b} \cdot 4b = \underline{5a^2b}(5a - 4b).$

Спосіб групування

$$ax + ay + bx + by = a(\underline{x + y}) + b(\underline{x + y}) = (x + y)(a + b).$$

Приклади. 1) $ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10) = a(\underline{b - 5}) + 2(\underline{b - 5}) = (b - 5)(a + 2)$;

2) $a^2b + c^2 - abc - ac = (a^2b - abc) + (c^2 - ac) = ab(a - c) - c(a - c) = (a - c)(ab - c)$.

Використання формул скороченого множення

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$,
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Приклади. 1) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$;
2) $m^2 + 10m + 25 = m^2 + 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2 = (m + 5)^2$;
3) $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = (2a - 3b)^2$;
4) $c^3 - 64 = c^3 - 4^3 = (c - 4)(c^2 + c \cdot 4 + 4^2) = (c - 4)(c^2 + 4c + 16)$;

5) $\frac{1}{8}x^6 + y^9 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 + (y^3)^3 =$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right)\left(\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot y^3 + (y^3)^2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right)\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^3 + y^6\right).$$

Функція

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають *функціональною залежністю*, або *функцією*.

Змінну x у цьому випадку називають *незалежною змінною* (або *аргументом*), а змінну y – *залежною змінною* (або *функцією* від заданого аргументу).

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення функції*; усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень функції*.

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою вигляду $y = kx + l$, де x – незалежна змінна, k і l – деякі числа.

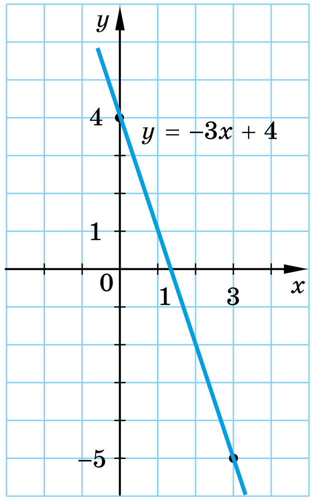
Графіком будь-якої лінійної функції є пряма. Для побудови графіка лінійної функції досить знайти координати двох точок графіка, позначити ці точки на координатній площині і провести через них пряму.

Приклад. Побудуємо графік функції $y = -3x + 4$.

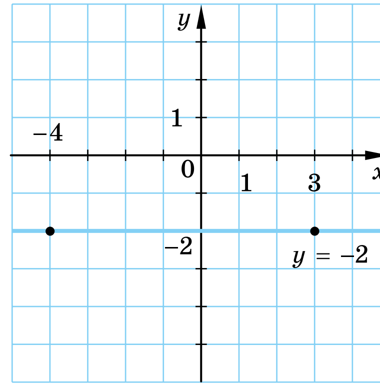
Складемо таблицю для деяких двох значень аргументу:

x	0	3
y	4	–5

Позначимо на координатній площині отримані точки та проведемо через них пряму (мал. 1).



Мал. 1



Мал. 2

Приклад. Побудуємо графік функції $y = -2$. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y, що дорівнює -2. Графіком функції є пряма, що складається з точок з координатами $(x; -2)$, де x – будь-яке число. Позначимо дві будь-які такі точки, наприклад $(3; -2)$ і $(-4; -2)$, і проведемо через них пряму (мал. 2).

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

Якщо треба знайти спільний розв'язок двох (або більшої кількості) рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють *систему рівнянь*.

Приклад. $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - 3y = 5 \end{cases}$ – система рівнянь з двома змінними x і y.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, при яких кожне рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Пара чисел $x = 2$; $y = -1$ є розв'язком вищевказаної системи, оскільки $2 \cdot 2 + (-1) = 3$ і $2 - 3 \cdot (-1) = 5$.

Пара чисел $x = 5$; $y = -7$ не є розв'язком системи. Для цих значень змінних перше рівняння перетворюється у правильну рівність $(2 \cdot 5 + (-7) = 3)$, а друге – ні $(5 - 3 \cdot (-7) = 26 \neq 5)$.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$

1.	Виражаємо одну змінну з якого-небудь рівняння системи через другу	$3x = 1 + 7y,$ $x = \dfrac{1 + 7y}{3}$
2.	Замість цієї змінної підставляємо в інше рівняння системи вираз, що утворився	$4 \cdot \dfrac{1 + 7y}{3} + 9y = 38$
3.	Розв'язуємо отримане рівняння з однією змінною	$4(1 + 7y) + 3 \cdot 9y = 3 \cdot 38,$ $4 + 28y + 27y = 114,$ $55y = 110,$ $y = 2$
4.	Знаходимо відповідне значення другої змінної	$x = \dfrac{1 + 7 \cdot 2}{3},$ $x = 5$
5.	Записуємо відповідь	$(5; 2)$

Розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{cases}$

1.	Множимо (якщо є необхідність) обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами	$\begin{cases} 7x - 4y = 2, & \vert \times 3 \\ 5x + 3y = 19; & \vert \times 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76 \end{cases}$
2.	Додаємо почленно ліві й праві частини рівнянь системи	$41x = 82$
3.	Розв'язуємо отримане рівняння з однією змінною	$x = 2$
4.	Підставляємо знайдене значення змінної в одне з рівнянь системи (краще початкової) і знаходимо відповідне значення другої змінної	$7 \cdot 2 - 4y = 2,$ $-4y = -12,$ $y = 3$
5.	Записуємо відповідь	$(2; 3)$

ВІДОМОСТІ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

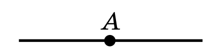
Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

Основними геометричними фігурами на площині є *точка* й *пряма*.

Відрізком називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками. На малюнку 1: відрізок AB, точки A і B – *кінці відрізка*.

Мал. 1

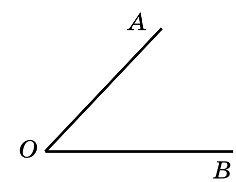
Точка A ділить пряму на дві частини (мал. 2). Кожну з отриманих частин разом з точкою A називають *променем*, що виходить із точки A. Тому A називають *початком* кожного з променів.



Мал. 2

Два промені, що мають спільний початок та доповнюють один одного до прямої, називають *доповняльними*.

Кут – це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки. Промені називають *сторонами кута*, а їхній спільний початок – *вершиною кута*. На малюнку 3: кут AOB, точка O – його вершина, OA та OB – сторони кута. Записати цей кут можна так: $\angle AOB$, $\angle BOA$, $\angle O$.



Мал. 3

Бісектрисою кута називають промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами й ділить його навпіл.

Аксіоми планіметрії

I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

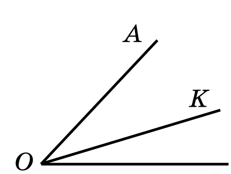
IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка. (На мал. 4: $AB = AC + CB$.)

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює $180°$.

VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які його розбиває будь-який промінь, що проходить між його сторонами. $\angle AOB = \angle AOK + \angle KOB$ (мал. 5).

Мал. 4



Мал. 5

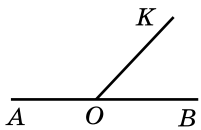
Суміжні та вертикальні кути

Два кути називають *суміжними*, якщо одна сторона в них спільна, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

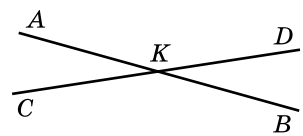
На малюнку 6: кути $\angle AOK$ і $\angle KOB$ – суміжні.

Властивість суміжних кутів. Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін іншого.



Мал. 6



Мал. 7

На малюнку 7: $\angle AKC$ і $\angle DKB$ – вертикальні, $\angle AKD$ і $\angle CKB$ також вертикальні.

Властивість вертикальних кутів. Вертикальні кути рівні між собою.

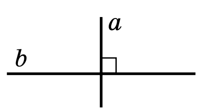
Перпендикулярні та паралельні прямі

Дві прямі називають *взаємно перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

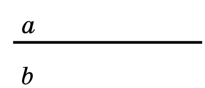
На малюнку 8: прямі a і b – перпендикулярні.

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

На малюнку 9: прямі a і b – паралельні.



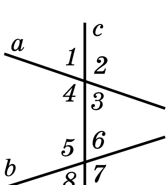
Мал. 8



Мал. 9

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих). Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Кути, що утворилися при перетині двох прямих січною. Ознаки та властивість паралельності прямих. Властивості кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною



Мал. 10

Пряму c називають *січною* для прямих a і b, якщо вона перетинає їх у двох точках (мал. 10).

Пари кутів *4* і *5*, *3* і *6* називають *внутрішніми односторонніми кутами*; пари кутів *4* і *6*, *3* і *5* – *внутрішніми різносторонніми*; пари кутів *1* і *5*, *2* і *6*, *3* і *7*, *4* і *8* – *відповідними кутами*.

Ознаки паралельності прямих

1. Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

2. Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні між собою, то прямі паралельні.
3. Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює $180°$, то прямі паралельні.
4. Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Властивість паралельних прямих. Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

1. Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.
2. Внутрішні різносторонні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.
3. Сума внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює $180°$.

Трикутник і його елементи

Трикутником називають фігуру, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки (мал. 11).

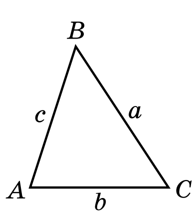
Точки A, B, C – *вершини трикутника*; відрізки $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ – *сторони трикутника*; $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$ – *кути трикутника*.

Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін: $P_{ABC} = AB + BC + CA$.

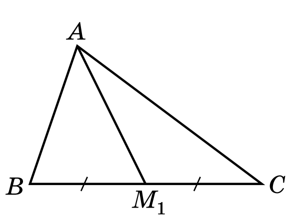
Медіаною трикутника називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

На малюнку 12: AM_1 – медіана трикутника ABC.

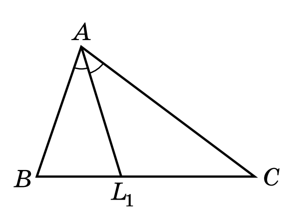
Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.



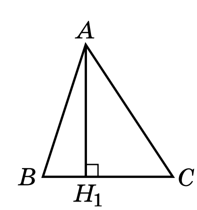
Мал. 11



Мал. 12



Мал. 13



Мал. 14

На малюнку 13: AL_1 – бісектриса трикутника ABC.

Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

На малюнку 14: AH_1 – висота $\triangle ABC$.

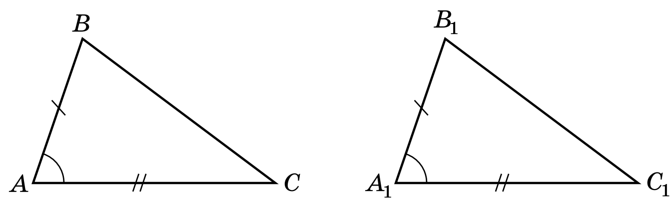
Сума кутів трикутника дорівнює $180°$.

Нерівність трикутника. Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін.

У трикутнику:
1) проти більшої сторони лежить більший кут;
2) проти більшого кута лежить більша сторона.

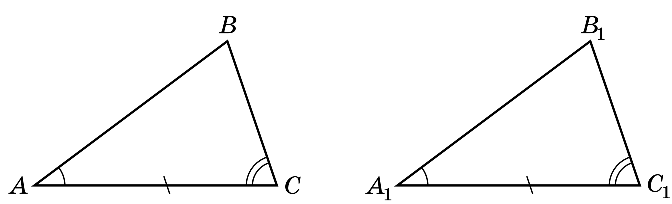
Ознаки рівності трикутників

Перша ознака рівності трикутників (за двома сторонами й кутом між ними). Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою (мал. 15).



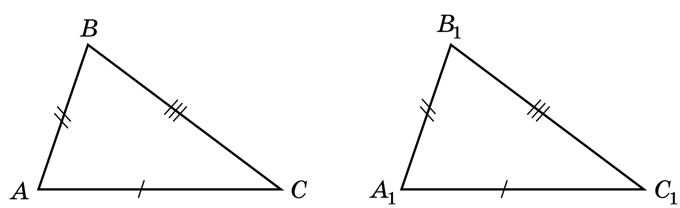
Мал. 15

Друга ознака рівності трикутників (за стороною і двома прилеглими до неї кутами). Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою (мал. 16).



Мал. 16

Третя ознака рівності трикутників (за трьома сторонами). Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою (мал. 17).



Мал. 17

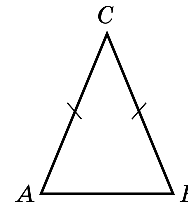
Види трикутників

Трикутник називають *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони між собою рівні.

На малюнку 18: $\triangle ABC$ – рівнобедрений, AC і BC – його *бічні сторони*, AB – *основа*.

Властивість кутів рівнобедреного трикутника. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Ознака рівнобедреного трикутника. Якщо в трикутнику два кути між собою рівні, то він рівнобедрений.



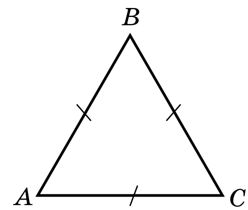
Мал. 18

Трикутник, усі сторони якого між собою рівні, називають *рівностороннім*.

На малюнку 19: $\triangle ABC$ – рівносторонній.

Властивість кутів рівностороннього трикутника. Усі кути рівностороннього трикутника дорівнюють по $60°$.

Ознака рівностороннього трикутника. Якщо в трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.

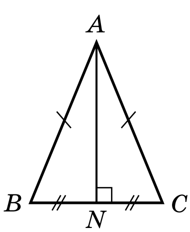


Мал. 19

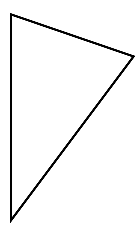
Трикутник, усі сторони якого різняться довжиною, називають *різностороннім*.

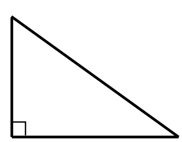
Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є його медіаною і висотою.

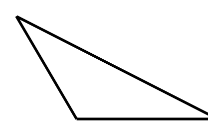
На малюнку 20: бісектриса AN, проведена до основи BC рівнобедреного трикутника ABC, є також його медіаною і висотою.



Мал. 20


Мал. 21


Мал. 22


Мал. 23

Залежно від кутів розглядають такі види трикутників:

- *гострокутний* (усі кути якого гострі – мал. 21);
- *прямокутний* (один з кутів якого прямий, а два інші – гострі – мал. 22);
- *тупокутний* (один з кутів якого тупий, а два інші – гострі – мал. 23).

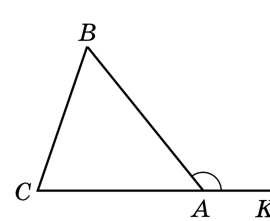
Зовнішній кут трикутника

Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.

На малюнку 24: $\angle BAK$ – зовнішній кут трикутника ABC.

Властивість зовнішнього кута трикутника. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним, тобто

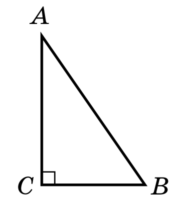
$$\angle BAK = \angle B + \angle C.$$



Мал. 24

Прямокутні трикутники

Якщо $\angle C = 90°$, то $\triangle ABC$ – прямокутний (мал. 25). AC і BC – *катети прямокутного трикутника*, AB – *гіпотенуза прямокутного трикутника*.



Мал. 25

Властивості прямокутних трикутників

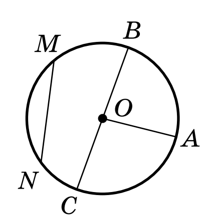
1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.
2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який з його катетів.
3. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.
4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.
5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Ознаки рівності прямокутних трикутників

1. *За двома катетами.* Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні.
2. *За катетом і прилеглим до нього гострим кутом.* Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту іншого, то такі трикутники рівні.
3. *За гіпотенузою і гострим кутом.* Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні.
4. *За катетом і протилежним кутом.* Якщо катет і протилежний кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному куту іншого, то такі трикутники рівні.
5. *За катетом і гіпотенузою.* Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники рівні.

Коло та круг

Колом називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки (мал. 26).



Мал. 26

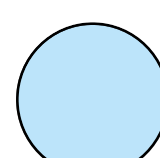
Цю точку називають *центром кола*; відрізок, що сполучає точку кола з його центром, називають *радіусом кола*.

На малюнку 26 точка O – центр кола, OA – радіус кола.

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають *хордою*. Хорду, що проходить через центр кола, називають *діаметром*.

На малюнку 26 MN – хорда, BC – діаметр.

Частину площини, обмежену колом, разом із самим колом називають *кругом* (мал. 27).


Мал. 27

Центром, радіусом, діаметром, хордою круга називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке обмежує круг.

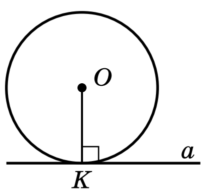
Властивості елементів кола

1. Діаметр кола вдвічі більший за його радіус.
2. Діаметр є найбільшою з хорд.
3. Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.
4. Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.
5. Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

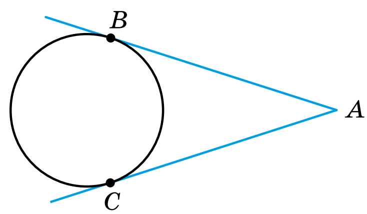
Дотичною до кола називають пряму, яка має лише одну спільну точку з колом. Цю точку називають *точкою дотику*.

На малюнку 28 пряма a – дотична до кола, точка K – точка дотику.

Властивість дотичної. Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.



Мал. 28



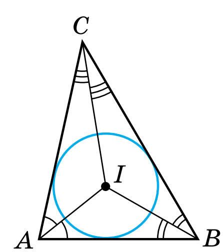
Мал. 29

Властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки. Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою. На малюнку 29 $AB = AC$.

Коло, вписане у трикутник

Коло називають *вписаним у трикутник*, якщо воно дотикається до всіх сторін цього трикутника. Водночас трикутник називають *описаним навколо кола* (мал. 30).

У будь-який трикутник можна вписати коло. Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника.

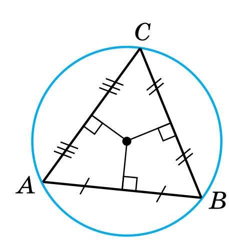


Мал. 30

Коло, описане навколо трикутника

Коло називають *описаним навколо трикутника*, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника. Водночас трикутник називають *вписаним у коло* (мал. 31).

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.



Мал. 31

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Повторюємо алгебру за 7 клас

11. 1615 р. **12.** 1710 р. **13.** 1) −11; 11; 2) рівняння не має розв'язків; 3) −1; 5; 4) 0,5; 5) −1; 0,2; 6) −10; 14. **14.** 8 см; 24 см; 20 см. **15.** 18 кг; 12 кг; 36 кг. **16.** 4,5. **17.** −3,5. **30.** 1) 16; 2) 25; 3) 1; 4) 81. **31.** 1) 9; 2) 10; 3) 1; 4) 2. **32.** 1) $-3x$; 2) $12 - 23a$. **33.** 1) $4m$; 2) $38x - 7$. **34.** 5. **35.** 8. **38.** 1) 0; 0,25; 2) −0,2; 3) −1; 3. **39.** 1) 0; −0,5; 2) $\frac{1}{6}$; 3) −5; 1. **42.** $m^4 - m^3 - 4m^2 + 13m - 15$. **43.** 1) 2,5; 2) 7,5; 3) −25; 4) 125. **44.** 1) 1,4; 2) 5,6; 3) −49; 4) 343. **57.** 1) (0; −4); (8; 0); 2) (0; 16); (4; 0); (−4; 0). **58.** 1) (0; 3); (1,5; 0); 2) (0; 0); (−2; 0). **71.** 12 кг; 16 кг. **73.** 1) (12; 0); (0; −8); 2) (0; 3); 3) (−3; 0). **74.** 1) (10; 0); (0; 8); 2) (−8; 0); 3) (0; 2). **75.** 1) $a = -3$; $b = 2$; 2) (4; 3); 3) (−2; 3). **76.** 1) $m = 2$; $n = -1$; 2) (3; 0); 3) (3; −1). **77.** 18 км/год; 2 км/год. **78.** $y = 9 - 2x$. **79.** $y = 3x + 11$. **80.** 30 грн; 25 грн.

Тема 1

§ 1

1.7. 7) x – будь-яке число; 8) $m \neq 0$. **1.11.** 3) −1,92; 4) −41,2. **1.13.** 2) $x = -3$; 3) $x = 1$ і $x = -7$; 4) немає таких значень x. **1.14.** 2) $y = -1$; 3) $y = -2$ і $y = 3$; 4) немає таких значень y. **1.15.** 1) $a \neq 1$; $a \neq -3{,}5$; 2) $t \neq 0$; $t \neq 7$; 3) $m \neq 5$; $m \neq -5$; 4) $x \neq 9$. **1.16.** 1) $p \neq 9$; $p \neq -2{,}5$; 2) $a \neq 0$; $a \neq 5$; 3) $c \neq 2$; $c \neq -2$; 4) $a \neq -1$. **1.18.** 1) $a \neq 2$; $a \neq 3$; 2) $x \neq 1$; $x \neq -1$; 3) $m \neq 0$; $m \neq 1$; 4) $k \neq 6$; $k \neq -2$. **1.19.** 1) $x \neq -2$; $x \neq 4$; 2) $m \neq 4$; $m \neq -4$; 3) $x \neq 0$; $x \neq -1$; 4) $a \neq 1$; $a \neq -5$. **1.29.** 18 хв. **1.30.** 9.

§ 2

2.16. 1) $-\frac{1}{m}$; 2) $-\frac{3m}{2n}$; 3) $m + 3$; 4) $\frac{5}{a-2}$; 5) $\frac{3+n}{7}$; 6) $\frac{m+n}{m-n}$. **2.17.** 4) $\frac{m-n}{5-a}$. **2.18.** 3) $\frac{9x+9y}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{4k^2+4k+4}{k^3-1}$; 5) $-\frac{a}{b-a}$; 6) $-\frac{p^2+2p}{4-p^2}$. **2.20.** 3. **2.21.** 12 століття. **2.22.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$; 3) $\frac{9(b-3c)}{5}$. **2.23.** 1) 2; 2) $\frac{(a-b)(a^2+b^2)}{a^2-ab+b^2}$; 3) $\frac{1}{8(3m+n)}$. **2.24.** 1) Графіком є пряма $y = \frac{x}{6}$ з «виколотою» точкою (−6; −1); 2) графіком є пряма $y = 2 - x$ з «виколотою» точкою (2; 0). **2.25.** 1) $y = -\frac{x}{5}$ з «виколотою» точкою (5; −1); 2) $y = 3 + x$ з «виколотою» точкою (−3; 0). **2.30.** 29 584 952 та 13 175 564. **2.31.** 12 год.

§ 3

3.14. 1) $\frac{m-2}{m+2}$; 2) $\frac{3}{c}$. **3.15.** 1) $\frac{a-3}{a+3}$; 2) $\frac{2}{m}$. **3.17.** 1) 15; 2) 2025. **3.18.** 1) –2; 2) 198. **3.19.** 3) $x-\frac{3}{x+5}$; 4) $4+\frac{7}{a-b}$. **3.20.** 3) $y+\frac{2}{y+1}$; 4) $5-\frac{1}{p-q}$. **3.21.** 1) $\frac{1}{m-2}$; 2) $\frac{3}{a-2}$; 3) $\frac{m}{n-3}$. **3.22.** 1) $\frac{1}{3-a}$; 2) $\frac{5}{m-3}$; 3) $\frac{p}{q-4}$. **3.24.** $\frac{x-y-z}{x+y+z}$. **3.27.** 1) 144 см/год. **3.28.** *Порада.* Розгляньте суму $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\ldots+(a_7-b_7)$.

§ 4

4.24. $\frac{5n}{n^2-m^2}$; 2. **4.27.** 1) $\frac{4}{ab}$; 2) $\frac{m+x}{x}$; 3) $\frac{1}{x(x-2)}$; 4) $\frac{b^2+3ab+9a^2}{ab}$. **4.28.** 1) $-\frac{2}{ab}$; 2) $\frac{t-a}{a}$; 3) $\frac{2}{a(a-3)}$; 4) $\frac{n^2+2mn+4m^2}{mn}$. **4.30.** 1) $-\frac{2n^2}{m+n}$; 2) $\frac{p^2-4p}{p-2}$; 3) $\frac{1}{1-a^2}$; 4) $\frac{10p+3}{2p-3}$. **4.33.** 1) $\frac{1}{x+1}$; 2) $\frac{5}{m-5}$; 3) $\frac{m-6}{6m}$; 4) $\frac{1}{2(a-3)}$. **4.38.** 1) $\frac{2x^3}{(x-y)(x+y)^2}$; 2) $\frac{16}{(x-2)^2(x+2)^2}$. **4.39.** $a=8$. **4.40.** *Порада.* Після спрощень отримаємо a^2+4. **4.42.** Графіком функції є пряма $y=4$ з «виколотою» точкою (2; 4). **4.43.** 18 років. *Порада.* Після спрощень отримаємо $-\frac{8}{6a+b}$. **4.44.** 5. *Порада.* Після спрощень отримаємо $-\frac{5}{5x+y}$. **4.45.** Ні. *Порада.* Після спрощень отримаємо $-\frac{1}{2x}$. **4.48.** 1) 4; 2) 2; 3) 10; 4) 5. **4.49.** 1) 133 кг, 2660 кг; 2) 2394 м^2. **4.50.** 5.

Вправи для повторення теми 1

4. –0,1. **5.** 1) x – будь-яке число; 2) $m<0$; 3) $a\neq 0$, $a\neq 1$; $a\neq -1$; 4) $x\neq 2$; $x\neq 5$. **6.** 1) 1; 2) немає таких значень x; 3) –2; 4) $0<x<3$ або $x>3$. **10.** 1) 1; 2) 0. **14.** 2. **16.** $\frac{z-x-y}{x+y+z}$. **20.** 1) $\frac{3}{b+2}$; 2) $\frac{1}{m-1}$. **21.** $a=-3$. **22.** *Порада.* Значення виразу дорівнює 3. **23.** 1) $\frac{4m-1}{4m+1}$; 2) $\frac{2x-1-4x^2}{2x+1}$. **24.** *Порада.* Після спрощення виразу матимемо $\frac{1}{(x-2)^2}$. **25.** 1) 1; 2; 2) 1; 2; 3; 6; 3) 1; 16. **26.** *Порада.* Графіком функції є пряма $y=x+1$ з «виколотою» точкою (1; 2). **32.** *Порада.* Вираз тотожно дорівнює 1. **33.** 1) 0; 2) $\frac{8}{3-2x}$; 3) $\frac{3x-2y}{xy}$; 4) $\frac{2a+1}{6(2a-1)}$; 5) $\frac{6(x+1)}{x^2+x+1}$; 6) $\frac{2a}{(1-3b)(a+2)}$. **36.** 1) $a=-24$; $b=-6$; 2) $a=3$; $b=-3$. **37.** $\frac{2sv}{v^2-9}$; 8 год.

Повторюємо геометрію за 7 клас

14. 1) 70°, 110°; 2) 80°, 100°. **15.** 1) 60°, 120°; 2) 40°, 140°. **16.** Вінниця. **17.** 1) 20°; 2) 15°. **18.** 1) 30°; 2) 130°. **19.** 1) 145°, 35°; 2) 100°, 80°. **20.** 1) 75°, 105°; 2) 108°, 72°. **21.** Ні. **38.** 7 см; 21 см; 17 см. **39.** 8 см; 11 см; 16 см. **41.** Пилип Орлик. **42.** 40°, 60°, 80°. **43.** 1) 32°, 58°; 2) 40°, 50°. **44.** 1) 75°, 15°; 2) 54°, 36°. **45.** 36 см. **46.** 24 см. **47.** 44°, 68°, 68° або 52°, 52°, 76°; слід розглянути два випадки. **48.** Ні. **59.** 20°. **60.** 42°. **61.** 65°. **62.** 140°. **63.** 1) 40 см, 24 см; 2) 10 см, 6 см. **64.** 4 см. **65.** 24 см. **66.** 20 см. **67.** 50°, 65°, 65° або 130°, 25°, 25°, задача має два розв'язки.

Тема 2

§ 5

5.16. 10 см, 12,5 см, 20 см, 22,5 см. **5.17.** 60°, 75°, 105°, 120°. **5.18.** 105°, 75°, 90°. **5.19.** 21 см, 9 см, 6 см. **5.22.** Так, якщо чотирикутник неопуклий. **5.23.** Два розв'язки. **5.24.** Два розв'язки. **5.26.** 6 см. **5.28.** 70°, 70° і 40° або 70°, 55° і 55°. **5.29.** 10 см. **5.33.** Ярослав; на 90 с. **5.34.** $n = 4$.

§ 6

6.9. Вірченко. **6.16.** 14 см. **6.21.** 96°, 84°. **6.22.** 34 см. **6.23.** $BP = 4$ см, $PC = 8$ см. **6.29.** 28 см. **6.30.** 24 см. **6.31.** 40°. **6.32.** 110°. **6.33.** 7 см, 13 см. **6.34.** 9 см, 30 см. **6.35.** 1) 75°; 2) 105°. **6.36.** 1) 96°; 2) 84°. **6.39.** 9 см. **6.41.** Ні. **6.43.** 1) 192 т; 2) 1 152 000 грн.

§ 7

7.11. Баюл. **7.18.** 1) 55°; 2) 50°. **7.19.** 1) 30°; 2) 40°. **7.20.** 160°. **7.21.** 40°. **7.24.** 52 см. **7.25.** 60 см. **7.26.** 48 дм. **7.27.** 1) $DB = 4a$, $AB = 2a$; 2) $AK = \frac{m}{4}$, $CD = \frac{m}{2}$. **7.28.** $BD = 2b$, $OK = \frac{b}{2}$. **7.29.** 50 см. **7.30.** 40 см. **7.32.** 1) 60°; 2) 90°. **7.33.** *Порада*. Побудуйте паралелограм, одна з вершин якого точка B, дві інші лежать на сторонах кута, а точка P є точкою перетину діагоналей. **7.35.** 10 сходинок. **7.36.** Ні.

§ 8

8.23. 80° і 100°. **8.24.** 72° і 108°. **8.29.** 70° і 110°. **8.30.** 130° і 50°. **8.31.** 1) 60°, 120°; 2) $4a$ см. **8.32.** 1) 60°, 120°; 2) $4b$ см. **8.35.** 60 см. **8.37.** 10 см. **8.38.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **8.39.** Паралелограм. **8.41.** 1) 9 рулонів; 2) 1539 грн. **8.42.** *Порада.* Розгляньте $\triangle AMK$, де MK – діаметр кола.

§ 9

9.19. 24 см. **9.20.** 4 см. **9.24.** $2b$ см. **9.25.** 9 см. **9.28.** $\angle A = 20°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$, $\angle D = 200°$. Неопуклий. **9.29.** $AB = 15$ см, $AD = 40$ см. **9.31.** Так. **9.33.** $65\frac{5}{11}$ хв.

Вправи для повторення теми 2

5. 60°, 70°, 110°, 120°. **12.** Ні. **13.** *Порада.* Доведіть, що $ABNM$ – паралелограм. **14.** Три. **17.** 4 см, 10 см. **23.** 24 см. **24.** 12 см, 16 см. **25.** $\frac{a}{2}$ см. **26.** 46 см або 38 см. **31.** Усі сторони по $\frac{m}{4}$ см. **32.** 100° і 80°. **33.** 1) 30°, 150°; 2) 15°. **39.** Так. **40.** Квадрат. **41.** $2d$ см.

Тема 3

§ 10

10.13. 1955 р. **10.14.** 1975 р. **10.19.** 1) $\frac{(m-2)(m-3)}{3(m+3)}$; 2) $\frac{(x-5)(x+3)}{x+5}$. **10.20.** 1) $\frac{7(a+4)}{(a-1)(a-4)}$; 2) $\frac{(y-2)(y-3)}{y+3}$. **10.23.** 1) $\frac{y}{2}$; 2) $\frac{x+y}{x-y}$. **10.24.** 1) $\frac{n^2}{2}$; 2) $\frac{m-n}{m+n}$. **10.25.** 1) 0; 2) 9,6. **10.26.** 1) $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2$; 2) $\frac{5(c-y-1)}{3(a+b+1)}$. **10.27.** 0. **10.32.** 480 тис. грн. **10.33.** 1) Так; 2) ні.

§ 11

11.11. 15 місяців. **11.12.** 110 год. **11.13.** 1) $\frac{3c}{4ab}$; 2) $\frac{a}{c^3}$; 3) $\frac{c^4}{3}$; 4) $\frac{b}{2a^5}$. **11.14.** 1) $\frac{2a}{c^6}$; 2) $\frac{3x}{y}$. **11.15.** 1) $\frac{2a+1}{2a-3}$; 2) $\frac{1}{2-x}$; 3) $\frac{7(y-5x)}{y}$; 4) $1\frac{1}{3}$. **11.16.** 1) 1; 2) −5. **11.17.** 1) 0,1; 2) 5,032. **11.18.** $\frac{a-8}{a-5}$. **11.20.** $\frac{2a-3}{a-6}$. **11.21.** $\frac{c+y}{b-2}$. **11.23.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 0. **11.25.** 23 832 грн. **11.26.** 45 партій.

§ 12

12.1. 1) 4; 2) $\frac{n}{x+3}$; 3) $\frac{2a}{2a+b}$; 4) $\frac{xy}{x+y}$. **12.2.** 1) 2; 2) $\frac{a}{3-b}$; 3) $\frac{2x}{3x-y}$;

4) $\frac{mn}{n-m}$. **12.3.** 18 год. **12.4.** 1) $\frac{x+7}{7x}$; 2) $\frac{3n+m}{3n-m}$; 3) $-3a-5$; 4) $\frac{5x}{3}$. **12.5.** 1) $\frac{m-5}{5m}$; 2) $\frac{y-x}{y+x}$; 3) $7-2b$; 4) $\frac{m}{2}$. **12.8.** 1) -2; 2) $\frac{a-3}{2(a+3)}$. **12.9.** 1) 2; 2) $\frac{a-2}{a+2}$. **12.10.** 1) 3; 2) 4. **12.11.** 1) 2; 2) 2. **12.14.** 1) $-\frac{1}{1+a}$; 2) 4. **12.15.** 1) $\frac{1}{2-a}$; 2) 2. **12.19.** 3) $\frac{2x^6+2y^6}{x^4y^4}$; 4) $\frac{4a^2-4b^2}{ab}$. *Порада*. Спочатку розкрити квадрати суми та різниці. **12.20.** 2) $\frac{4m}{n^2}$. **12.21.** 1) $\frac{x-1}{x+1}$; 2) 1; 3) p; 4) $3-c$; 5) $\frac{x+1}{x-1}$; 6) $\frac{m}{n}$. **12.22.** 1) $\frac{m+4}{m-4}$; 2) 1; 3) t; 4) $\frac{1}{x-1}$; 5) $\frac{2+m}{2-m}$; 6) $\frac{x}{2}$. **12.23.** *Порада*. Значення виразу дорівнює 2. **12.24.** 1. **12.25.** 51. **12.26.** 7. **12.27.** 1) $\frac{2x-1}{2x(2x+1)}$; 2) $\frac{1}{2}$. **12.29.** *Порада*. Значення виразу дорівнює $\frac{1}{(m+1)^2}$. **12.30.** 1) $1-x^2-x$; 2) $\frac{m^3}{m^3-m+1}$. **12.31.** 1) x^2+2x+1; 2) $\frac{n^2}{n^3-n+1}$. **12.39.** 180 год. **12.40.** 11.

§ 13

13.14. $\frac{10}{15}$. **13.15.** $\frac{3}{15}$. **13.16.** 2. **13.17.** 3. **13.18.** 1) 2; 2) 3; 3) -5; 4) 9. **13.19.** 1) 1; 2) -2; 3) 2; 4) -3. **13.20.** Ні, корінь першого рівняння 3, а другого – 0. **13.21.** Ні, корінь першого рівняння 4, а другого – 0. **13.22.** $\frac{4}{9}$. **13.23.** $\frac{2}{5}$. **13.24.** 1) -4; 2) коренів немає. **13.25.** 1) -4; 2) коренів немає. **13.26.** 1) -4; 2) коренів немає. **13.27.** 1) -1; 2) коренів немає. **13.28.** 1) $a=0$; $a=4$; 2) $a=1$; $a=4$. **13.29.** $a=3$; $a=1$. **13.30.** $\frac{10(x-2)}{x}$; 9 медалей. **13.31.** $\frac{2a-b}{2a+b}$. **13.33.** 21 грн.

Вправи для повторення теми 3

6. 1) $\frac{5xt^{10}}{3}$; 2) a^2-b^2. **7.** $\frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}$. **8.** *Порада*. Значення виразу дорівнює 1. **9.** *Порада*. Значення виразу дорівнює $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$.

13. 1) $\frac{1}{3-x}$; 2) $\frac{2(5x-2y)}{5(5x+2y)}$. **14.** $\frac{a^2}{a^2-2a-15}$. **15.** *Порада*. Після спрощення виразу отримаємо $-\frac{2(x+y)^2}{x^2}$. **16.** 0. **17.** *Порада*. $a^2+5a+4=$ $=a^2+a+4a+4=a(a+1)+4(a+1)=(a+1)(a+4)$. **18.** 1) $\frac{3}{a}$; 2) $-\frac{3m}{m+3}$; 3) $\frac{2}{a-b}$; 4) $p-1$. **20.** 1) $\frac{1}{(a+b)^2}$; 2) $\frac{6}{a+3}$. **21.** $1\frac{11}{14}$. **22.** *Порада*. 1) Після спрощень отримаємо 3; 2) після спрощень отримаємо −1. **24.** 5 або −5. **25.** $\frac{1}{x^2-4}$. **26.** *Порада*. Після спрощень отримаємо x^2+4. **27.** *Порада*. Після спрощень отримаємо $\frac{1}{m+5}$. **28.** Ні, оскільки після спрощень матимемо $\frac{1}{x}$. **31.** 2. **32.** 4) 0. **33.** 18 км/год. **34.** 1) −0,5; 2) −2,5. **35.** 12 днів, 24 дні. **36.** 1) Якщо $a=0$, то коренів немає; якщо $a\neq 0$, то $x=\frac{a}{5}$; 2) якщо $a=b$, то коренів немає; якщо $a\neq b$, то $x=\frac{a-b}{2}$.

Тема 4

§ 14

14.14. 1) Так; 2) ні. **14.15.** 1) Так; 2) ні. **14.16.** Ні. **14.24.** Рівнобічна. **14.25.** 8 см. **14.26.** 36 см. **14.27.** 70° і 110°. **14.28.** 40° і 140°. **14.31.** 9 см і 5 см. **14.33.** 60° і 120°. **14.34.** 72° і 108°. **14.36.** 2 : 1. **14.37.** 2 : 1. **14.38.** *Порада*. Нехай $AD=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AB=d$. Через вершину C проведіть $CM \parallel AB$, $M \in AD$. Тоді $MD=a-b$. $\triangle CMD$ можна побудувати. **14.40.** 20 см. **14.43.** 1) 17,2 м; 2) 860 грн. **14.44.** У точці перетину діагоналей чотирикутника.

§ 15

15.8. 4 см. **15.9.** 20 дм. **15.12.** $5R$. **15.13.** $180°-\alpha$, $180°-\alpha$, $2\alpha-180°$. **15.14.** $\frac{\alpha}{2}$, $90°-\frac{\alpha}{4}$, $90°-\frac{\alpha}{4}$, або $180°-\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{4}$. **15.16.** 48 мішків.

§ 16

16.9. $A_1A_2=A_2A_3=12$ см, $B_1B_2=B_2B_3=20$ см. **16.10.** $ON_2=42$ см, $OM_2=24$ см. **16.12.** *Порада*. Проведіть через точки E, F, D прямі, паралельні CG. **16.13.** *Порада*. Проведіть через точки M і D прямі, паралельні BN. **16.14.** 1 : 2. *Порада*. Проведіть через точку D пряму, паралельну BM. **16.16.** 10 см і 14 см. **16.17.** 17,9 м². **16.18.** *Порада*. Врахуйте, що сума кутів неопуклого чотирикутника $APBC$ дорівнює 360°.

§ 17

17.14. 40 см, 30 см, 50 см. **17.15.** 16 см, 36 см, 28 см. **17.16.** 12 см і 18 см або 12 см і 8 см. **17.17.** 26 см. **17.18.** 20 см. **17.22.** $4a$ см. **17.23.** 5 см. **17.25.** 6 см. **17.26.** 12 см. **17.28.** 28 см. **17.29.** 1) $a - b$; 2) $3a - b$; 3) $a = 3b$. **17.30.** 600 000 м^3. **17.31.** Ні.

§ 18

18.7. Кравець. **18.15.** 21 см і 25,5 см. **18.16.** $BC = 4$ см, $AD = 20$ см. **18.17.** 7 см. **18.18.** 10 см. **18.19.** 3 см. **18.20.** 13 см. **18.21.** 3 см, 4 см, 3 см. **18.22.** 14 см і 30 см. **18.23.** 9 см. **18.24.** 44 см. **18.25.** 32 см. **18.27.** $4a$ см. **18.28.** 10 см. **18.32.** 1) $m = 180t$; 2) на 1,5 год.

Вправи для повторення теми 4

5. 80°, 100°. **7.** m см. **8.** 36 см. **9.** $BC = 5$ см, $CD = 5$ см. **10.** 19 см. **11.** 72° і 108°. **12.** *Порада.* Проведіть через одну з вершин меншої основи трапеції пряму, паралельну діагоналі, до перетину з прямою, що містить більшу основу. Побудуйте трикутник, дві сторони якого – діагоналі трапеції, а третя – сума основ. Добудуйте цей трикутник до шуканої трапеції. **13.** 36 см. **17.** 30°. **18.** 60°, 80°, 120°, 100°. **19.** 62°. **20.** $6a$ см. **31.** 10 см і 14 см. **32.** 36 см, 18 см. **34.** Квадрат, $P = 2d$ (см). **38.** 18 см, 16 см, 14 см. **39.** 12 см і 24 см. **40.** 6 см і 30 см. **41.** 5 : 2. **43.** $\left(a - \frac{c}{2}\right)$ см.

Тема 5

§ 19

19.14. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $-1{,}5$; 4) -11; 5) 0,5; 6) $\frac{35}{192}$; 7) 1,4; 8) $-\frac{3}{64}$; 9) $2\frac{33}{64}$; 10) 0,064; 11) 14; 12) $\frac{88}{125}$. **19.15.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $-1\frac{1}{3}$; 3) -699; 4) 19; 5) $-\frac{3}{50}$; 6) $\frac{7}{8}$; 7) $\frac{5}{16}$; 8) $-\frac{29}{216}$. **19.16.** 2700 м. **19.18.** 1) $a^n > 0$; 2) $a^n > 0$; 3) $a^n < 0$. **19.20.** 1) $\frac{m^2n^2a^4}{cx^3p^3}$; 2) $\frac{25x^3mb^2}{a}$. **19.21.** 1) $3x^2p^{-1}$; 2) $15mn^{-2}c^{-3}$; 3) $2xb^{-5}(a-b)^{-2}$; 4) $(x+y)^7(x-y)^{-3}$. **19.23.** 3) $\frac{(mn+1)^2}{mn}$; 4) $\frac{ab}{b-a}$. **19.24.** 2) $\frac{y+x}{xy}$. **19.25.** 1) $\frac{24}{49}$; 2) $5\frac{11}{49}$. **19.26.** $4\frac{2}{5}$. **19.27.** $\frac{3x^2-1}{x^2}$. **19.29.** 10 грн у Сергія; 14 грн в Олексія. **19.33.** Найнижчий – модель A ($R = 16$), найвищий – модель B ($R = 22$). **19.34.** 3; 2; 5,11 долара.

§ 20

20.18. 1) $(4m^{-1})^3$; 2) $(0,1p^{-4})^2$; 3) $(0,05c^{-4}p^6)^2$; 4) $\left(\frac{3}{2}c^3x^{-5}\right)^4$. **20.19.** 1) 625; 2) $\frac{1}{10}$; 3) 3; 4) 49. **20.20.** 1) 16; 2) $\frac{1}{4}$. **20.21.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) 49; 5) $-\frac{1}{6}$; 6) 2. **20.22.** 1) 4; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) 36; 5) $\frac{1}{100}$; 6) $\frac{1}{25}$. **20.23.** 72 м. **20.24.** 1) $7a^5b^{-2}$; 2) $-2x^{-18}y^3$. **20.25.** 1) $\frac{a^3}{2b^3}$; 2) $-\frac{2a^5}{5x^8}$. **20.26.** 1) $7m^2n^{-2}$; 2) $-\frac{x^2}{3c^2}$. **20.29.** 1) 125; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{a^{2n}}{b^4}$. **20.30.** 1) 49; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{x^{6m}}{y^6}$. **20.31.** 1) $2\cdot 5^n$; 2) x^8; 3) $\frac{1}{m^2}$. **20.32.** 1) $\frac{6}{4^n}$; 2) x^8; 3) $\frac{1}{b^3}$. **20.34.** 24 грн, 32 грн. **20.37.** Купити велокуртку й светр, після цього велотуфлі зі знижкою 10 %; 6380 грн, економія буде 120 грн. **20.38.** $x = 3$; $y = 3$.

§ 21

21.25. 31 %. **21.26.** $\approx 1{,}3666\cdot 10^8$ с або 1582 доби. **21.29.** $2^{239} \approx 8{,}83 \times \times 10^{71}$ бактерій. **21.30.** 1) –16; 2) –23; 3) –11; 4) –15. **21.31.** 1) 18; 2) 13; 3) 12; 4) 10. **21.32.** 1) 1; 2) 180. **21.33.** $a = -4$, $a = -1$. **21.37.** 1) 12 л, 360 л; 2) більше ніж на 3,5 доби. **21.38.** 108.

§ 22

22.16. $y = -\frac{48}{x}$. **22.17.** $y = \frac{14}{x}$. **22.18.** $2 \leqslant y \leqslant 8$. **22.19.** 1) 4; 2) –3; 3; 3) –1; 4. **22.20.** 1) 2; 2) –2; 2; 3) –1; 5. **22.24.** *Порада*. 1) Після спрощень одержимо $y = \frac{2}{x}$; 2) графіком є гіпербола $y = -\frac{6}{x}$ з «виколотою» точкою (3; –2). **22.27.** $\frac{1}{81}$. **22.28.** 7280 грн. **22.29.** –1.

Вправи для повторення теми 5

6. 1) $7^{-3} > (-7)^3$; 2) $(-1,2)^0 > (-5)^{-5}$; 3) $(-13)^{-4} > (-13)^4$; 4) $(-12)^6 > 12^{-6}$. **7.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) –0,16; 3) –10; 4) –99. **8.** 1) $\frac{a^2-a+1}{a^3(1+a)}$; 2) –1. **9.** 1. **10.** $x = -3$. **11.** a^8b^8. **16.** 30. **19.** 1) $x(x^2 + 5x^{-1} + x^{-6})$; 2) $x^{-1}(x^4 + 5x + x^{-4})$; 3) $x^{-3}(x^6 + 5x^3 + x^{-2})$. **24.** $6{,}35\cdot 10^4$ км². **25.** 1) $3{,}6\cdot 10^3$ с; 2) $8{,}64\cdot 10^4$ с; 3) $2{,}592\cdot 10^6$ с; 4) $3{,}1536\cdot 10^7$ с; 5) $3{,}15576\cdot 10^9$ с. *Порада*. Врахувати, що в будь-якому столітті 25 високосних років і 75 – невисокосних. **29.** 1) Ні; 2) так. **32.** (2; 2) і (–2; –2). **33.** (3; –3) і (–3; 3).

Тема 6

§ 23

23.10. $OB = 6$, $BD = 9$. **23.11.** $OA = 2{,}5$, $AC = 3{,}5$. **23.12.** 2 : 3. *Порада*. Проведіть через точку P пряму, паралельну CM. **23.13.** 5 : 6. *Порада*. Проведіть через точку D пряму, паралельну BM. **23.14.** 16 см. **23.15.** 3 : 4. **23.19.** 1) 24 000 л. **23.20.** 9.

§ 24

24.9. В'язовська. **24.10.** 1) 10 см, 12 см; 2) 15 см, 18 см, 27 см; 3) 25 см, 30 см, 45 см. **24.12.** 4 см, 6 см, 8 см і 6 см, 9 см, 12 см. **24.13.** 12 см, 16 см, 20 см і 9 см, 12 см, 15 см. **24.17.** 4 робітники. **24.18.** Ні.

§ 25

25.21. 1,5 м. **25.24.** Так. **25.25.** Так. **25.28.** $AD = 28$ см, $BC = 16$ см. **25.29.** $BO = 2{,}5$ см, $OD = 5{,}5$ см. **25.30.** 1) Так; 2) так; 3) 3 см. **25.31.** $3\frac{1}{3}$ см. **25.32.** 24 см. **25.33.** $\triangle ABC \sim \triangle BDC$. **25.34.** $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. **25.35.** 15 м. **25.36.** 20 см, 35 см, 35 см або 42 см, 24 см, 24 см. **25.37.** 30 см, 48 см, 48 см або 35 см, 35 см, 56 см. **25.40.** 9 см. **25.41.** 3 см. **25.42.** $\frac{ab}{a+b}$ см. **25.43.** 7,5 см і 4,5 см. **25.44.** 5 см і 10 см. **25.45.** 6 см. **25.46.** 4,2 см. **25.49.** $2a$ см. **25.51.** 1,2 м. **25.52.** Так; 15°.

§ 26

26.14. 24 см. **26.15.** 24 см. **26.16.** 30 см і 40 см. **26.17.** 12 см. **26.18.** 2 см. **26.19.** 3 см. **26.20.** 6 см. **26.21.** 12 см. **26.22.** 36 см. **26.24.** Так. **26.26.** 320 кг.

§ 27

27.6. 7 см. **27.7.** 9 см. **27.8.** $BL = 10$ см, $LC = 8$ см. **27.9.** 21 см. **27.10.** 90 см. **27.11.** 36 см. **27.12.** 10 см і 14 см. **27.13.** $AL = 12$ см, $LB = 8$ см. **27.14.** b і $a - b$. **27.15.** Ні. **27.16.** *Порада*. Доведіть, що $\triangle CHB \sim \triangle AHC$. **27.17.** 48 мішків.

§ 28

28.9. 15 см. **28.10.** 9 см. **28.11.** 9 м. **28.12.** 2 м. **28.13.** 42 м. **28.14.** 20 см. **28.15.** 16 см. **28.16.** 8 см. **28.17.** 6 см. **28.18.** 5 см. **28.19.** 26 см. **28.20.** 26 см. **28.21.** 10 см. *Порада*. Використайте формулу $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$ із приклада 2, § 28. **28.26.** 12 см, 16 см, 24 см. **28.27.** $\frac{a^2 - b^2}{4}$. **28.28.** 1) 17,28 м^2; 2) ≈ 3,456 кг фарби; по одній банці 1 кг і 2,5 кг. **28.30.** 1) Ні; 2) ні.

Вправи для повторення теми 6

4. 9 : 4. *Порада*. Проведіть через точку E пряму, паралельну AD. **7.** 1) 52 см; 2) 65 см. **8.** Так. **16.** 15 см. **19.** 30 см. **24.** $BM = 20$ см, $P = 80$ см. **25.** 70 см. **26.** 16 см і 12 см. **27.** 13 см і 5 см. **30.** 42 см. **31.** 14 см і 16 см. **32.** $\angle ACD < \angle BCD$. **33.** 36 см, 36 см, 18 см. **37.** $AK = 5$ см, $AP = 20$ см, $KP = 15$ см. **38.** $8\frac{2}{3}$ см. **39.** $AB = 6$ см, $BC = 7{,}5$ см.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ роботи \ № завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	В	Б	Г	В	А	Б	Б	А	В	Г	В	А	1–Б; 2–А; 3–В
2	Б	В	В	А	Г	Б	Г	В	В	Б	Б	Г	1–В; 2–Г; 3–А
3	Б	Г	А	В	Б	А	В	Г	В	А	Г	В	1–В; 2–А; 3–Г
4	Б	В	Б	Г	Б	А	В	Г	В	Б	А	Г	1–Г; 2–В; 3–А
5	А	Г	Б	В	Б	А	В	Б	В	Г	В	Б	1–В; 2–А; 3–Б
6	Б	Г	В	В	Б	А	Г	Б	А	В	В	А	1–Г; 2–А; 3–В

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

АЛГЕБРА

ГЕОМЕТРІЯ

ЗМІСТ

Тема 4. ТРАПЕЦІЯ. ТЕОРЕМА ФАЛЕ́СА

Тема 5. СТЕПІНЬ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

Тема 6. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ