Олександр Істер

ГЕОМЕТРІЯ

Частина 1

Навчальний посібник
для 8 класу
закладів загальної середньої освіти, які беруть участь
в інноваційному освітньому проєкті всеукраїнського
рівня за темою «Розроблення і впровадження
навчально-методичного забезпечення для закладів
загальної середньої освіти в умовах реалізації
Державного стандарту базової середньої освіти»
у 2024/2025 навчальному році

Схвалено для використання
в освітньому процесі

Відповідає модельній навчальній програмі **«Геометрія. 7-9 класи»**
для закладів загальної середньої освіти (авт.: *Істер О. С.*)

Київ
«Генеза»
2024

Шановні восьмикласниці й восьмикласники!

У цьому навчальному році ви продовжите вивчати геометрію, а підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам у цьому. Вивчаючи теоретичний матеріал, зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Так виділено нові, незнайомі поняття.

У підручнику є такі умовні позначення:

– пригадай (раніше вивчене);

– зверни особливу увагу;

– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

113 – завдання для класної і 115 – домашньої роботи;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв’язування інших задач);

– теорема;

– наслідок з теореми;

■ – кінець доведення теореми або задачі;

– рубрика «Україна – це ми»;

– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;

– рубрика «Життєва математика»;

– вправи для повторення;

– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

– рубрика «Головне в розділі».

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так: з позначок 1, 2, 3, 4, * починаються вправи відповідно початкового, середнього, достатнього, високого рівнів та підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «**Домашньої самостійної роботи**», які подано в тестовій формі, та «**Завдання для перевірки знань**». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, стисло теоретичний матеріал (рубрика «**Головне в розділі**»), а в кінці підручника – «**Завдання для перевірки знань за курс геометрії 8 класу**» та «**Задачі підвищеної складності**». Заняття геометрією стануть ще цікавішими, якщо ви розв’язуватимете вправи рубрики «**Цікаві задачі для учнів неледачих**».

У рубриці «**Життєва математика**» зібрано задачі, пов’язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, – усім тим, що знадобиться кожному в повсякденному житті. У рубриці

«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу» пропонується виконати вправи, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми.

Пригадати раніше вивчене вам допоможуть **«Відомості з курсу геометрії 7 класу»** та **«Вправи на повторення курсу геометрії 7 класу»**, які розміщено в кінці підручника.

Автор намагався подати теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно доопрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У кінці підручника в додатку під назвою «Готуємося до ЗНО (НМТ)» подано добірку задач, що в різні роки пропонувалися абітурієнтам на зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, для розв'язання яких достатньо знань з геометрії за 8-й клас. Розв'язавши ці задачі, ви зробите ще один крок уперед для успішної підготовки до майбутніх випробувань, які чекатимуть на вас під час вступу до омріяного закладу вищої освіти.

Цікаві факти з історії розвитку геометрії як науки ви знайдете в рубриці **«А ще раніше...»**.

Бажаю успіхів на шляху до знань!

Шановні вчительки та вчителі!

Підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на факультативних та індивідуальних заняттях, під час підготовки до математичних змагань.

Додаткові вправи в *«Завданнях для перевірки знань»* призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Правильне їх розв'язання вчитель/ка може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів та задачі з додатка «Готуємося до ЗНО (НМТ)» можна запропонувати учням, наприклад, під час уроків узагальнення або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року. Організувати повторення курсу геометрії 7 класу на початку навчального року та пригадати відповідний теоретичний матеріал можна, запропонувавши учням розв'язати «Вправи на повторення курсу геометрії 7 класу» та прочитати відповідні теоретичні відомості, які розміщено в кінці підручника.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати цей матеріал за підручником удома. Спочатку бажано, щоб вона прочитала теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього – розв'язати задачі та вправи, що їй під силу, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу геометрії 8-го класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

У кінці підручника *«Задачі підвищеної складності»* допоможуть вашій дитині поглибити знання з геометрії та підготуватися до математичних змагань.

ПОВТОРЮЄМО ГЕОМЕТРІЮ ЗА 7 КЛАС

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості. Взаємне розміщення прямих на площині

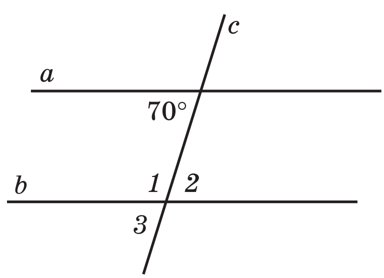
1

1. (*Усно.*) Який із поданих кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:
1) $\angle A = 32°$; 2) $\angle B = 90°$; 3) $\angle C = 150°$;
4) $\angle D = 59°\ 30'$; 5) $\angle K = 180°$; 6) $\angle N = 120°$;
7) $\angle L = 89°$; 8) $\angle M = 113°\ 20'$?

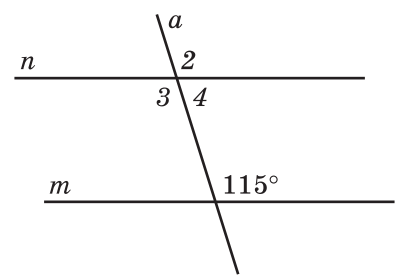
2. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) 25°; 2) 90°; 3) 116°.

3. Знайдіть кут, суміжний з кутом: 1) 140°; 2) 83°.

4. $a \parallel b$, c – січна (мал. 1). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.



Мал. 1



Мал. 2

5. $m \parallel n$, a – січна (мал. 2). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

2

6. Точка K належить відрізку CD. Знайдіть:
1) CD, якщо $CK = 28$ мм, $KD = 4$ см;
2) KD, якщо $CD = 5$ дм, $CK = 2$ дм 6 см.

7. Точка M належить відрізку AB. Знайдіть:
1) AM, якщо $AB = 5$ см, $MB = 34$ мм;
2) AB, якщо $AM = 3$ дм, $MB = 2$ дм 5 см.

8. Промінь OM проходить між сторонами кута BOC. Знайдіть градусну міру кута BOM, якщо $\angle BOC = 118°$, $\angle MOC = 72°$.

9. Промінь OK проходить між сторонами кута AOD. Знайдіть градусну міру цього кута, якщо $\angle AOK = 42°$, $\angle KOD = 37°$.

10. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 115°. Знайдіть інші кути та кут між прямими.

11. Накресліть відрізки KL і AB та промінь CD так, щоб відрізок KL був паралельний променю CD і перпендикулярний до відрізка AB.

12. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 75°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

13. Один з кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 130°. Знайдіть інші сім кутів.

14. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них:
1) на 40° менший від іншого; 2) становить 80 % від іншого.

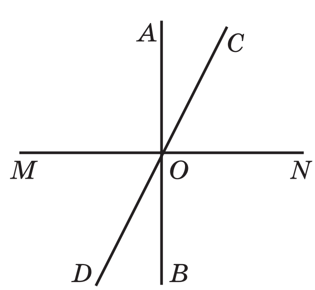
15. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:
1) удвічі більший за інший; 2) становить $\frac{2}{7}$ від іншого.

16. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте назву обласного центра України.

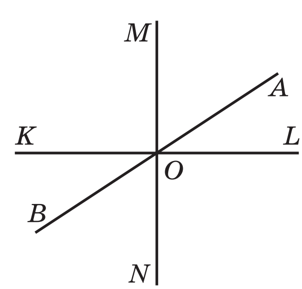
Точка K належить відрізку AB завдовжки 20 см. Знайдіть довжини відрізків AK і KB, якщо:	AK	KB
AK утричі менший від KB	В	Я
KB становить $\frac{2}{3}$ від відрізка AK	И	Н
$AK : KB = 3 : 7$	І	Ц

5 см	6 см	8 см	8 см	12 см	14 см	15 см

17. Прямі AB, MN і CD перетинаються в точці O, причому $AB \perp MN$ (мал. 3). Знайдіть:
1) $\angle DOB$, якщо $\angle CON = 70°$;
2) $\angle AOC$, якщо $\angle DON = 105°$.



Мал. 3



Мал. 4

18. Прямі MN, KL і AB перетинаються в точці O, причому $MN \perp KL$ (мал. 4). Знайдіть:
1) $\angle KOB$, якщо $\angle NOA = 120°$;
2) $\angle KOA$, якщо $\angle BON = 40°$.

19. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:
1) один із них утричі більший за другий;
2) один із них на 25 % більший за другий.

20. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох прямих січною, якщо:

1) один із них на 30° менший від другого;

2) їхні градусні міри відносяться як $3 : 2$.

4 **21.** Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими a і m. Чи можна стверджувати, що прямі b і m паралельні?

Трикутники. Ознаки рівності трикутників

1 **22.** (*Усно.*) Чи існує трикутник з кутами:

1) 60°, 60°, 61°; 2) 20°, 70°, 90°;

3) 10°, 100°, 70°; 4) 50°, 60°, 80°?

23. (*Усно.*) Чи існує трикутник зі сторонами:

1) 7 см, 2 см, 9 см; 2) 12 см, 10 см, 8 см;

3) 3 см, 4 см, 7 см; 4) 8 см, 8 см, 15 см?

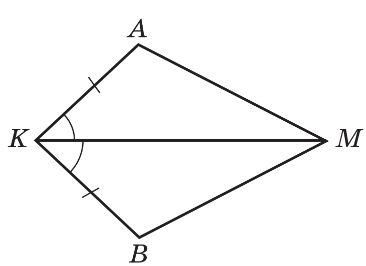
24. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 5 см, а бічна сторона на 2 см більша за основу.

25. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 10 см, а основа на 3 см менша від бічної сторони.

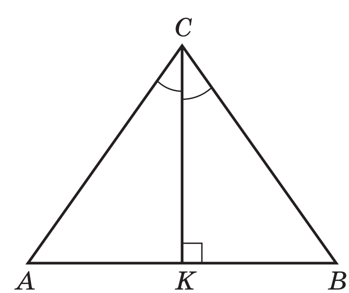
26. У трикутнику ABC, відрізок BK – медіана, $AK = 5$ см. Знайдіть KC і AC.

27. У трикутнику ABC відрізок CM – бісектриса, $\angle ACB = 80^\circ$. Знайдіть градусні міри, кутів ACM і BCM.

2 **28.** Доведіть, що $\triangle AKM = \triangle BKM$ (мал. 5), якщо $AK = BK$ і $\angle AKM = \angle BKM$.



Мал. 5



Мал. 6

29. Доведіть, що $\triangle ACK = \triangle BCK$ (мал. 6), якщо $CK \perp AB$ і $\angle ACK = \angle BCK$.

30. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

31. Знайдіть кут при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює 100°.

32. Зовнішній кут при вершині C трикутника ABC дорівнює 110°. Знайдіть кут A, якщо $\angle B = 60^\circ$.

33. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 130°. Знайдіть внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, якщо другий внутрішній кут, не суміжний з ним, дорівнює 80°.

34. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$), $\angle A = 60°$. Знайдіть:
1) AC, якщо $AB = 10$ см; 2) AB, якщо $AC = 4$ дм.

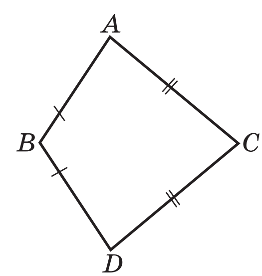
35. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$), $\angle A = 30°$. Знайдіть:
1) AB, якщо $BC = 8$ дм; 2) BC, якщо $AB = 16$ см.

36. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 6,3 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

37. Дві сторони трикутника дорівнюють 4,8 см і 2,6 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона трикутника?

38. Одна зі сторін трикутника утричі менша від другої і на 10 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 45 см.

39. Одна зі сторін трикутника на 3 см менша від другої і удвічі менша від третьої. Периметр трикутника дорівнює 35 см. Знайдіть сторони трикутника.



Мал. 7

40. На малюнку 7 $AB = BD$, $AC = CD$. Доведіть, що BC – бісектриса кута ABD.

41. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте ім'я та прізвище видатного українського політичного, державного і військового діяча. Дізнайтеся з інтернету про його біографію та досягнення.

У $\triangle ABC$: $\angle A = 60°$. Визначте градусні міри кутів B і C, якщо:	$\angle B$	$\angle C$
кут B на 20° менший від кута C	Л	О
кут B удвічі більший за кут C	Р	И
$\angle B : \angle C = 1 : 3$	П	К

30°	40°	50°	40°	30°

70°	80°	50°	40°	90°

42. Один із кутів трикутника на 20° менший від другого й удвічі менший від третього. Знайдіть кути трикутника.

43. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один із них на 26° більший за інший;
2) один із них становить 80 % від іншого.

44. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один із них у 5 разів більший за інший;
2) їхні градусні міри відносяться як 3 : 2.

4 **45.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено висоту CK. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника ACK дорівнює 30 см і $CK = 12$ см.

46. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено медіану AM. Знайдіть периметр трикутника ABM, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 32 см і $AM = 8$ см.

47. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них на 24° більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?

48. Чи існує трикутник із периметром 20 см, одна сторона якого на 4 см більша за другу і на 3 см менша від третьої?

Коло і круг

1 **49.** (*Усно.*) Знайдіть:

1) діаметр кола, якщо його радіус дорівнює 6 см; 7 см;
2) радіус кола, діаметр якого дорівнює 4 см; 5 см.

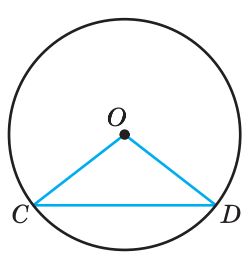
50. Знайдіть градусну міру кута, вписаного у коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює: 1) 80°; 2) 200°.

51. Визначте градусну міру центрального кута, якщо відповідний йому вписаний кут дорівнює:

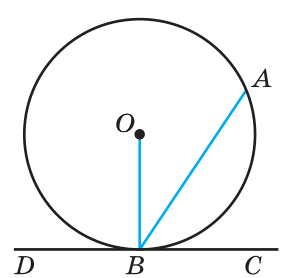
1) 50°;
2) 110°.

2 **52.** На малюнку 8 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:

1) кута O, якщо $\angle C = 46°$; 2) кута D, якщо $\angle O = 96°$.



Мал. 8.



Мал. 9.

53. На малюнку 8 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:

1) кута C, якщо $\angle O = 94°$; 2) кута O, якщо $\angle D = 44°$.

54. На малюнку 9 точка O – центр кола, CD – дотична до кола, точка B – точка дотику. Знайдіть:

1) $\angle OBA$, якщо $\angle ABC = 62°$; 2) $\angle DBA$, якщо $\angle OBA = 30°$.

55. На малюнку 9 точка O – центр кола, CD – дотична до кола, точка B – точка дотику. Знайдіть:

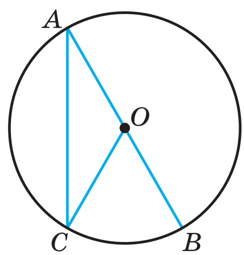
1) $\angle ABC$, якщо $\angle OBA = 32°$; 2) $\angle OBA$, якщо $\angle DBA = 136°$.

56. Точки A і B належать колу і лежать по різні боки від хорди CD, $\angle CAD = 76°$. Знайдіть $\angle CBD$.

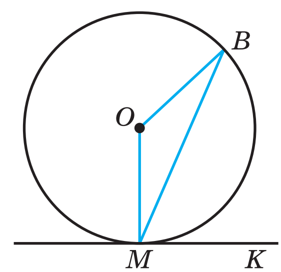
57. Радіуси двох кіл дорівнюють 8 см і 5 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:
1) внутрішній дотик; 2) зовнішній дотик.

58. Радіуси двох кіл дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть відстань між їх центрами, якщо кола мають:
1) зовнішній дотик; 2) внутрішній дотик.

3 **59.** На малюнку 10 точка O – центр кола, $\angle COB = 40°$. Знайдіть $\angle CAB$.



Мал. 10



Мал. 11

60. На малюнку 10 точка O – центр кола, $\angle ACO = 21°$. Знайдіть $\angle COB$.

61. Пряма MK – дотична до кола, точка O – центр кола, точка M – точка дотику (мал. 11). Знайдіть $\angle BMK$, якщо $\angle BOM = 130°$.

62. Пряма MK – дотична до кола, точка O – центр кола, точка M – точка дотику (мал. 11). Знайдіть $\angle MOB$, якщо $\angle KMB = 70°$.

63. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 16 см, а їх радіуси відносяться як 5 : 3. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони мають:
1) внутрішній дотик; 2) зовнішній дотик.

4 **64.** Прямі AB і AC дотикаються до кола із центром O в точках B і C. Знайдіть BC, якщо $AB = 4$ см, $\angle OAC = 30°$.

65. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 2 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр цього трикутника.

66. Коло, вписане у рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 4 см і 3 см, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр цього трикутника.

67. Рівнобедрений трикутник ABC з сновою AB вписано у коло з центром у точці O, $\angle AOB = 100°$. Знайдіть кути трикутника ABC. Скільки розв’язків має задача?

Розділ 1 ЧОТИРИКУТНИКИ

У цьому розділі ви:

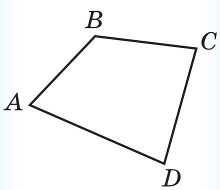
- **пригадаєте** поняття прямокутника і квадрата;
- **дізнаєтеся** про паралелограм та його властивості, трапецію; вписані та описані чотирикутники; середню лінію трикутника та середню лінію трапеції; теорему Фалеса;
- **навчитесь** обґрунтовувати належність чотирикутника до певного виду, застосовувати вивчені означення і властивості до розв’язування задач.

§ 1. Чотирикутник, його елементи. Сума кутів чотирикутника

1. Чотирикутник та його елементи

Чотирикутником **називають фігуру, що складається із чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають. При цьому жодні три з цих точок не лежать на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають, не мають жодних інших спільних точок, крім даних.**

Будь-який чотирикутник обмежує певну частину площини, яка є внутрішньою областю чотирикутника.



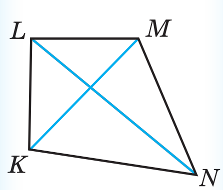
Чотирикутник $ABCD$

Точки A, B, C, D – ***вершини чотирикутника.***

Вершини A і B – ***сусідні вершини*** – кінці однієї сторони чотирикутника; вершини A і C – ***протилежні вершини*** – несусідні вершини чотирикутника.

Відрізки: AB, BC, CD, DA – ***сторони чотирикутника.***

Сторони AB і BC – ***сусідні***, або ***суміжні***, – мають спільну вершину; сторони AB і CD – ***протилежні*** – не мають спільної вершини.



Чотирикутник $KLMN$

Кути KLM, LMN, MNK і NKL – ***кути чотирикутника.***

Кути K і L – ***сусідні кути*** – вершини цих кутів – сусідні вершини чотирикутника; кути K і M – ***протилежні кути*** – вершини цих кутів – протилежні вершини чотирикутника.

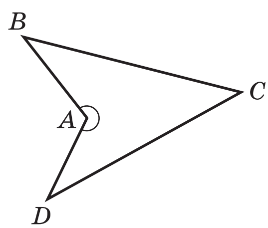
Відрізки KM і LN – ***діагоналі чотирикутника.***

$P_{KLMN} = KL + LM + MN + NK$ – ***периметр чотирикутника*** – сума довжин усіх його сторін.

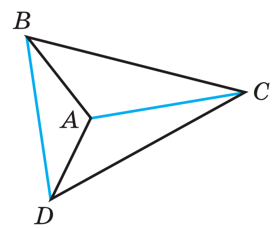
Зауважимо, що при позначенні чотирикутника, букви, що стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам чотирикутника. Наприклад, чотирикутник $ABCD$ (мал. на с. 13) можна позначити ще так: $BCDA$, або $ADCB$, або $CBAD$ тощо.

2. Види чотирикутників

Один з кутів чотирикутника може бути більшим за розгорнутий. Наприклад, на малюнку 1.1 кут A чотирикутника $ABCD$ є більшим за розгорнутий. Такий чотирикутник називають ***неопуклим***. Якщо усі кути чотирикутника менші від 180°, то його називають ***опуклим***. Діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються (див. мал. с. 11), а неопуклого не перетинаються (мал. 1.2).



Мал. 1.1



Мал. 1.2

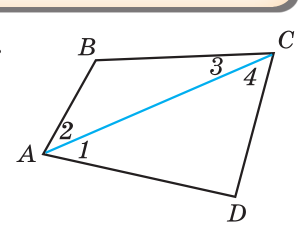
3. Сума кутів опуклого чотирикутника

Т Теорема (про суму кутів чотирикутника). **Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.**

Доведення. Нехай $ABCD$ – деякий чотирикутник.

1) Проведемо в ньому діагональ AC (мал. 1.3). Тоді $\angle A = \angle 1 + \angle 2$, $\angle C = \angle 3 + \angle 4$.

2) Враховуючи, що $\angle 2 + \angle B + \angle 3 = 180°$ (як сума кутів $\triangle ABC$), $\angle 1 + \angle D + \angle 4 = 180°$ (як сума кутів $\triangle ADC$), матимемо: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D =$
$= \angle 1 + \angle 2 + \angle B + \angle 3 + \angle 4 + \angle D = (\angle 2 + \angle B + \angle 3) +$
$+ (\angle 1 + \angle D + \angle 4) = 180° + 180° = 360°$. ■



Мал. 1.3

Приклад. Знайти кути чотирикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 3 : 10 : 4 : 1. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?

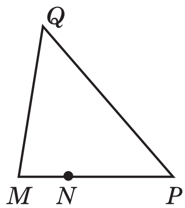
Розв'язання. Нехай кути чотирикутника дорівнюють $3x$, $10x$, $4x$ і x. Маємо рівняння $3x + 10x + 4x + x = 360°$, звідки $x = 20°$. Отже, кути чотирикутника дорівнюють $3 \cdot 20° = 60°$, $10 \cdot 20° = 200°$, $4 \cdot 20° = 80°$ і 20°. Оскільки один з кутів чотирикутника більший за 180°, то цей чотирикутник – неопуклий.

Відповідь: 60°, 200°, 80°, 20°; неопуклий.

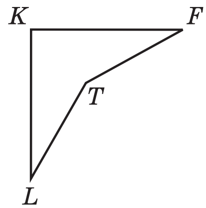
? Яку фігуру називають чотирикутником? ○ Що називають вершинами чотирикутника, сторонами чотирикутника? ○ Які вершини чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними? ○ Що таке діагоналі чотирикутника? ○ Які сторони чотирикутника називають сусідніми, які – протилежними? ○ Що називають периметром чотирикутника? ○ Що називають кутами чотирикутника? ○ Які кути чотирикутника називають протилежними, а які – сусідніми? ○ Який чотирикутник називають неопуклим, а який – опуклим? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

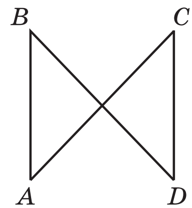
1.1. (*Усно.*) Які з фігур (мал. 1.4–1.7) є чотирикутниками? Назвіть опуклі та неопуклі чотирикутники.



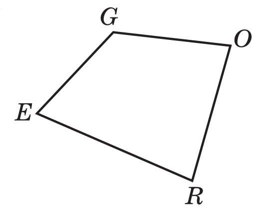
Мал. 1.4



Мал. 1.5



Мал. 1.6



Мал. 1.7

1.2. Назвіть пари протилежних сторін чотирикутника $EGOR$ (мал. 1.7), пари сусідніх сторін. Назвіть пари сусідніх вершин цього чотирикутника, пари протилежних вершин.

1.3. Накресліть чотирикутник $KLMN$. Назвіть пари його протилежних сторін, сусідніх сторін, протилежних вершин, сусідніх вершин. Проведіть діагоналі цього чотирикутника.

1.4. Накресліть опуклий чотирикутник $ABCD$ і неопуклий $PMLK$. Проведіть діагональ у кожному з них.

1.5. Чи існує чотирикутник з кутами:

1) 70°, 90°, 100° і 120°; 2) 130°, 60°, 70° і 100°?

1.6. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:

1) 140°, 60°, 90° і 70°; 2) 120°, 110°, 80° і 60°?

1.7. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють: 1) 150°, 110° і 80°; 2) 80°, 60° і 30°.

Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?

1.8. Знайдіть четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють: 1) 20°, 70° і 80°; 2) 120°, 50° і 40°.

Яким – опуклим чи неопуклим – є кожний чотирикутник?

1.9. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 34 мм, 2,5 см, 0,4 дм і 0,07 м.

1.10. Знайдіть периметр чотирикутника, сторони якого дорівнюють 0,08 м, 0,7 дм, 6,3 см і 52 мм.

1.11. Чи можуть усі кути чотирикутника бути:

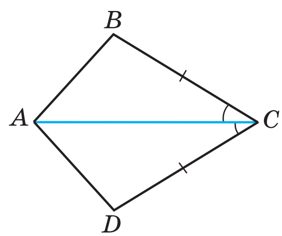
1) гострими; 2) прямими; 3) тупими?

1.12. Один з кутів чотирикутника дорівнює 120°, а інші – між собою рівні. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

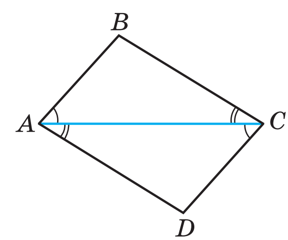
1.13. Периметр чотирикутника дорівнює 60 см, а одна з його сторін – 24 см. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, якщо вони між собою рівні.

1.14. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 1.8) $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

1.15. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 1.9) $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$. Доведіть, що $AB = CD$.



Мал. 1.8



Мал. 1.9

3

1.16. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 8 і 9, а периметр чотирикутника дорівнює 65 см.

1.17. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 4, 5, 7 і 8.

1.18. Знайдіть невідомі кути чотирикутника, якщо перший з них дорівнює 90°, другий і третій відносяться як 7 : 5, а четвертий дорівнює півсумі другого та третього.

1.19. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника, периметр якого дорівнює 54 см, одна зі сторін 18 см, друга та третя відносяться як 7 : 3, а четверта дорівнює пів різниці другої та третьої.

1.20. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не більший за 90°.

1.21. Доведіть, що в кожному чотирикутнику є кут, не менший від 90°.

1.22. Чи може кут чотирикутника бути більшим за суму інших його кутів?

4

1.23. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 3 см, 4 см та кутом 50° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

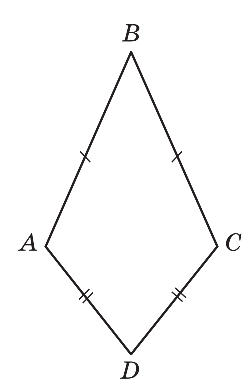
1.24. Побудуйте чотирикутник зі сторонами 5 см, 5 см, 4 см, 3 см та кутом 70° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

1.25. Опуклий чотирикутник називають *дельтоїдом*, якщо він має дві пари рівних сусідніх сторін (мал. 1.10). Доведіть, що:

1) діагональ BD ділить навпіл і кут B, і кут D;

2) діагоналі дельтоїда взаємно перпендикулярні.

1.26. Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 29 см, периметр трикутника ADB – 20 см, а трикутника CDB – 21 см. Знайдіть довжину діагоналі BD.



Мал. 1.10

Вправи для повторення

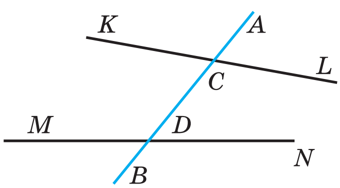
1.27. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 70°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

1.28. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює 70°. Скільки розв'язків має задача?

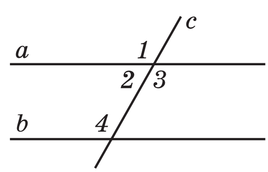
1.29. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а сума меншого катета й медіани, проведеної до гіпотенузи, – 10 см. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

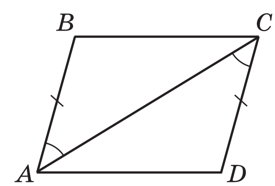
1.30. Пряма AB є січною для прямих KL і MN (мал. 1.11). Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів, внутрішніх різносторонніх кутів та відповідних кутів.



Мал. 1.11



Мал. 1.12



Мал. 1.13

1.31. Яким є взаємне розміщення прямих a і b (мал. 1.12), якщо:

1) $\angle 2 + \angle 4 = 180°$;
2) $\angle 1 > \angle 4$;
3) $\angle 3 = 120°$, $\angle 4 = 121°$;
4) $\angle 2 = 60°$, $\angle 4 = 119°$;
5) $\angle 1 = \angle 4 = 122°$;
6) $\angle 3 = \angle 4$?

1.32. 1) Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 1.13), якщо $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle ACD$.

2) Доведіть, що $BC = AD$ і $\angle BCA = \angle CAD$.

3) Чи паралельні прямі BC і AD?

Життєва математика

1.33. Восьмикласники Тарас і Аліса ведуть здоровий спосіб життя. Кілька разів на тиждень вони пробігають доріжкою навколо парку, який має форму прямокутника зі сторонами 150 і 200 м. Хлопець пробігає доріжкою 4 рази, а дівчина – тричі. Швидкість бігу Тараса – 16 км/год, Аліси – 14 км/год. Хто витрачає більше часу на тренування та на скільки? Відповідь дайте з точністю до секунди.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1.34. (Всеукраїнська олімпіада з математики, 1964 р.) Знайдіть найбільше значення n, для якого n точок можна розмістити на площині так, щоб кожні три з них були вершинами прямокутного трикутника.

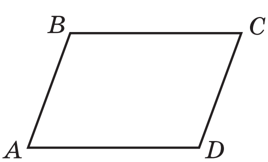
§ 2. Паралелограм, його властивості й ознаки

1. Означення паралелограма та його властивості

Паралелограмом **називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.**

На малюнку 2.1 зображено паралелограм $ABCD$, де $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Розглянемо *властивості паралелограма*.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°.



Мал. 2.1

Справді, наприклад, кути A і B паралелограма $ABCD$ (мал. 2.1) є внутрішніми односторонніми кутами для паралельних прямих AD і BC та січної AB. Тому $\angle A + \angle B = 180°$. Аналогічно цю властивість можна довести для будь-якої іншої пари сусідніх кутів паралелограма.

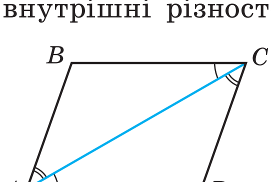
2. Паралелограм є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle A < 180°$, $\angle B < 180°$. Аналогічно $\angle C < 180°$, $\angle D < 180°$. Тому паралелограм – опуклий чотирикутник. ■

3. У паралелограмі протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.

Доведення. Розглянемо паралелограм $ABCD$ (мал. 2.2).

1) Діагональ AC розбиває його на два трикутники ABC і ADC. AC – спільна сторона цих трикутників й $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle CAB = \angle ACD$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині січною AC паралельних прямих AD і BC, AB і CD відповідно).



Мал. 2.2

2) Тоді $\triangle ABC = \triangle CDA$ (за стороною і двома прилеглими кутами). Отже, $AB = CD$, $BC = AD$ і $\angle B = \angle D$ (як відповідні елементи рівних трикутників).

3) Оскільки $\angle BAC + \angle CAD = \angle BCA + \angle DCA$, то $\angle BAD = \angle BCD$. ■

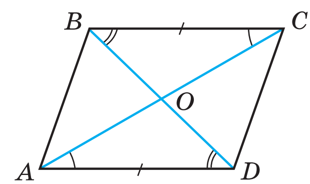
4. Периметр паралелограма $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
5. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Доведення. Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD паралелограма $ABCD$ (мал. 2.3).

1) $AD = BC$ (як протилежні сторони паралелограма), $\angle CAD = \angle ACB$, $\angle BDA = \angle DBC$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січними AC і BD відповідно).

2) Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ (за стороною і двома прилеглими кутами).

3) Тоді $AO = OC$, $BO = OD$ (як відповідні сторони рівних трикутників). ■



Мал. 2.3

Приклад 1. Дано: $ABCD$ паралелограм, AK – бісектриса кута A, $BK = 5$ см, $KC = 3$ см (мал. 2.4). Знайти: P_{ABCD}.

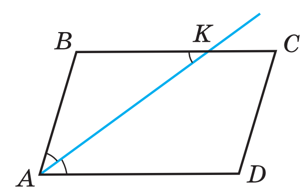
Розв'язання. 1) $BC = BK + KC = 5 + 3 = 8$ (см).

2) $\angle KAD = \angle BKA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AK).

3) $\angle KAD = \angle KAB$ (за умовою), тоді $\angle BKA = \angle KAB$. Отже, за ознакою рівнобедреного трикутника: $\triangle ABK$ – рівнобедрений, $AB = BK = 5$ (см).

4) $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(5 + 8) = 26$ (см).

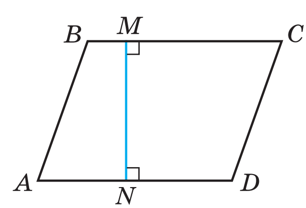
Відповідь: 26 см.



Мал. 2.4

2. Означення висоти паралелограма

Висотою паралелограма **називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.**

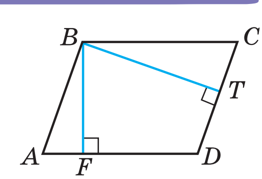


Мал. 2.5

На малюнку 2.5 MN – висота паралелограма; $MN \perp AD$, $MN \perp BC$.

! З кожної вершини паралелограма можна провести дві висоти.

Наприклад, на малюнку 2.6 BF і BT – висоти паралелограма, проведені відповідно до сторін AD і CD.



Мал. 2.6

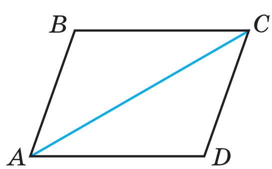
3. Ознаки паралелограма

Розглянемо *ознаки паралелограма*.

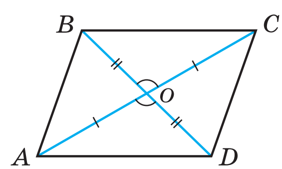
Т Теорема (ознаки паралелограма). **Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні й паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються й точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, – то чотирикутник є паралелограмом.**

Доведення. 1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$ і $AD \parallel BC$ (мал. 2.7). Проведемо діагональ AC. Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих AD і BC січною AC). AC – спільна сторона, $AD = BC$ (за умовою). Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами й кутом між ними). Тоді $\angle ACD = \angle CAB$ (як відповідні). Але це різносторонні кути, що утворилися при перетині прямих AB і CD січною AC. Тому $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Отже, у чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні. Тому $ABCD$ – паралелограм.

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$: $AD = BC$ і $AB = CD$ (мал. 2.7). Проведемо діагональ AC. Тоді $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за трьома сторонами). Тому $\angle ACD = \angle CAB$, а отже, $AB \parallel CD$ (за ознакою паралельності прямих). Аналогічно доводимо, що $AD \parallel BC$. Отже, $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 2.7



Мал. 2.8

3) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O і $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 2.8). $\angle AOD = \angle COB$ (як вертикальні). Тому $\triangle AOD = \triangle COB$ (за двома сторонами та кутом між ними). Звідси $AD = BC$. Аналогічно доводимо, що $AB = CD$. Зважаючи на п. 2 цієї теореми, приходимо до висновку, що $ABCD$ – паралелограм.

4) Нехай у паралелограмі $ABCD$: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (мал. 2.1). Оскільки $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$, $2(\angle A + \angle B) = 360°$; $\angle A + \angle B = 180°$. Але $\angle A$ і $\angle B$ – внутрішні односторонні кути для прямих AD і BC та січної AB. Тому $AD \parallel BC$ (за ознакою паралельності прямих). Аналогічно доводимо, що $AB \parallel CD$. Отже, $ABCD$ – паралелограм. ■

Приклад 2. У чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$. Довести, що $ABCD$ – паралелограм.

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник (мал. 2.7).

1) Розглянемо $\triangle CAD$ і $\triangle ACB$. AC – їхня спільна сторона, $AD = BC$, $\angle CAD = \angle ACB$ (за умовою).

2) Отже, $\triangle CAD = \triangle ACB$ (за двома сторонами та кутом між ними).

3) Тому $AB = CD$. Але тоді в чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, тому він є паралелограмом. ■

Знайдіть кілька інших способів доведення цієї задачі.

А ще раніше...

Про деякі види чотирикутників (квадрати, прямокутники, рівнобічні та прямокутні трапеції) знали ще давньоєгипетські та вавилонські математики.

Термін «паралелограм» – грецького походження, вважають, що його ввів Евклід (близько 300 р. до н. е.). Про паралелограм і деякі його властивості знали учні школи Піфагора («піфагорійці»).

У «Началах» Евкліда доведено таку теорему: *у паралелограмі протилежні сторони рівні і протилежні кути рівні, а діагональ поділяє його навпіл*, але не згадується про те, що точка перетину діагоналей паралелограма ділить кожну з них навпіл.

Евклід також не згадує ані про прямокутник, ані про ромб.

Повну теорію паралелограмів було розроблено лише в кінці середньовіччя, а в підручниках вона з'явилася в XVII ст. Усі теореми та властивості паралелограма в цих підручниках ґрунтувалися на аксіомі паралельності Евкліда.

Термін «діагональ» (з грец. «діа» – «через», «гоніос» – «кут») – відрізок, що сполучає вершини кутів.

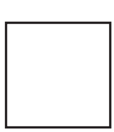
Евклід, як і більшість математиків того часу, для назви відрізка, що сполучає протилежні вершини чотирикутника, зокрема прямокутника, використовував інший термін – «діаметр». Це можна пояснити тим, що перші геометри свої міркування ґрунтували на вписаних у коло прямокутниках. У середні віки для назви згаданого відрізка використовували обидва терміни. Лише у XVIII ст. термін «діагональ» став загальновживаним.

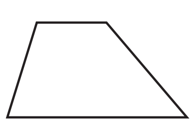
? Яку фігуру називають паралелограмом? ○ Сформулюйте й доведіть властивості паралелограма. ○ Що називають висотою паралелограма? ○ Сформулюйте й доведіть ознаки паралелограма.

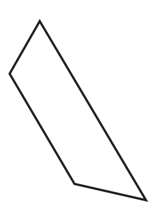
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

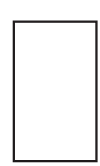
1

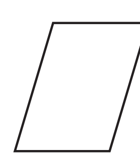
2.1. Серед чотирикутників, зображених на малюнках 2.9–2.14, укажіть паралелограми.

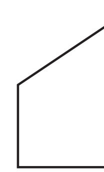

Мал. 2.9


Мал. 2.10


Мал. 2.11


Мал. 2.12


Мал. 2.13


Мал. 2.14

2.2. Накресліть паралелограм $ABCD$, у якого кут D тупий.

2.3. Накресліть паралелограм $KLMN$, у якого кут K гострий.

2.4. (*Усно.*) Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см. Яка довжина сторони, що їй протилежна?

2.5. Один з кутів паралелограма дорівнює 50°. Знайдіть інші його кути.

2.6. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 110°.

2.7. Знайдіть периметр паралелограма, у якого одна сторона дорівнює 12 см, а друга – на 3 см більша за неї.

2.8. Знайдіть периметр паралелограма, у якого одна сторона дорівнює 18 см, а друга – удвічі від неї менша.

2.9. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище видатної української жінки-математика, науковиці, доктора фізико-математичних наук. Дізнайся з інтернету про її життєвий і творчий шлях.

Знайдіть кути A і B паралелограма $ABCD$, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A + \angle C = 120°$	І	К
кут A на 20° більший за кут B	Е	Ч
кут A утричі менший від кута B	В	О
$\angle A : \angle B = 3 : 2$	Н	Р

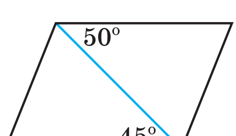
45°	60°	72°	80°	100°	108°	120°	135°

2.10. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо:
1) сума двох з них дорівнює 200°;
2) один з них на 40° менший від другого;
3) один з них удвічі більший за другий;
4) градусні міри двох з них відносяться як 4 : 5.

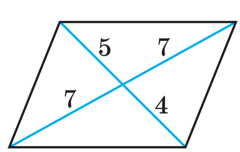
2.11. У паралелограмі $ABCD$ $\angle BAD = 80°$, $\angle ACD = 50°$. Знайдіть $\angle ACB$ і $\angle ABC$.

2.12. У паралелограмі $ABCD$ $\angle BAC = 35°$, $\angle BCA = 40°$. Знайдіть кути паралелограма.

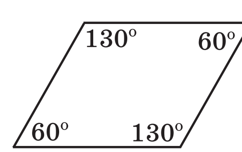
2.13. (*Усно.*) Які помилки допущено в зображенні паралелограма на малюнках 2.15–2.17?



Мал. 2.15



Мал. 2.16



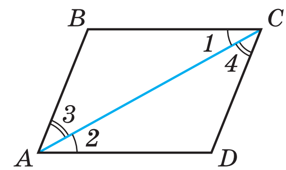
Мал. 2.17

2.14. Периметр паралелограма дорівнює 40 см. Знайдіть його сторони, якщо:
1) одна з них на 4 см більша за другу;
2) вони відносяться як 3 : 7.

2.15. Периметр паралелограма дорівнює 36 дм. Знайдіть його сторони, якщо:
1) одна з них на 2 дм менша від другої;
2) одна з них у 5 разів більша за другу.

2.16. O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть діагональ AC, якщо $BD = 20$ см, $AB = 15$ см, а периметр трикутника AOB дорівнює 32 см.

2.17. У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 2.18) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 2.18

2.18. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 2.18). Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

2.19. Побудуйте паралелограм за двома сторонами й кутом між ними.

2.20. Побудуйте паралелограм за двома сторонами та діагоналлю.

3

2.21. Бісектриса кута паралелограма перетинає його сторону під кутом 48°. Знайдіть кути паралелограма.

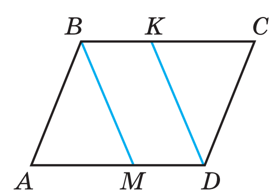
2.22. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A ділить сторону BC на відрізки $BM = 5$ см і $MC = 7$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

2.23. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 4$ см, $BC = 12$ см. Бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці P. Знайдіть BP і PC.

2.24. Побудуйте паралелограм за стороною і діагоналями.

2.25. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і кутом між ними.

2.26. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ (мал. 2.19) позначено точки M і K так, що $\angle ABM = \angle CDK$. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.



Мал. 2.19

2.27. На сторонах AD і BC паралелограма $ABCD$ (мал. 2.19) позначено точки M і K так, що $AM = KC$. Доведіть, що $BMDK$ – паралелограм.

2.28. Доведіть, що бісектриси двох сусідніх кутів паралелограма взаємно перпендикулярні.

2.29. У паралелограмі гострий кут дорівнює 60°. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону на відрізки 3 см і 5 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайдіть периметр паралелограма.

2.30. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $\angle B = 120°$. Висота BK ділить сторону AD на два однакових відрізки. Знайдіть периметр паралелограма.

2.31. У паралелограмі $ABCD$ з вершини гострого кута A проведено висоти AL і AK, $\angle LAK = 140°$. Знайдіть кут C паралелограма.

2.32. У паралелограмі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BN, $\angle MBN = 70°$. Знайдіть кут D паралелограма.

2.33. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ ділить сторону AD на два відрізки AK і KD так, що $AK - KD = 1$ см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.

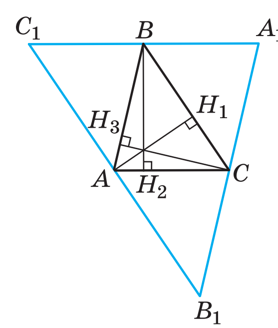
2.34. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на два відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 3 : 7$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 78 см.

2.35. Два кути паралелограма відносяться як 5 : 7. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) тупого кута; 2) гострого кута.

2.36. Один з кутів паралелограма на $12°$ більший за другий. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) гострого кута; 2) тупого кута.

2.37. Доведіть, що три висоти трикутника або їхні продовження перетинаються в одній точці (ортоцентрі трикутника).

Доведення. 1) Нехай AH_1, BH_2, CH_3 – висоти гострокутного трикутника ABC (мал. 2.20). Проведемо через вершини трикутника прямі, паралельні протилежним сторонам. Одержимо трикутник $A_1B_1C_1$. Чотирикутник ABA_1C – паралелограм (за побудовою). Тому $BA_1 = AC$. Аналогічно $ACBC_1$ – паралелограм і $C_1B = AC$. Отже, $C_1B = BA_1$, точка B – середина A_1C_1. Оскільки $BH_2 \perp AC$ і $AC \parallel A_1C_1$, то $BH_2 \perp A_1C_1$. Тому BH_2 належить серединному перпендикуляру до сторони A_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно AH_1 і CH_3 належать серединним перпендикулярам до двох інших сторін цього трикутника. Як відомо, серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці. Отже, AH_1, BH_2 і CH_3 перетинаються в одній точці.



Мал. 2.20

2) Якщо $\triangle ABC$ – прямокутний, наприклад $\angle C = 90°$, то очевидно, що три висоти перетинаються в точці C.

3) Якщо $\triangle ABC$ – тупокутний, то продовження трьох висот трикутника перетинаються в одній точці. Доведення аналогічне до доведення у п. 1. ■

Вправи для повторення

2.38. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює: 1) $20°$; 2) $65°$.

2.39. Дві сторони трикутника дорівнюють 7,2 см і 2,5 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

2.40. Зовнішній кут трикутника у 2 рази більший за один з внутрішніх кутів, не суміжний з ним. Доведіть, що трикутник є рівнобедреним.

2.41. Чи можна побудувати чотирикутник зі сторонами 6 см, 6 см, 4 см і 2 см та кутом $60°$ між рівними сторонами?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.42. Знайдіть периметр і площу прямокутника, сторони якого дорівнюють: 1) 5 см і 7 см; 2) 2 дм і 14 см.

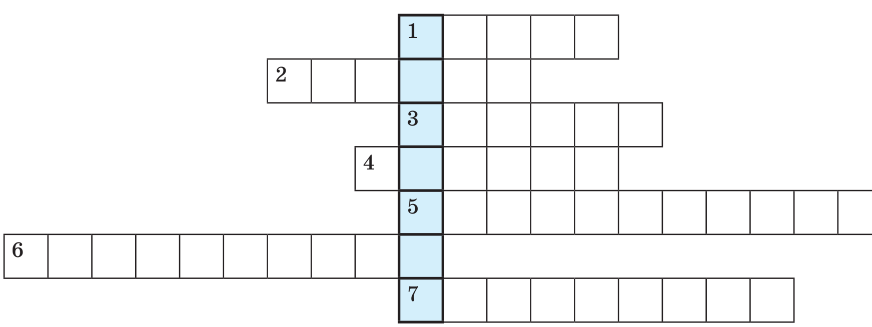
Життєва математика

2.43. 1) Фермерка зібрала урожай зерна та засипала його в засік, що має форму прямокутного паралелепіпеда 12 м завдовжки і 8 м завширшки. Зерно насипано в засік до висоти 2,5 м. Щоб дізнатися скільки важить усе зерно, зважили ящик 0,5 м завдовжки, 0,5 м завширшки і 0,4 м заввишки ущерть наповнений зерном. Скільки важило зерно в засіку, якщо зерно в ящику важило 80 кг?

2) Яким буде виторг фермерки від продажу всього зерна за гуртовою ціною, що складає 6000 грн за 1 т?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

2.44. *Видатні українці.* Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та інтернет) й отримаєте у виділеному стовпчику ім’я давньогрецького філософа, математика, релігійного та політичного діяча.



1. Видатний український наукознавець у галузі зварювальних процесів, доктор технічних наук, Герой України.

2. Українська поетеса, публіцистка, діячка ОУН, борець за незалежність України у XX столітті.

3. Український письменник, поет, публіцист, перекладач, учений, громадський і політичний діяч (1856–1916).

4. Відома спортсменка, рекордсменка України за кількістю олімпійських нагород.

5. Політичний діяч і публіцист, організатор української науки; Голова Центральної Ради Української Народної Республіки.

6. Українська народна художниця у жанрі «наївного мистецтва», національна легенда України.

7. Українська акторка театру та кіно. Народна артистка України, почесна громадянка Києва.

§ 3. Прямокутник і його властивості

1. Означення та властивості прямокутника

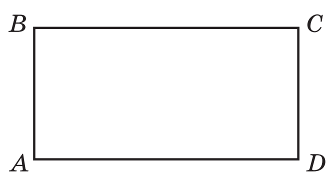
Прямокутником **називають паралелограм, у якого всі кути прямі (мал. 3.1).**

Оскільки прямокутник є паралелограмом, то він має всі *властивості паралелограма*.

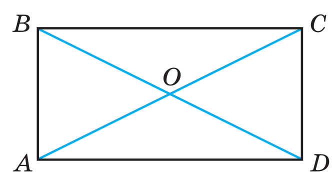
1. У прямокутнику протилежні сторони рівні.
2. Периметр прямокутника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
3. Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.

Крім цього, прямокутник має ще *властивості*.

4. Діагоналі прямокутника рівні.



Мал. 3.1



Мал. 3.2

Доведення. Нехай дано прямокутник $ABCD$ (мал. 3.2). $\triangle ACD = \triangle DBA$ (за двома катетами). Тому $AC = BD$. ■

5. Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.

Оскільки $AC = BD$, а $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 3.2), то очевидно, що $AO = BO = OC = OD$.

Приклад 1. Діагональ ділить кут прямокутника у відношенні 2 : 3. Знайти кут між діагоналями цього прямокутника.

Розв'язання. 1) Нехай $\angle ADO : \angle ODC = 2 : 3$ (мал. 3.2).
Позначимо $\angle ADO = 2x$, $\angle ODC = 3x$.
Тоді $2x + 3x = 90°$, $x = 18°$.
Тому $\angle ADO = 2 \cdot 18 = 36°$; $\angle ODC = 3 \cdot 18 = 54°$.
2) $\triangle OCD$ – рівнобедрений (бо $DO = OC$). Тому $\angle OCD = \angle ODC = 54°$.
У $\triangle OCD$: $\angle COD = 180° - 2 \cdot 54° = 72°$. Отже, кут між діагоналями цього прямокутника дорівнює 72°.

Відповідь: 72°.

2. Ознаки прямокутника

Розглянемо *ознаки прямокутника*.

Т Теорема (ознаки прямокутника). **Якщо в паралелограма: 1) усі кути рівні, або 2) один кут прямий, або 3) діагоналі рівні, – то паралелограм є прямокутником.**

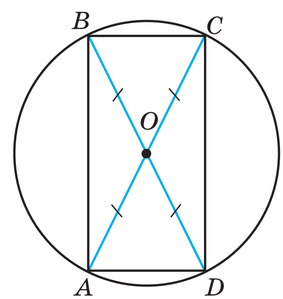
Доведення. 1) Оскільки всі кути паралелограма рівні, а їхня сума дорівнює $360°$, то кожний з них дорівнює $360° : 4 = 90°$. А тому паралелограм є прямокутником.

2) Нехай кут A паралелограма $ABCD$ прямий (мал. 3.1). Тоді $\angle C = \angle A = 90°$, $\angle B = \angle D = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$. Отже, усі кути паралелограма прямі, а тому він є прямокутником.

3) Нехай у паралелограма $ABCD$ діагоналі AC і BD рівні (мал. 3.2). AD – спільна сторона трикутників ABD і DCA. Отже, $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за трьома сторонами). Тому $\angle BAD = \angle CDA$. Але ж $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BCD = \angle BAD$. У паралелограма всі кути рівні між собою. Тому він є прямокутником (за п. 1 цієї теореми). ■

Приклад 2. У колі із центром O проведено діаметри AC і BD (мал. 3.3). Визначити вид чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання. 1) Оскільки $AO = OC$, $BO = OD$ (як радіуси), то, за ознакою паралелограма, маємо, що $ABCD$ – паралелограм.
2) Оскільки $AC = BD$ (як діаметри), то, використовуючи ознаку прямокутника, маємо, що паралелограм $ABCD$ є прямокутником.
Відповідь: прямокутник.



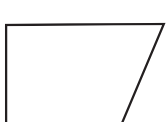
Мал. 3.3

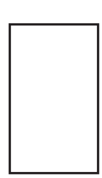
Яку фігуру називають прямокутником? ○ Сформулюйте й доведіть властивості прямокутника. ○ Сформулюйте й доведіть ознаки прямокутника.

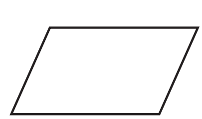
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

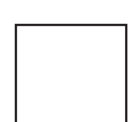
1

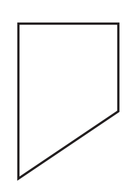
3.1. Які із чотирикутників, зображених на малюнках 3.4–3.8, є прямокутниками?


Мал. 3.4


Мал. 3.5


Мал. 3.6


Мал. 3.7


Мал. 3.8

3.2. У прямокутнику $ABCD$ діагональ AC дорівнює 5 см. Яка довжина діагоналі BD?

3.3. Сторони прямокутника дорівнюють 5 см і 8 см. Знайдіть його периметр.

3.4. Знайдіть периметр прямокутника, сторони якого дорівнюють 3 см і 4 см.

3.5. Якщо чотирикутник є прямокутником, то його діагоналі між собою рівні. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклад.

2

3.6. Сторона BC прямокутника $ABCD$ дорівнює 8 см, а діагональ BD – 12 см. Знайдіть периметр трикутника BOC, де O – точка перетину діагоналей прямокутника.

3.7. O – точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. $AC = 12$ см, периметр трикутника AOB дорівнює 16 см. Знайдіть сторону AB.

3.8. (*Усно*.) Що можна сказати про вид паралелограма, якщо відомо, що:
1) жоден з його кутів не є гострим;
2) жоден з його кутів не є тупим;
3) він має три рівних між собою кути?

3.9. Доведіть, що коли в чотирикутнику три кути прямі, то цей чотирикутник – прямокутник.

3.10. Доведіть, що коли в чотирикутнику всі кути рівні, то цей чотирикутник – прямокутник.

3.11. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище першої олімпійської чемпіонки незалежної України.

Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 40 см. Знайдіть сторони AB і BC цього прямокутника, якщо:	AB	BC
AB на 2 см більша за BC	А	Ю
$AB : BC = 2 : 3$	Л	Б

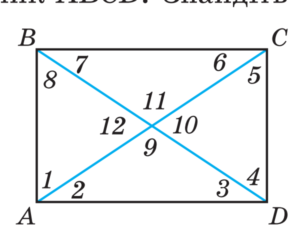
12 см	11 см	9 см	8 см

3.12. Периметр прямокутника дорівнює 50 см. Знайдіть його сторони, якщо відомо, що:
1) одна з них на 5 см менша від другої;
2) сторони відносяться як 4 : 1.

3.13. (*Усно*.) На малюнку 3.9 зображено прямокутник $ABCD$. Знайдіть усі рівні між собою кути.

3.14. Знайдіть за малюнком 3.9:
1) $\angle 3$, якщо $\angle 8 = 50°$;
2) $\angle 2$, якщо $\angle 10 = 41°$.

3.15. Знайдіть за малюнком 3.9:
1) $\angle 5$, якщо $\angle 2 = 40°$;
2) $\angle 12$, якщо $\angle 3 = 32°$.



Мал. 3.9

3.16. Діагональ прямокутника ділить кут прямокутника на два кути, один з яких на $20°$ більший за другий. Знайдіть ці кути.

3 **3.17.** Доведіть, що навколо прямокутника можна описати коло.

3.18. Знайдіть кут між меншою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він:

1) на $15°$ менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони;

2) на $50°$ менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони.

3.19. Знайдіть кут між більшою стороною і діагоналлю прямокутника, якщо він:

1) на $90°$ менший від кута між діагоналями, який лежить проти більшої сторони;

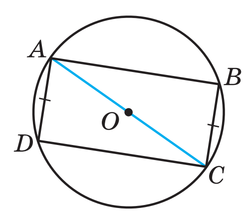
2) на $40°$ менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони.

3.20. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, E – середина AB, $\angle CAB = 70°$. Знайдіть $\angle DOE$.

3.21. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. OP – бісектриса трикутника AOB, $\angle DOP = 130°$. Знайдіть $\angle CAB$.

3.22. У паралелограмі $ABCD$ з гострим кутом A діагоналі перетинаються в точці O. На відрізках AO і OC позначено точки M і N так, що $OM = OB$, $ON = OD$. Доведіть, що $BMDN$ – прямокутник.

3.23. Точки B і D належать колу із центром O, AC – діаметр кола, $AD = BC$ (мал. 3.10). Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.



Мал. 3.10

3.24. Перпендикуляри, проведені з точки перетину діагоналей прямокутника до двох його сусідніх сторін, дорівнюють 4 см і 9 см. Визначте периметр прямокутника.

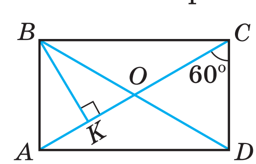
3.25. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його більша сторона дорівнює 20 см.

3.26. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону навпіл. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює 8 дм.

4 **3.27.** На малюнку 3.11 $ABCD$ – прямокутник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60°$.

1) $OK = a$. Знайдіть: DB і AB;

2) $AC = m$. Знайдіть: AK і CD.



Мал. 3.11

3.28. На малюнку 3.11 $ABCD$ – прямокутник, $BK \perp AC$, $\angle ACD = 60°$, $AB = b$. Знайдіть BD і OK.

3.29. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 35$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L лежать на гіпотенузі трикутника, а точки M і N – на катетах. $KL : KN = 3 : 2$. Знайдіть периметр прямокутника.

3.30. У рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 20 см, вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут, а вершина протилежного кута належить гіпотенузі. Знайдіть периметр прямокутника.

Вправи для повторення

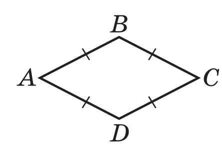
3.31. З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ проведено висоту BK. Знайдіть кути паралелограма, якщо $BK = \frac{1}{2}AB$.

3.32. 1) Градусна міра одного з кутів трикутника є середнім арифметичним двох інших кутів. Знайдіть цей кут.
2) Градусна міра одного з кутів чотирикутника є середнім арифметичним трьох інших кутів. Знайдіть цей кут.

3.33. Через точку P, що належить внутрішній області кута ABC, проведіть пряму так, щоб її відрізок, який лежить між сторонами кута, ділився точкою P навпіл.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

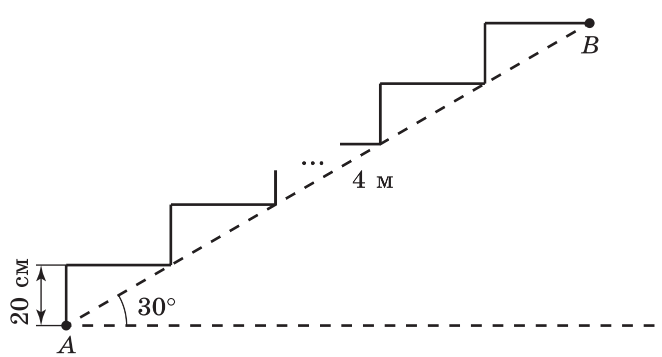
3.34. Дано: $AB = BC = CD = DA$ (мал. 3.12).
Довести: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.



Мал. 3.12

Життєва математика

3.35. Сходовий марш сполучає точки A і B, відстань між якими – 4 м. Скільки сходинок на сходовому марші, якщо кут нахилу сходів дорівнює 30°, висота сходинки – 20 см?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

3.36. Чи можна розрізати квадрат розміром 6×6 на прямокутники розміром 1×4?

§ 4. Ромб і його властивості

1. Означення ромба та його властивості

Ромбом **називають паралелограм, у якого всі сторони рівні** (мал. 4.1).

Оскільки ромб є паралелограмом, то він має всі *властивості паралелограма*.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба дорівнює 180°.
2. У ромба протилежні кути рівні.
3. Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.
4. Периметр ромба $P_{ABCD} = 4AB$.

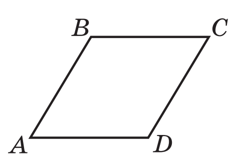
Крім того, ромб має ще таку *властивість*.

5. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

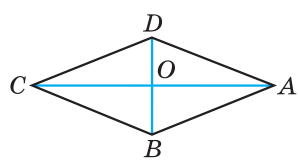
Доведення. Нехай AC і BD – діагоналі ромба $ABCD$ (мал. 4.2), O – точка перетину діагоналей.

1) Оскільки $AB = AD$ і $DO = OB$, то AO – медіана рівнобедреного трикутника ABD, проведена до основи BD. Тому AO є також висотою і бісектрисою трикутника ABD.

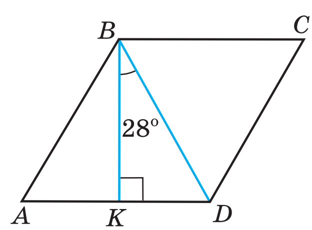
2) Отже, $AC \perp BD$ і $\angle DAO = \angle BAO$. ■



Мал. 4.1



Мал. 4.2



Мал. 4.3

Аналогічно можна довести, що діагональ AC ділить навпіл кут DCB, а діагональ BD ділить навпіл кути ABC і ADC.

Приклад 1. Кут між висотою і діагоналлю ромба, проведеними з однієї вершини, дорівнює 28°. Знайти кути ромба.

Розв'язання. BD – діагональ ромба $ABCD$, а BK – його висота (мал. 4.3), $\angle KBD = 28°$ (за умовою).

1) У $\triangle BKD$ $\angle BDK = 90° - 28° = 62°$.

2) Оскільки DB ділить кут $\angle ADC$ навпіл, то $\angle ADC = 2 \cdot 62° = 124°$.

3) Тоді $\angle ABC = \angle ADC = 124°$; $\angle A = \angle C = 180° - 124° = 56°$.

Відповідь: 124°, 56°, 124°, 56°.

2. Ознаки ромба

Розглянемо *ознаки ромба*.

Т Теорема (ознаки ромба). **Якщо в паралелограмі: 1) дві сусідні сторони рівні, або 2) діагоналі перетинаються під прямим кутом, або 3) діагональ ділить навпіл кути паралелограма, – то паралелограм є ромбом.**

Доведення. 1) Нехай $ABCD$ – паралелограм (див. мал. 4.2). Оскільки $AB = AD$ (за умовою) і $AB = CD$, $AD = BC$ (за властивістю паралелограма), то $AB = AD = BC = CD$. Отже, $ABCD$ – ромб.

2) Нехай $AC \perp BD$ (мал. 4.2). Оскільки $OB = OD$ (за властивістю паралелограма), то $\triangle AOB = \triangle AOD$ (за двома катетами). Тому $AB = AD$. За п. 1 цієї теореми $ABCD$ – ромб.

3) Діагональ DB ділить навпіл кут D паралелограма $ABCD$, тобто $\angle ADB = \angle BDC$ (за умовою). Оскільки паралельні прямі AB і DC перетнули січною DB, то $\angle ABD = \angle BDC$ (як внутрішні різносторонні). Отже, $\angle ADB = \angle ABD$. Тому, за ознакою рівнобедреного трикутника, $\triangle ABD$ – рівнобедрений і $AD = AB$. За п. 1 цієї теореми $ABCD$ – ромб. ■

Приклад 2. Довести, що коли в чотирикутнику всі сторони рівні, то цей чотирикутник – ромб.

Доведення. Нехай $AB = BC = CD = DA$ (див. мал. 4.1).

1) Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно рівні, то за ознакою паралелограма маємо, що $ABCD$ – паралелограм.

2) У паралелограма $ABCD$ сусідні сторони рівні. Тому $ABCD$ – ромб (за ознакою ромба).

А ще раніше...

Слово «ромб» грецького походження, у давнину воно означало тіло, що обертається, – веретено, дзиґу. Ромб тоді пов'язували з перерізом веретена, на яке намотано нитки.

У «Началах» Евкліда термін «ромб» зустрічається лише один раз, а властивості ромба Евклід взагалі не розглянув.

* * *

В українській вишивці – ромб – один із десяти головних символів, які наші предки споконвіку вишивали на своїх сорочках.

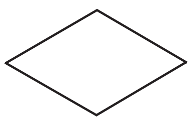
У давніх віруваннях ромб – це символ родючості, адже за формою він нагадує два трикутники, чоловічого та жіночого начал.

Ромб (із крапкою посередині) є символом засіяного поля, означає багатство, достаток і добробут. Головний реманент українців-хліборобів – борона, якою саме й готували поле до сівби, має форму ромба. Ромбоподібні узори вишивали на весільних рушниках і на весільному одязі. Одяг із вишитими ромбами молода жінка при надії мала носити аж до народження дитини. Адже цей символ слугував сильним оберегом.

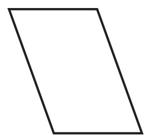
Яку фігуру називають ромбом? Сформулюйте й доведіть властивості ромба. Сформулюйте й доведіть ознаки ромба.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

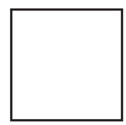
1 **4.1.** (*Усно.*) Які із чотирикутників на малюнках 4.4–4.8 є ромбами?



Мал. 4.4

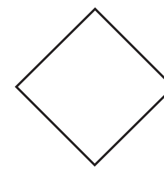


Мал. 4.5



Мал. 4.6

Мал. 4.7



Мал. 4.8

4.2. Накресліть ромб $ABCD$, у якого кут B тупий.

4.3. Накресліть ромб $ABCD$, у якого кут A гострий.

4.4. Периметр ромба дорівнює 24 см. Знайдіть його сторону.

4.5. Сторона ромба дорівнює 4 дм. Знайдіть його периметр.

4.6. Гострий кут ромба дорівнює 40°. Який кут утворює діагональ, проведена із цього кута, зі стороною ромба?

4.7. Тупий кут ромба дорівнює 130°. Який кут утворює діагональ, проведена із цього кута, зі стороною ромба?

4.8. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 60°. Знайдіть тупий кут ромба.

4.9. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 20°. Знайдіть гострий кут ромба.

2 **4.10.** У ромбі $ABCD$ кут A дорівнює 36°. Знайдіть кути трикутника AOB, де O – точка перетину діагоналей.

4.11. O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$, $\angle B = 118°$. Знайдіть кути трикутника BOC.

4.12. Сума довжин трьох сторін ромба дорівнює 21 см. Знайдіть його периметр.

4.13. Сума довжин двох сторін ромба дорівнює 16 см. Знайдіть периметр ромба.

4.14. $ABCD$ – ромб, $\angle 2 = 66°$ (мал. 4.9). Знайдіть $\angle 1$.

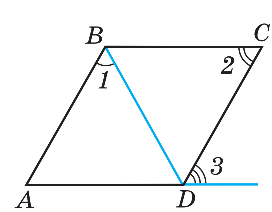
4.15. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 58°$ (мал. 4.9). Знайдіть $\angle 2$.

4.16. $ABCD$ – ромб, $\angle 1 = 55°$ (мал. 4.9). Знайдіть $\angle 3$.

4.17. $ABCD$ – ромб, $\angle 3 = 50°$ (мал. 4.9). Знайдіть $\angle 1$.

4.18. У ромбі $ABCD$ $AB = BD$. Знайдіть кути ромба.

4.19. (*Усно.*) Які спільні властивості мають ромб і паралелограм?



Мал. 4.9

4.20. Знайдіть кути ромба, якщо:
1) сума двох його кутів дорівнює 80°;
2) один з них на 20° більший за другий.

4.21. Знайдіть кути ромба, якщо:
1) сума двох його кутів дорівнює $210°$;
2) один з них на $50°$ менший від другого.

4.22. (*Усно.*) Чи правильне твердження:
1) якщо в чотирикутнику діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом;
2) якщо в чотирикутнику діагоналі не перпендикулярні, то він не може бути ромбом;
3) існує ромб, який є прямокутником;
4) жоден прямокутник не є ромбом?

3

4.23. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює $10°$.

4.24. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, які відносяться як $2 : 3$.

4.25. Побудуйте ромб:
1) за стороною і діагоналлю; 2) за діагоналями.

4.26. Побудуйте ромб за стороною і кутом.

4.27. У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BM і BN. Доведіть, що $BM = BN$.

4.28. У ромбі $ABCD$ з вершин тупих кутів проведено висоти BK і DL. Доведіть, що $BK = DL$.

4.29. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут $110°$. Знайдіть кути ромба.

4.30. Висоти, проведені з вершини тупого кута ромба, утворюють між собою кут $50°$. Знайдіть кути ромба.

4

4.31. Діагональ ромба, проведена з вершини тупого кута, утворює з висотою, проведеною із цієї самої вершини, кут $30°$. Менша діагональ ромба дорівнює a см. Знайдіть:
1) кути ромба; 2) периметр ромба.

4.32. У ромбі висота, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Знайдіть: 1) кути ромба;
2) периметр ромба, якщо його менша діагональ дорівнює b см.

4.33. На діагоналі AC ромба $ABCD$ позначено точки M і N такі, що $AM = CN$. Доведіть, що чотирикутник $DMBN$ є ромбом (розгляньте два випадки розміщення точок M і N).

4.34. Доведіть, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба.

4.35. У рівносторонній трикутник ABC вписано ромб $AMNK$ так, що трикутник і ромб мають спільний кут A, а точка N лежить на стороні BC. Знайдіть периметр трикутника, якщо периметр ромба дорівнює 40 см.

Вправи для повторення

4.36. Сторони паралелограма відносяться як $5 : 2$. Знайдіть периметр паралелограма, якщо різниця цих сторін дорівнює 15 см.

4.37. Один з кутів трикутника дорівнює сумі двох інших. Знайдіть найбільшу сторону цього трикутника, якщо медіана, проведена до неї, дорівнює 5 см.

4.38. Периметр трикутника дорівнює $2p$ см. Чи може одна з його сторін дорівнювати:
1) $(p - 1)$ см; 2) p см; 3) $(p + 1)$ см?

4.39. У чотирикутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає бісектриси кутів B і D під прямим кутом. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

4.40. Знайдіть периметр і площу квадрата, сторона якого дорівнює:

1) 5 см; 2) 2,1 дм; 3) $\frac{3}{4}$ м; 4) $1\frac{1}{2}$ дм.

Життєва математика

4.41. Кімната в будинку Іщуків має 5 м завдовжки, 3,5 м завширшки і 3 м заввишки. Площа дверей і вікон становить $\frac{1}{6}$ частину від усієї площі стін.
1) Скільки рулонів шпалер потрібно, щоб обклеїти цю кімнату, якщо довжина рулону становить 10 м, а ширина – 0,5 м?
2) Скільки коштів витратить родина на шпалери, якщо один рулон коштує 180 грн? Враховуйте, якщо купувати шпалери на суму більшу за 1000 грн, магазин робить знижку 5 %.

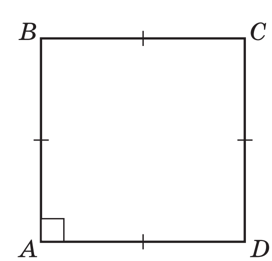
Цікаві задачі – поміркуй одначе

4.42. (*Київська міська олімпіада, 1987 р.*) Вписане в трикутник ABC коло дотикається до сторони BC у точці K. Доведіть, що відрізок AK довший за діаметр кола.

§ 5. Квадрат і його властивості

1. Означення та властивості квадрата

Квадратом **називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.**

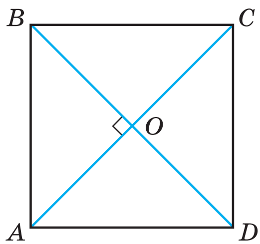


Мал. 5.1

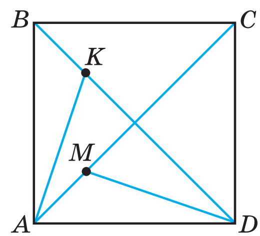
На малюнку 5.1 зображено квадрат $ABCD$. Прямокутник є паралелограмом, тому і квадрат – паралелограм, у якого всі сторони рівні, тобто він є і ромбом. Отже, квадрат має властивості прямокутника та ромба.

Сформулюємо *властивості квадрата*.

1. **Усі кути квадрата прямі.**
2. **Периметр квадрата $P_{ABCD} = 4AB$.**
3. **Діагоналі квадрата між собою рівні** (мал. 5.2).
4. **Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл** (мал. 5.2).
5. **Діагоналі квадрата ділять його кути навпіл, тобто утворюють кути 45° зі сторонами квадрата** (мал. 5.2).
6. **Точка перетину діагоналей квадрата рівновіддалена від усіх його вершин: $AO = BO = CO = DO$.**



Мал. 5.2



Мал. 5.3

Приклад 1. Точки K і M належать відповідно діагоналям BD і AC квадрата $ABCD$, причому $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$. Доведіть, що $\triangle ADM = \triangle BAK$ (мал. 5.3).

Доведення. 1) $\angle MAD = \angle ABK = 45°$, $AD = AB$ (як сторони квадрата).

2) Оскільки $AC = BD$ (як діагоналі квадрата) і $AM = \frac{1}{4}AC$, $BK = \frac{1}{4}BD$, то $AM = BK$.

3) Тому $\triangle ADM = \triangle BAK$ (за двома сторонами та кутом між ними). ■

2. Ознаки квадрата

Розглянемо *ознаки квадрата*.

Т Теорема (ознаки квадрата). **1) Якщо діагоналі прямокутника взаємно перпендикулярні, то він є квадратом. 2) Якщо діагоналі ромба між собою рівні, то він є квадратом.**

Доведення. 1) Прямокутник є паралелограмом, а паралелограм із взаємно перпендикулярними діагоналями є ромбом. Отже, у заданого прямокутника всі сторони рівні, а тому він є квадратом.

2) Ромб є паралелограмом, а паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником. Отже, у розглядуваного ромба всі кути прямі, а тому він є квадратом. ■

Приклад 2. Доведіть, що коли в чотирикутнику всі сторони рівні й усі кути рівні, то цей чотирикутник – квадрат.

Доведення. 1) Оскільки в чотирикутнику всі кути рівні, то, за ознакою прямокутника, він є прямокутником.

2) Оскільки в прямокутника всі сторони рівні, то він є квадратом. ■

А ще раніше...

Термін «квадрат» походить від латинського *quadratum* (*quadrate* – зробити чотирикутним).

Відомий історик математики Д. Д. Мордухай-Болтовський (1876–1952) писав: «Першим чотирикутником, з яким познайомилася геометрія, був квадрат».

* * *

Часто в українській вишивці зустрічається й квадрат.

Наші предки ототожнювали квадрат із земним началом, із символом родючості. Квадрат популярний надто у чоловічих вишиванках, перехрещений квадрат означає енергію землі.

Це символ магічного числа 4, що позначає матерію. Символізує чотири пори року, сторони світу, частини доби, життєві цикли. Це символ Сонця, Творця, чоловічого начала. Квадрат символом простору, ізольованого від лихих помислів. Він мав захищати господарів від різних зурочень.

Яку фігуру називають квадратом? ○ Сформулюйте властивості квадрата. ○ Сформулюйте й доведіть ознаки квадрата.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **5.1.** Периметр квадрата дорівнює 24 см. Знайдіть його сторону.

5.2. Сторона квадрата дорівнює 5 дм. Знайдіть його периметр.

5.3. (*Усно.*) На малюнку 5.2 зображено квадрат $ABCD$. Назвіть рівні між собою відрізки на цьому малюнку.

5.4. Якщо чотирикутник є квадратом, то його діагоналі рівні та взаємно перпендикулярні. Чи правильне обернене твердження? Наведіть приклад.

2 **5.5.** Точка перетину діагоналей квадрата міститься на відстані 3 см від однієї з його вершин. Знайдіть суму довжин діагоналей цього квадрата.

5.6. Сума довжин діагоналей квадрата дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до однієї з його вершин.

5.7. Сума довжин двох сторін квадрата дорівнює 12 см. Знайдіть периметр квадрата.

5.8. Сума довжин трьох сторін квадрата дорівнює 15 дм. Знайдіть периметр квадрата.

5.9. (*Усно.*) Які спільні властивості мають квадрат і ромб?

5.10. (*Усно.*) Які спільні властивості мають квадрат і прямокутник?

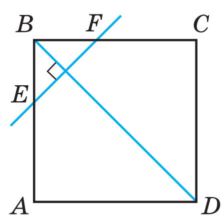
5.11. Різниця між периметром квадрата і його стороною дорівнює 18 см. Знайдіть сторону квадрата та його периметр.

5.12. Сусідні сторони прямокутника рівні. Доведіть, що він є квадратом.

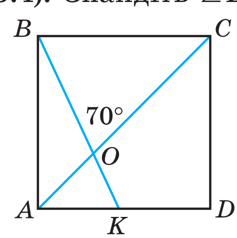
5.13. Один з кутів ромба – прямий. Доведіть, що цей ромб є квадратом.

5.14. (*Усно.*) Чи правильне твердження:
1) кожний квадрат є прямокутником;
2) існує квадрат, який не є ромбом;
3) кожний ромб є квадратом;
4) кожний квадрат є ромбом;
5) будь-який прямокутник є квадратом;
6) відношення периметра квадрата до його сторони є сталим для всіх квадратів?

5.15. $ABCD$ – квадрат, $EF \perp BD$ (мал. 5.4). Знайдіть $\angle BFE$.



Мал. 5.4



Мал. 5.5

5.16. $ABCD$ – квадрат, $\angle BOC = 70°$ (мал. 5.5). Знайдіть $\angle OKA$.

5.17. Побудуйте квадрат за його:
1) периметром; 2) діагоналлю.

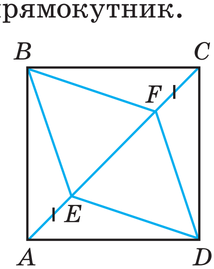
5.18. Побудуйте квадрат за сумою його діагоналей.

5.19. Точка перетину діагоналей квадрата віддалена від його сторони на 3 см. Знайдіть периметр квадрата.

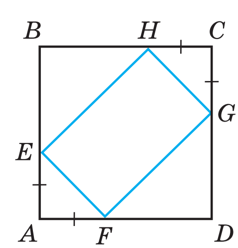
5.20. Периметр квадрата дорівнює 32 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторін.

5.21. $ABCD$ – квадрат, $AE = FC$ (мал. 5.6). Доведіть, що $BEDF$ – ромб.

5.22. $ABCD$ – квадрат, $AE = AF = CG = CH$ (мал. 5.7). Доведіть, що $EFGH$ – прямокутник.



Мал. 5.6



Мал. 5.7

5.23. До кола із центром у точці O з точки A проведено дві взаємно перпендикулярні дотичні AB і AC, B і C – точки дотику. Доведіть, що $ABOC$ – квадрат.

4 **5.24.** У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано квадрат $CMNK$ так, що прямий кут у них спільний, а точка N належить стороні AB. Катет трикутника дорівнює b см. Знайдіть периметр квадрата.

5.25. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано квадрат $KMNL$ так, що точки K і M лежать на гіпотенузі трикутника, а точки L і N – на катетах AC і BC відповідно. Периметр квадрата дорівнює 12 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

5.26. На сторонах квадрата зовні побудовано рівносторонні трикутники. Доведіть, що вершини трикутників, які не є вершинами заданого квадрата, є вершинами іншого квадрата.

Вправи для повторення

5.27. У ромбі $ABCD$ діагональ утворює з однією зі сторін кут 30°. Знайдіть кути ромба.

5.28. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 3 : 4 : 10$. Знайдіть кути чотирикутника. Опуклим чи неопуклим є цей чотирикутник?

5.29. Бісектриса кута B прямокутника $ABCD$ ділить сторону AD на відрізки AK і KD так, що $AK : KD = 3 : 5$. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 110 см.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

5.30. 1) Накресліть чотирикутник, дві сторони якого між собою паралельні, а дві інші – непаралельні.
2) Яка найбільша кількість гострих кутів може бути в такому чотирикутнику?

Життєва математика

5.31. Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги в класній кімнаті має бути не менше ніж 0,2. Чи дотримано цих норм у класній кімнаті, довжина якої – 12 м, а ширина становить 35 % від довжини, якщо в класі три вікна розміром 2 × 1,7 м?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

5.32. О 12-й годині годинна та хвилинна стрілки збігаються. Через яку найменшу кількість хвилин стрілки знову збіжаться?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1 (§§1–5)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Укажіть відрізок, що є діагоналлю чотирикутника $ABCD$.

А. AB **Б.** BD **В.** BC **Г.** AD

2. Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 35°.

А. 125° **Б.** 135° **В.** 145° **Г.** 155°

3. Знайдіть сторону квадрата, якщо його периметр дорівнює 36 см.

А. 4 см **Б.** 6 см **В.** 9 см **Г.** 12 см

2

4. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а одна з його сторін на 2 см більша за другу. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

А. 5 см **Б.** 6 см **В.** 7 см **Г.** 8 см

5. $ABCD$ – ромб, $\angle A = 50°$ (мал. 1). Знайдіть $\angle ABD$.

А. 55° **Б.** 50° **В.** 75° **Г.** 65°

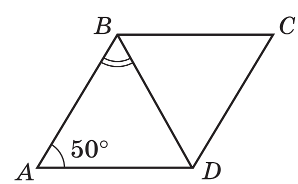
6. Укажіть правильне твердження:

А. якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні, то він є ромбом

Б. відношення периметра ромба до його сторони є сталим для всіх ромбів

В. якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником

Г. відношення периметра прямокутника, який не є квадратом, до його найбільшої сторони є незмінним для всіх прямокутників



Мал. 1

3

7. Знайдіть найбільший кут чотирикутника, у якого градусні міри кутів пропорційні числам 2; 3; 5 і 8.

А. 120° **Б.** 130° **В.** 150° **Г.** 160°

8. Висоти, які проведено з вершини тупого кута паралелограма, утворюють між собою кут 30°. Знайдіть тупий кут паралелограма.

А. 120° **Б.** 130° **В.** 150° **Г.** 160°

9. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 40°.

А. 25° **Б.** 30° **В.** 50° **Г.** 60°

4

10. Бісектриса кута D паралелограма $ABCD$ ділить сторону AB на відрізки AK і KB так, що $AK : KB = 1 : 3$. Знайдіть AB, якщо периметр паралелограма дорівнює 60 см.

А. 26 см **Б.** 24 см **В.** 20 см **Г.** 15 см

11. З вершини тупого кута A ромба $ABCD$ проведено висоту AK. $\angle CAK = 30°$, $AC = 6$ см. Знайдіть периметр ромба.

А. 18 см **Б.** 24 см **В.** 30 см **Г.** 36 см

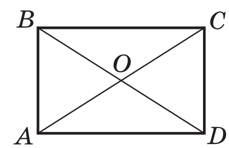
12. У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$, $AC = BC$) вписано квадрат $KLMN$ так, що $K \in AB$, $L \in AB$, $M \in CB$, $N \in AC$. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AB = 12$ см.

А. 24 см **Б.** 20 см **В.** 12 см **Г.** 16 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O (мал. 2). Кут ABO на 18° менший від кута AOB. Установіть відповідність між кутами (1–3) та їхніми градусними мірами (А–Г).

Кут	*Градусна міра кута*
1. $\angle ABO$	**А.** 36°
2. $\angle AOB$	**Б.** 48°
3. $\angle OAD$	**В.** 54°
	Г. 72°



Мал. 2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–5

1. Накресліть чотирикутник $MNPL$ і проведіть його діагоналі.

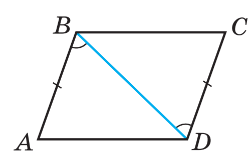
2. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них дорівнює 80°.

3. Знайдіть периметр квадрата, якщо його сторона дорівнює 7 см.

4. Периметр прямокутника дорівнює 18 см. Знайдіть його сторони, якщо одна з них на 1 см більша за другу.

5. $ABCD$ – ромб, $\angle ABD = 50°$. Знайдіть кути ромба.

6. На малюнку 3 $\angle ABD = \angle BDC$, $AB = DC$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 3

7. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 4, 6. Опуклим чи неопуклим він є?

8. Висоти, проведені з вершини гострого кута ромба, утворюють між собою кут 120°. Знайдіть кути ромба.

9. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки BK і KC так, що $BK : KC = 4 : 3$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

Додаткові завдання

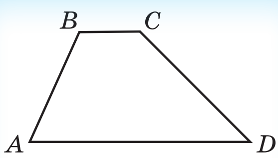
10. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $BC = 23$ см вписано прямокутник $KLMN$ так, що точки K і L належать гіпотенузі трикутника, а точки M і N – катетам. Сторона KL прямокутника на 2 см більша за сторону LM. Знайдіть периметр прямокутника.

11. З вершини тупого кута В ромба $ABCD$ проведено висоту BM, $\angle D$BM = 30°. Периметр ромба дорівнює 40 см. Знайдіть меншу діагональ ромба.

§ 6. Трапеція

1. Означення трапеції, її елементи та властивості

Трапецією **називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні.**



Трапеція *ABCD*

AD і BC – ***основи трапеції*** – це паралельні сторони;

AB і CD – ***бічні сторони трапеції*** – це непаралельні сторони.

Розглянемо деякі *властивості трапеції*.

1. Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.

Оскільки $AD \parallel BC$, то $\angle A + \angle B = 180°$ (як сума внутрішніх односторонніх кутів). Аналогічно $\angle C + \angle D = 180°$. ■

2. Трапеція є опуклим чотирикутником.

Оскільки $\angle A + \angle B = 180°$, то $\angle A < 180°$, $\angle B < 180°$. Аналогічно $\angle C < 180°$, $\angle D < 180°$. Отже, трапеція – опуклий чотирикутник.

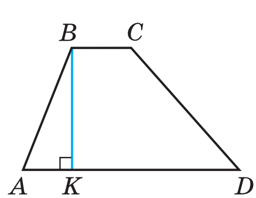
2. Висота трапеції

Висотою трапеції **називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки основи трапеції до прямої, що містить протилежну основу.**

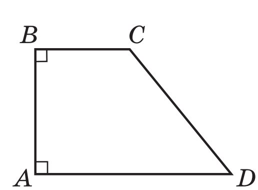
Зазвичай висоту трапеції проводять з її вершини. На малюнку 6.1 BK – висота трапеції $ABCD$.

3. Прямокутна трапеція

Трапецію називають ***прямокутною***, якщо один з її кутів – прямий. На малюнку 6.2 – прямокутна трапеція $ABCD$ ($\angle A = 90°$). Очевидно, що $\angle B = 90°$. AB є меншою бічною стороною прямокутної трапеції і її висотою.



Мал. 6.1



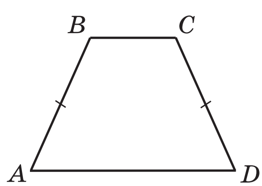
Мал. 6.2

Приклад 1. У прямокутній трапеції гострий кут на $30°$ менший від тупого. Знайти ці кути трапеції.

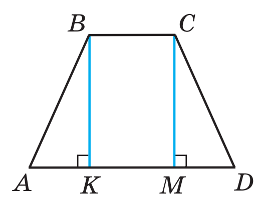
Розв'язання. Розглянемо прямокутну трапецію $ABCD$ (мал. 6.2).
1) Позначимо $\angle D = x$, тоді $\angle C = x + 30°$.
2) Оскільки сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює $180°$, то маємо $\angle C + \angle D = 180°$; $x + x + 30° = 180°$; $x = 75°$.
3) Отже, $\angle D = 75°$; $\angle C = 75° + 30° = 105°$.
Відповідь: $75°$; $105°$.

4. Рівнобічна трапеція та її властивості

Трапецію називають ***рівнобічною***, якщо її бічні сторони рівні. На малюнку 6.3 – рівнобічна трапеція $ABCD$.



Мал. 6.3



Мал. 6.4

Розглянемо деякі важливі *властивості рівнобічної трапеції*.

1. У рівнобічній трапеції кути при основі між собою рівні.

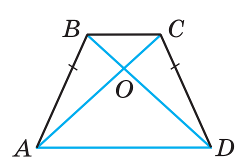
Доведення. 1) Нехай у трапеції $ABCD$ $AB = CD$. Проведемо висоти трапеції BK і CM з вершин її тупих кутів B і C (мал. 6.4). Утворився прямокутник $BKMC$. Тому $BK = CM$.

2) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $\angle BAD = \angle CDA$.

3) Також $\angle ABK = \angle DCM$. Оскільки $\angle KBC = \angle MCB = 90°$, то $\angle ABC = \angle ABK + 90°$ і $\angle DCB = \angle DCM + 90°$. Тому $\angle ABC = \angle DCB$. ■

2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

Доведення. Розглянемо малюнок 6.5. $\angle BAD = \angle CDA$ (як кути при основі рівнобічної трапеції), $AB = DC$, AD – спільна сторона трикутників ABD і DCA. Тому $\triangle ABD = \triangle DCA$ (за двома сторонами та кутом між ними). Отже, $AC = BD$. ■



Мал. 6.5

Приклад 2. O – точка перетину діагоналей рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AD і BC (мал. 6.5). Довести, що $AO = OD$, $BO = OC$.

Доведення. 1) $\triangle ABD = \triangle DCA$ (доведено вище).
2) Тому $\angle ODA = \angle OAD$. За ознакою рівнобедреного трикутника – трикутник AOD – рівнобедрений. Тому $AO = OD$.
3) Оскільки $AC = BD$ і $AO = OD$, то $OC = BO$ (бо $OC = AC - AO$, $BO = BD - OD$). ■

Приклад 3. BK і CM – висоти рівнобічної трапеції $ABCD$, проведені з вершин її тупих кутів, $AD = a$, $BC = b$ (мал. 6.4). Довести, що $AK = MD = \dfrac{a-b}{2}$; $AM = KD = \dfrac{a+b}{2}$.

Доведення. 1) $\triangle ABK = \triangle DCM$ (за катетом і гіпотенузою), тому $AK = MD$.

2) $BKMC$ – прямокутник, тому $KM = BC = b$.

3) $AK = MD = \dfrac{AD - KM}{2} = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{a-b}{2}$.

4) $AM = AD - DM = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{2a - a + b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

5) $KD = AD - AK = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

Отже, довели, що $AK = MD = \dfrac{a-b}{2}$; $AM = KD = \dfrac{a+b}{2}$. ■

5. Ознака рівнобічної трапеції

Т Теорема (ознака рівнобічної трапеції). **Якщо в трапеції кути при одній основі рівні, то трапеція – рівнобічна.**

Доведення. 1) Нехай у трапеції $ABCD$ кути при більшій основі AD рівні (мал. 6.4), тобто $\angle BAD = \angle CDA$. Проведемо висоти BK і CM, які рівні між собою.

2) Тоді $\triangle BAK = \triangle CDM$ (за катетом і протилежним кутом). Тому $AB = DC$. Трапеція рівнобічна, що й треба було довести. ■

А ще раніше...

Термін «трапеція» грецького походження (грецькою мовою «трапедзіон» означає «столик», зокрема столик для обіду; слова «трапеція» і «трапеза» – однокореневі).

У своїй праці «Начала» Евклід під терміном «трапеція» розумів будь-який чотирикутник, який не є паралелограмом. Більшість математиків середньовіччя використовувала термін «трапеція» з тим самим змістом.

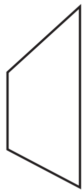
Трапеція в сучасному розумінні вперше зустрічається в давньогрецького математика Посидонія (І ст.). Проте, лише починаючи з XVIII ст. цей термін став загальновживаним для чотирикутників, у яких дві сторони паралельні, а дві інші – непаралельні.

Яку фігуру називають трапецією? ○ Що називають основами трапеції, бічними сторонами трапеції? ○ Сформулюйте властивості трапеції. ○ Що таке висота трапеції? ○ Яку трапецію називають прямокутною, яку – рівнобічною? ○ Сформулюйте й доведіть властивості рівнобічної трапеції. ○ Сформулюйте й доведіть ознаку рівнобічної трапеції.

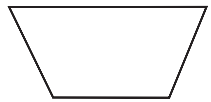
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

6.1. На яких малюнках (6.6–6.10) зображено трапецію?

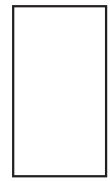
Мал. 6.6



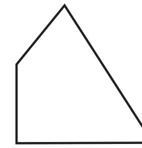
Мал. 6.7



Мал. 6.8



Мал. 6.9



Мал. 6.10

6.2. Накресліть трапецію $PKML$ ($PK \parallel ML$). Укажіть основи трапеції, бічні сторони трапеції.

6.3. Накресліть трапецію $DMFK$ ($DM \parallel FK$). Укажіть основи трапеції, бічні сторони трапеції.

6.4. Накресліть прямокутну трапецію $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90°$).

6.5. Накресліть рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$).

6.6. Два кути трапеції дорівнюють 30° і 110°. Знайдіть два інших її кути.

6.7. Два кути трапеції дорівнюють 100° і 50°. Знайдіть два інших кути трапеції.

6.8. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 10 см, а периметр 28 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

6.9. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 7 см і 5 см, а бічна сторона – 3 см. Знайдіть периметр трапеції.

6.10. Чи існує трапеція, у якої два протилежних кути:
1) гострі; 2) прямі; 3) тупі?
У разі ствердної відповіді накресліть таку трапецію.

6.11. Чи існує трапеція, у якої:
1) основи між собою рівні;
2) три сторони між собою рівні?
У разі ствердної відповіді накресліть таку трапецію.

6.12. Чи існує трапеція, у якої:
1) три кути прямі;
2) два протилежних кути рівні?
У разі ствердної відповіді накресліть таку трапецію.

6.13. Сторони AD і BC – основи трапеції $ABCD$. Доведіть, що $\angle CAD = \angle ACB$.

6.14. Чи можуть кути трапеції, узяті в послідовному порядку, відноситись як:
1) 2 : 3 : 4 : 1; 2) 2 : 3 : 5 : 2?

6.15. Чи можуть кути трапеції, узяті в послідовному порядку, відноситись як:
1) 3 : 1 : 2 : 2; 2) 3 : 1 : 2 : 4?

6.16. У трапеції, яка не є рівнобічною, два кути дорівнюють $40°$ і $140°$. Чи можна знайти два інших її кути?

6.17. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини гострого кута, утворює з бічною стороною кут $42°$. Знайдіть кути трапеції.

6.18. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, утворює з бічною стороною кут $54°$. Знайдіть кути трапеції.

6.19. У трапеції $ABCD$ AB – більша основа. Прямі BC і AD перетинаються в точці E. $\angle ECD = 40°$, $\angle BEA = 70°$. Знайдіть кути трапеції.

6.20. У трапеції $ABCD$ BC – менша основа. На відрізку AD взято точку E так, що $BE \parallel CD$, $\angle ABE = 60°$, $\angle BEA = 40°$. Знайдіть кути трапеції.

6.21. У прямокутній трапеції гострий кут удвічі менший від тупого. Знайдіть кути трапеції.

6.22. У прямокутній трапеції тупий кут на $40°$ більший за гострий. Знайдіть кути трапеції.

6.23. У рівнобічній трапеції бічна сторона вдвічі більша за висоту. Знайдіть кути трапеції.

3

6.24. У трапеції $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Визначте вид трапеції.

6.25. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює $60°$. Більша бічна сторона й більша основа дорівнюють по 16 см. Знайдіть меншу основу.

6.26. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює $45°$. Менша бічна сторона й менша основа дорівнюють по 18 см. Знайдіть більшу основу.

6.27. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі і утворює з нею кут $40°$. Знайдіть кути трапеції.

6.28. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює меншій основі, а діагональ утворює із цією основою кут $20°$. Знайдіть кути трапеції.

6.29. Діагональ AC трапеції $ABCD$ ділить кут A навпіл. Доведіть, що бічна сторона AB дорівнює основі BC.

6.30. O – точка перетину бісектрис кутів A і B трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Доведіть, що $\angle AOB = 90°$.

6.31. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу трапеції на відрізки 2 см і 7 см. Знайдіть основи трапеції.

4

6.32. (*Ознака рівнобічної трапеції.*) Якщо в трапеції діагоналі між собою рівні, то вона – рівнобічна. Доведіть це.

6.33. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.

6.34. У рівнобічній трапеції $ABCD$ AD – більша основа. $AD = CD$, $\angle BAC = 18°$. Знайдіть кути трапеції.

6.35. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, а її діагоналі взаємно перпендикулярні. Доведіть, що висота трапеції дорівнює $\frac{a+b}{2}$.

6.36. У прямокутній трапеції гострий кут і кут, який утворює менша діагональ з меншою основою, дорівнюють 60°. Знайдіть відношення основ трапеції.

6.37. У прямокутній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а тупий кут утричі більший за гострий. Знайдіть відношення основ.

6.38. Побудуйте трапецію за основами a і b ($a > b$) та бічними сторонами c і d.

Вправи для повторення

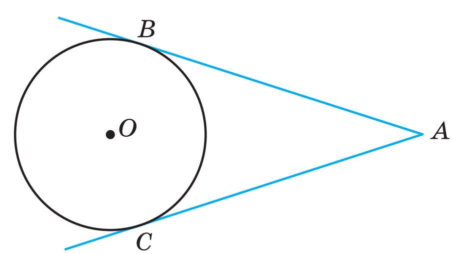
6.39. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 75°. Знайдіть зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами.

6.40. Тупий кут ромба дорівнює 120°, а його менша діагональ – 5 см. Знайдіть периметр ромба.

6.41. Доведіть, що паралелограм, у якого всі висоти рівні, є ромбом.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

6.42. З точки A до кола проведено дві дотичні, B і C – точки дотику (мал. 6.11). Знайдіть довжини відрізків AB і AC дотичних, якщо їхня сума дорівнює 16 см.



Мал. 6.11

Життєва математика

6.43. Тренувальний зал у формі прямокутника має розміри 3,8 × 5,2 м, у ньому є двері 80 см завширшки.

1) Скільки метрів плінтуса потрібно придбати для цього залу?

2) Скільки коштуватиме ця покупка, якщо ціна одного погонного метра плінтуса 50 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

6.44. Чотири магазини підприємниці розташовані у вершинах опуклого чотирикутника. Де їй слід розмістити товарний склад, щоб сума відстаней від складу до всіх магазинів була найменшою?

§ 7. Вписані та описані чотирикутники

1. Чотирикутник, вписаний у коло, його властивість

Чотирикутник **називають** ***вписаним у коло*****, якщо всі його вершини лежать на колі.** ***Коло*** **при цьому називають** ***описаним*** **навколо чотирикутника** (мал. 7.1).

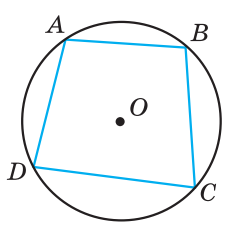
Теорема 1 (властивість кутів вписаного чотирикутника). **Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.**

Доведення. Нехай у коло із центром O вписано чотирикутник $ABCD$ (мал. 7.1).

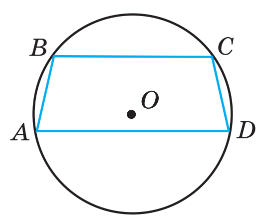
1) Тоді $\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DCB}$, $\angle C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DAB}$ (за теоремою про вписаний кут).

2) Тому $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DCB} + \overset{\frown}{DAB}) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

3) Тоді $\angle B + \angle D = 360° - 180° = 180°$. ■



Мал. 7.1



Мал. 7.2

Наслідок 1. **Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона рівнобічна.**

Доведення. Нехай трапеція $ABCD$ вписана в коло, $AD \parallel CB$ (мал. 7.2).

1) Тоді $\angle A + \angle C = 180°$.

2) Але ж у трапеції $\angle D + \angle C = 180°$. Тому $\angle A = \angle D$. Отже, $ABCD$ – рівнобічна трапеція (за ознакою рівнобічної трапеції). ■

Наслідок 2. **Якщо чотирикутник** $\boldsymbol{ABCD}$ **вписаний у коло, то** $\boldsymbol{\angle A + \angle C = \angle B + \angle D}$**.**

Приклад 1. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло (мал. 7.1). $\angle A : \angle C = 3 : 2$, а градусна міра кута D на $10°$ більша за градусну міру кута C. Знайти кути чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання.
1) Оскільки чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, то $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.
2) Оскільки $\angle A : \angle C = 3 : 2$, то позначимо $\angle A = 3x$, $\angle C = 2x$. Тоді $3x + 2x = 180°$; $x = 36°$; $\angle A = 3 \cdot 36° = 108°$; $\angle C = 2 \cdot 36° = 72°$.
3) Можемо далі знайти градусну міру кута $\angle D$: $\angle D = \angle C + 10° = 72° + 10° = 82°$.
4) $\angle B = 180° - \angle D = 180° - 82° = 98°$.
Відповідь: $\angle A = 108°$; $\angle B = 98°$; $\angle C = 72°$; $\angle D = 82°$.

2. Ознака вписаного чотирикутника

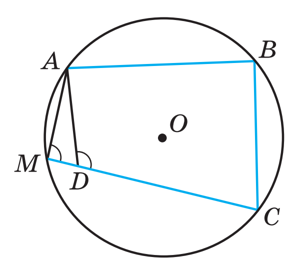
Ви знаєте з курсу геометрії 7 класу, навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Про чотирикутники те саме сказати не можна.

Т Теорема 2 (ознака вписаного чотирикутника). **Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.**

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle C = 180°$. Проведемо через точки A, B і C коло. Доведемо, що вершина D чотирикутника також лежатиме на цьому колі (методом від супротивного).

1) Припустимо, що вершина D лежить усередині кола (мал. 7.3). Продовжимо CD до перетину з колом у точці M. Тоді $\angle B + \angle D = 180°$ (за умовою) і $\angle M + \angle B = 180°$ (за властивістю кутів вписаного чотирикутника). Звідси $\angle D = \angle M$. Але ж $\angle ADC$ – зовнішній, а $\angle AMC$ – не суміжний з ним внутрішній кут трикутника ADM. Тому $\angle ADC$ має бути більшим за $\angle AMC$. Прийшли до протиріччя, отже, наше припущення хибне і точка D не може лежати всередині кола.



Мал. 7.3

2) Аналогічно можна довести, що вершина D не може лежати зовні кола.

3) Отже, точка D лежить на колі (мал. 7.1), а тому навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло. ■

Н Наслідок 1. **Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.**

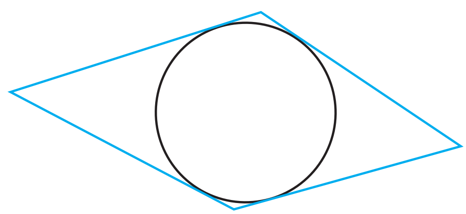
Н Наслідок 2. **Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.**

Як і для трикутника, центром кола, описаного навколо чотирикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

Так, наприклад, центр кола, описаного навколо прямокутника, збігається з точкою перетину його діагоналей.

3. Чотирикутник, описаний навколо кола, його властивість

Чотирикутник **називають** ***описаним навколо кола*****, якщо всі його сторони дотикаються до кола.** ***Коло*** **при цьому називають** ***вписаним*** **у чотирикутник** (мал. 7.4).



Мал. 7.4

Теорема 3 (властивість сторін описаного чотирикутника). **В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін між собою рівні.**

Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ – описаний, P, L, K, T – точки дотику (мал. 7.5).

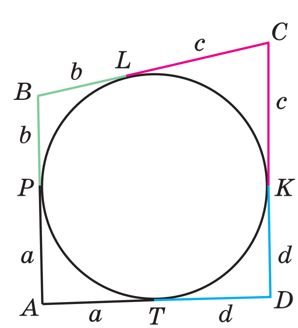
1) За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки до кола, $AP = AT = a$, $BP = BL = b$, $CK = CL = c$, $DK = DT = d$. На малюнку 7.5 рівні між собою відрізки позначено однаковим кольором.

2) Тоді

$AD + BC = AT + TD + BL + LC = a + d + b + c$;

$AB + CD = AP + PB + CK + KD = a + b + c + d$.

3) Отже, $AD + BC = AB + CD$. ■



Мал. 7.5

Наслідок. **Якщо чотирикутник** $\boldsymbol{ABCD}$ **описаний навколо кола, то** $\boldsymbol{AB + CD = AD + BC = \frac{P_{ABCD}}{2}}$**, де** $\boldsymbol{P_{ABCD}}$ **– периметр чотирикутника** $\boldsymbol{ABCD}$**.**

4. Ознака описаного чотирикутника

З геометрії 7 класу ви знаєте, що у будь-який трикутник можна вписати коло.

Про чотирикутник те саме сказати не можна.

Т Теорема 4 (ознака описаного чотирикутника). **Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.**

Доведення цієї теореми є досить громіздким, тому його не наводимо.

Н Наслідок. **У будь-який ромб можна вписати коло.**

! Як і для трикутника, центром кола, вписаного в чотирикутник, є точка перетину бісектрис його кутів.

Оскільки діагоналі ромба є бісектрисами його кутів, то центром кола, вписаного в ромб, є точка перетину діагоналей.

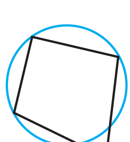
Приклад 2. Чи можна вписати коло у чотирикутник, сторони якого у порядку слідування дорівнюють:
1) 5 см, 7 см, 6 см, 4 см; 2) 9 дм, 7 дм, 4 дм, 3 дм?

Розв'язання. 1) Оскільки $5 + 6 = 7 + 4$, то у цей чотирикутник можна вписати коло.
2) $9 + 4 \neq 7 + 3$. Тому у такий чотирикутник вписати коло неможливо.
Відповідь: 1) так; 2) ні.

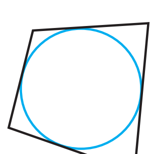
? Який чотирикутник називають вписаним у коло? ○ Сформулюйте й доведіть властивість кутів вписаного чотирикутника. ○ Сформулюйте наслідок із цієї властивості. ○ Сформулюйте ознаку вписаного чотирикутника та наслідки з неї. ○ Який многокутник називають описаним навколо кола? ○ Сформулюйте й доведіть властивість сторін описаного чотирикутника. ○ Сформулюйте ознаку описаного чотирикутника та наслідок з неї.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

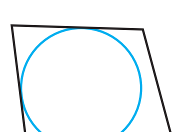
1 **7.1.** На яких малюнках (7.6–7.10) зображено вписані чотирикутники, а на яких – описані?



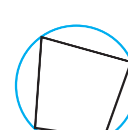
Мал. 7.6



Мал. 7.7



Мал. 7.9



Мал. 7.10

7.2. Чи можна навколо чотирикутника $ABCD$ описати коло, якщо:
1) $\angle A = 30°$, $\angle C = 150°$;
2) $\angle B = 90°$, $\angle D = 80°$?

7.3. Чи може чотирикутник $MNKL$ бути вписаним у коло, якщо:
1) $\angle M = 20°$, $\angle K = 150°$;
2) $\angle N = 90°$, $\angle L = 90°$?

2

7.4. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого в порядку слідування відносяться як:
1) 5 : 3 : 4 : 7; 2) 3 : 2 : 4 : 5?

7.5. Чи може бути описаним чотирикутник, сторони якого в порядку слідування відносяться як:
1) 7 : 3 : 2 : 6; 2) 5 : 4 : 3 : 6?

7.6. Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 133°$, $\angle D = 28°$.

7.7. Знайдіть кути C і D чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle A = 139°$, $\angle B = 48°$.

3

7.8. У рівнобічну трапецію, периметр якої дорівнює 16 см, вписано коло. Знайдіть бічну сторону трапеції.

7.9. Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 5 дм. Знайдіть периметр трапеції.

7.10. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AH_1 і BH_2, які перетинаються в точці H. Доведіть, що навколо чотирикутника CH_1HH_2 можна описати коло, діаметром якого буде відрізок CH.

7.11. Точка M лежить на стороні AB гострокутного трикутника ABC. MP і MK – перпендикуляри до сторін AC і BC відповідно. Доведіть, що навколо чотирикутника $MPCK$ можна описати коло, діаметром якого буде відрізок CM.

4

7.12. Трапецію вписано в коло радіуса R так, що діаметр кола є її більшою основою. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює бічній стороні.

Вправи для повторення

7.13. AB – основа рівнобедреного трикутника ABC, I – центр вписаного кола. $\angle AIB = \alpha$ $(\alpha > 90°)$. Знайдіть кути трикутника ABC.

7.14. AB – основа рівнобедреного трикутника ABC, O – центр описаного кола. $\angle AOB = \alpha$ $(\alpha < 180°)$. Знайдіть кути трикутника ABC. Скільки випадків слід розглянути?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

7.15. Пряма EK паралельна стороні AB трикутника ABC, $E \in AC$, $K \in BC$. Доведіть, що $\angle CKE = \angle CBA$, $\angle CEK = \angle CAB$.

Життєва математика

7.16. З року в рік лісівники Вінниччини залучають до акції «Майбутнє лісу – у твоїх руках!» школярів. Так, учасники учнівських лісництв заклали для висаджування саджанців дуба ділянку прямокутної форми 15 м завдовжки і 8 м завширшки. Скільки мішків чорнозему знадобилося для її закладання, якщо на кожний квадратний метр ділянки потрібно 40 кг чорнозему, а мішок вміщує 100 кг?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

7.17. Побудуйте спільну зовнішню дотичну до двох кіл різних радіусів, які не мають спільних точок.

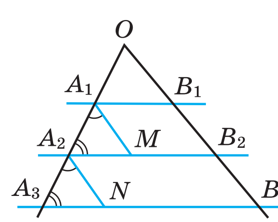
§ 8. Теорема Фалеса

1. Теорема Фалеса та наслідок з неї

Теорема Фалеса. **Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні між собою відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки і на другій його стороні.**

Доведення. Нехай паралельні прямі A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 8.1), причому $A_1A_2 = A_2A_3$. Доведемо, що $B_1B_2 = B_2B_3$.

1) Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі A_1M і A_2N, паралельні прямій OB_3. $A_1A_2 = A_2A_3$ (за умовою), $\angle A_2A_1M = \angle A_3A_2N$ (як відповідні кути при паралельних прямих A_1M і A_2N), $\angle A_1A_2M = \angle A_2A_3N$ (як відповідні кути при паралельних прямих A_2M і A_3N). Тому $\triangle A_1A_2M = \triangle A_2A_3N$ (за стороною і двома прилеглими кутами), а значить $A_1M = A_2N$ (як відповідні сторони рівних трикутників).



Мал. 8.1

2) Чотирикутник $A_1MB_2B_1$ – паралелограм (за побудовою). Тому $A_1M = B_1B_2$. Аналогічно $A_2NB_3B_2$ – паралелограм, тому $A_2N = B_2B_3$. Отже, $A_1M = A_2N$, $A_1M = B_1B_2$, $A_2N = B_2B_3$. Звідки $B_1B_2 = B_2B_3$, що й треба було довести. ■

Н Наслідок. **Паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі та відтинають на одній з них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на другій прямій.**

2. Поділ відрізка на кілька рівних частин

За теоремою Фалеса можна поділити відрізок на будь-яку кількість рівних частин, використовуючи лінійку без поділок.

Приклад. Поділити відрізок AB на 6 рівних частин.

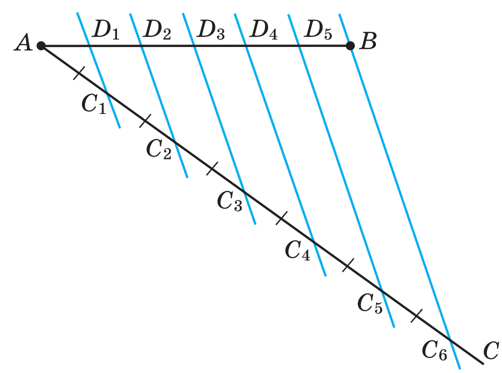
Розв'язання. 1) Нехай AB – даний відрізок (мал. 8.2). Проведемо довільний промінь AC і відкладемо на ньому циркулем послідовно 6 відрізків:

$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5 = C_5C_6$.

2) Через точки C_6 і B проведемо пряму.

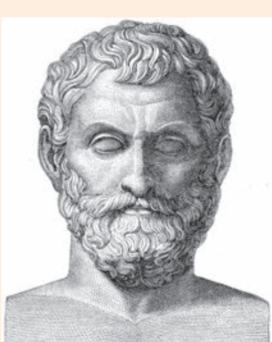
3) Через точки C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 проведемо за допомогою косинця і лінійки прямі, паралельні прямій BC_6. За теоремою Фалеса ці прямі поділять відрізок AB на 6 рівних між собою частин:

$$AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5 = D_5B.$$



Мал. 8.2

А ще раніше...


Фалес Мілетський (бл. 625–548 рр. до н. е.)

Фалес Мілетський – давньогрецький математик й астроном. Його вважають одним з так званих семи мудреців світу, адже він був одним з найвидатніших математиків свого часу.

Ще в молоді роки допитливий юнак вирушив у подорож до Єгипту, щоб ознайомитися з єгипетською культурою та вивчати природничі науки. Там здібний та обдарований Фалес не тільки швидко вивчив те, що на той час уже було відомо єгипетським ученим, а й зробив низку власних наукових відкриттів. Він самостійно визначив висоту єгипетських пірамід за їхньою тінню, чим дуже здивував єгипетського фараона Амазіса. А повернувшись на батьківщину, заснував у Мілеті філософську школу.

Історики вважають, що Фалес був першим, хто ознайомив греків з геометрією, і став першим грецьким астрономом. Фалес передбачив сонячне затемнення, яке відбулося 28 травня 585 року до н. е.

На гробниці Фалеса вирізьблено: «Наскільки є малою ця гробниця, настільки великою є слава цього царя астрономії в царині зірок».

Сформулюйте й доведіть теорему Фалеса.

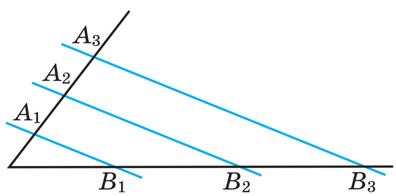
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

8.1. (*Усно.*) На малюнку 8.3 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 4$ см, $A_2A_3 = 4$ см, $B_1B_2 = 7$ см. Знайдіть B_2B_3.

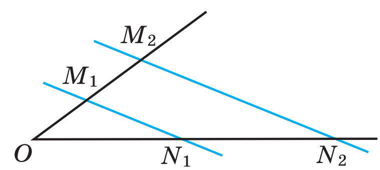
8.2. На малюнку 8.3 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $B_1B_2 = B_2B_3$, $A_2A_3 = 5$ см. Знайдіть A_1A_2.

8.3. На малюнку 8.4 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $OM_1 = M_1M_2$, $ON_1 = 6$ см. Знайдіть ON_2.

8.4. На малюнку 8.4 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 = 7$ см, $N_1N_2 = 7$ см, $OM_1 = 4$ см. Знайдіть OM_2.



Мал. 8.3



Мал. 8.4

8.5.[1] Поділіть заданий відрізок на 5 рівних частин.

8.6. Поділіть заданий відрізок на 7 рівних частин.

8.7. Поділіть заданий відрізок на дві частини, відношення яких дорівнює 2 : 5.

8.8. Поділіть заданий відрізок на дві частини у відношенні 3 : 2.

8.9. На малюнку 8.3 $A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 : B_1B_2 = 3 : 5$, $B_2B_3 - A_2A_3 = 8$ см. Знайдіть A_1A_2, A_2A_3, B_1B_2, B_2B_3.

8.10. На малюнку 8.4 $ON_1 = N_1N_2$, $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 : OM_1 = 7 : 4$, $N_1N_2 + M_1M_2 = 33$ см. Знайдіть ON_2 і OM_2.

8.11. M і N – відповідно середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Відрізки MD і BN перетинають діагональ AC у точках L і K відповідно. Доведіть, що $AL = LK = KC$.

8.12. Точки E, F і G ділять медіану AD трикутника ABC на чотири рівні частини ($AE = EF = FG = GD$). Доведіть, що пряма CG ділить сторону AB у відношенні 3 : 2, починаючи від вершини A.

8.13. Точки M і N ділять медіану AD трикутника ABC на три рівні частини ($AM = MN = ND$). Доведіть, що пряма BN містить медіану трикутника.

8.14. Точка K – середина медіани AD трикутника ABC. Відрізок BK перетинає сторону AC у точці M. Знайдіть $AM : MC$.

[1] Задачі 8.5–8.8 потрібно розв'язати із застосуванням лінійки без поділок.

Вправи для повторення

8.15. Побудуйте відрізок AB завдовжки 5 см та геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

8.16. З точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, які віддалені від центра на відстані 5 см і 7 см. Знайдіть довжини цих хорд.

Життєва математика

8.17. Висота футбольних воріт – відстань від нижнього контура перекладини до поверхні землі – 8 футів. Ширина футбольних воріт – відстань між стійками – 8 ярдів. Знайдіть в інтернеті як перевести фути та ярди в метри й обчисліть площу футбольних воріт у м^2. Результат округліть до десятих м^2.

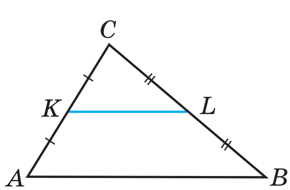
Цікаві задачі – поміркуй одначе

8.18. (*Всеукраїнська олімпіада з математики, 1976 р.*) Усередині гострокутного трикутника ABC дано точку P таку, що $\angle APB = \angle ACB + 60°$, $\angle BPC = \angle BAC + 60°$, $\angle CPA = \angle CBA + 60°$. Доведіть, що основи перпендикулярів, проведених з точки P до сторін трикутника ABC, є вершинами рівностороннього трикутника.

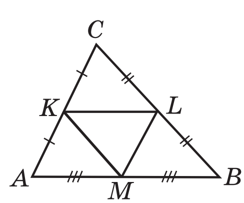
§ 9. Середня лінія трикутника, її властивості

1. Означення середньої лінії трикутника та її властивість

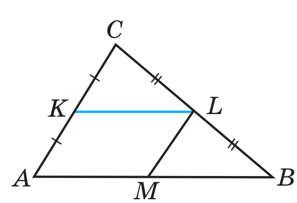
Середньою лінією трикутника **називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.**



Мал. 9.1



Мал. 9.2



Мал. 9.3

На малюнку 9.1 KL – середня лінія трикутника ABC.

Кожний трикутник має три середні лінії. На малюнку 9.2 відрізки KL, LM, KM — середні лінії $\triangle ABC$.

Теорема 1 (властивість середньої лінії трикутника). **Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.**

Доведення. Нехай KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 9.2). Доведемо, що $KL \parallel AB$ і $KL = \frac{1}{2}AB$.

1) Проведемо через точку L пряму, паралельну AB. За теоремою Фалеса вона перетинає сторону AC в її середині, тобто в точці K (мал. 9.3). Отже, ця пряма містить середню лінію KL. Тому $KL \parallel AB$.

2) Проведемо через точку L пряму, паралельну AC, яка перетинає AB у точці M (мал. 9.2). Тоді $AM = MB$ (за теоремою Фалеса). Чотирикутник $AKLM$ – паралелограм. $KL = AM$ (за властивістю паралелограма), але $AM = \frac{1}{2}AB$. Тому $KL = \frac{1}{2}AB$. ■

Приклад 1. Периметр трикутника ABC дорівнює P. Знайти периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай ABC — заданий трикутник, KL, LM і MK — його середні лінії (мал. 9.2). За умовою $AB + BC + CA = P$.

1) Оскільки KL — середня лінія $\triangle ABC$, то $KL = \frac{AB}{2}$. Аналогічно $KM = \frac{BC}{2}$, $ML = \frac{AC}{2}$.

2) Знайдемо периметр $\triangle KLM$. Маємо:

$$P_{\triangle KLM} = KL + KM + ML = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{P}{2}.$$

Відповідь: $\frac{P}{2}$.

Приклад 2. Довести, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма, один з кутів якого дорівнює куту між діагоналями чотирикутника.

Доведення. Нехай $ABCD$ – даний чотирикутник, а точки K, L, M, N – середини його сторін (мал. 9.4).

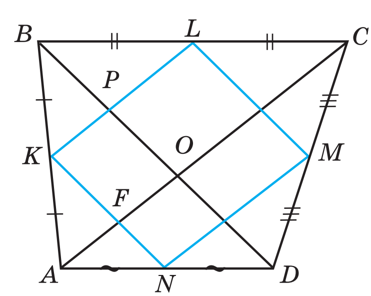
1) KL – середня лінія трикутника ABC, тому $KL \parallel AC$ і $KL = \frac{1}{2}AC$.

Аналогічно $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

2) Отже, $KL \parallel MN$, $KL = MN$. Тоді $KLMN$ – паралелограм (за ознакою паралелограма).

3) KN – середня лінія трикутника ABD. Тому $KN \parallel BD$.

Отже, $KFOP$ – також паралелограм, звідки: $\angle NKL = \angle BOA$. ■



Мал. 9.4

2. Властивість медіан трикутника

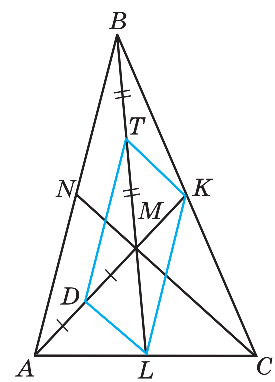
Розглянемо властивість медіан трикутника.

> Т Теорема 2 (властивість медіан трикутника). **Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.**

Доведення. Нехай M – точка перетину медіан AK і CN трикутника ABC (мал. 9.5).

1) Побудуємо чотирикутник $LDTK$, де D – середина AM, T – середина BM.

2) DT – середня лінія трикутника ABM, тому $DT \parallel AB$ і $DT = \frac{1}{2}AB$.



Мал. 9.5

3) KL – середня лінія трикутника ABC, тому $KL \parallel AB$ і $KL = \frac{1}{2}AB$.

4) Отже, $DT \parallel KL$ і $DT = KL$. Тому $DTKL$ – паралелограм (за ознакою).

5) M – точка перетину діагоналей TL і DK паралелограма $DTKL$, тому $MT = ML$, $DM = MK$. Але $MT = BT$, $DM = AD$. Тоді $BT = TM = ML$ і $AD = DM = MK$. Отже, точка M ділить кожну з медіан AK і BL у відношенні 2 : 1, починаючи від вершин A і B відповідно.

6) Точка перетину медіан AK і CN має також ділити у відношенні 2 : 1 кожну медіану. Оскільки існує єдина точка – точка M, яка в такому відношенні ділить медіану AK, то медіана CN також проходить через цю точку.

7) Отже, три медіани трикутника перетинаються в одній точці й цією точкою діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника. ■

Точку перетину медіан ще називають *центром мас трикутника*, або *центроїдом трикутника*.

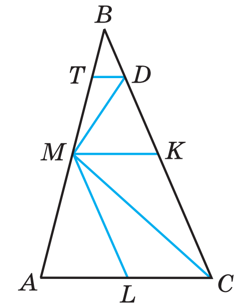
? Що називають середньою лінією трикутника? ○ Сформулюйте й доведіть властивість середньої лінії трикутника. ○ Сформулюйте властивість медіан трикутника.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **9.1.** (*Усно.*) Які відрізки на малюнку 9.6 є середніми лініями трикутника ABC, де $AM = MB$, $BK = KC$, $AL = LC$?

9.2. Накресліть довільний тупокутний трикутник MNK і його найбільшу середню лінію.

9.3. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC і його середню лінію, кінці якої належать бічним сторонам.



Мал. 9.6

9.4. KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 9.2).
1) $AB = 16$ см. Знайдіть KL;
2) $KL = 5$ дм. Знайдіть AB.

9.5. KL – середня лінія трикутника ABC (мал. 9.2).
1) $AB = 18$ см. Знайдіть KL;
2) $KL = 3$ дм. Знайдіть AB.

2

9.6. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін рівнобедреного трикутника, дорівнює 7 см. Знайдіть основу трикутника.

9.7. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 14 дм. Знайдіть довжину відрізка, що сполучає середини бічних сторін трикутника.

9.8. Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см.

9.9. Сторони трикутника дорівнюють 12 дм, 16 дм і 18 дм. Знайдіть периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії цього трикутника.

9.10. Дано: ED – середня лінія трикутника ABC, $E \in AC$, $D \in BC$. Довести: $\angle CED = \angle CAB$.

9.11. (*Усно.*) Визначте вид трикутника, якщо:
1) дві його середні лінії рівні між собою;
2) три його середні лінії рівні між собою.

9.12. Дано трикутник, периметр якого дорівнює 24 см. Знайдіть периметр трикутника, вершини якого є серединами сторін цього трикутника.

9.13. Периметр трикутника, вершини якого – середини сторін заданого трикутника, дорівнює 18 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

3

9.14. Сторони трикутника відносяться як 4 : 3 : 5. Знайдіть його сторони, якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями заданого трикутника, дорівнює 60 см.

9.15. Периметр трикутника дорівнює 80 см. Сторони трикутника, утвореного середніми лініями заданого трикутника, відносяться як 4 : 9 : 7. Знайдіть сторони цього трикутника.

9.16. Сторона трикутника дорівнює 10 см, а одна із середніх ліній – 6 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з них у 1,5 раза більша за другу. Скільки випадків слід розглянути?

9.17. E, F, G, H – середини сторін AB, BC, CD і DA опуклого чотирикутника $ABCD$. Знайдіть периметр чотирикутника $EFGH$, якщо $AC = 16$ см, $BD = 10$ см.

9.18. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін цього прямокутника.

9.19. O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$. Точки M і K – середини сторін AD і DC відповідно. Доведіть, що $MK \perp OD$.

9.20. AK – медіана рівнобедреного трикутника ABC з основою BC. Точки P і F – середини сторін AB і AC відповідно. Доведіть, що $PF \perp AK$.

9.21. Доведіть, що коли два трикутники рівні, то рівні й трикутники, вершинами яких є середини сторін цих трикутників.

4 **9.22.** Точка M – середина катета AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Відстань від точки M до гіпотенузи дорівнює a см. Знайдіть гіпотенузу.

9.23. Точка K – середина катета BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою $AB = 20$ см. Знайдіть відстань від точки K до гіпотенузи.

9.24. Доведіть, що середини сторін ромба є вершинами прямокутника.

9.25. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) M – точка перетину медіан. Відомо, що $AM = 8$ см. Знайдіть відстань від середини бічної сторони до основи трикутника.

9.26. Середина бічної сторони рівнобедреного трикутника KLM ($KL = KM$) віддалена від основи трикутника на 9 см. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до вершини K.

Вправи для повторення

9.27. У трикутнику ABC: $\angle A = 40°$, $\angle B = 80°$, O – центр описаного кола. Знайдіть $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$.

9.28. Одна з діагоналей ромба утворює зі стороною кут 30°, а друга діагональ дорівнює 7 см. Знайдіть периметр ромба.

9.29. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють a і b ($a > b$), а гострий кут – 60°. Знайдіть:
1) бічну сторону трапеції;
2) периметр трапеції;
3) умову, за якої в трапецію можна вписати коло.

Життєва математика

9.30. Обчисліть, скільки кубічних метрів повітря очистять за рік від автомобільних вихлопних газів 50 каштанів, посаджених уздовж дороги. Відомо, що одне дерево за рік очищує зону 100 м завдовжки, 12 м завширшки, 10 м заввишки.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

9.31. Чи існує трикутник, дві бісектриси якого взаємно перпендикулярні?

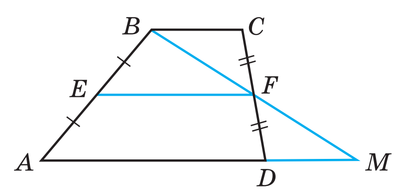
§ 10. Середня лінія трапеції, її властивості

Середньою лінією трапеції **називають відрізок, що сполучає середини її бічних сторін.**

Розглянемо властивість середньої лінії трапеції.

Т Теорема (властивість середньої лінії трапеції). **Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.**

Доведення. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, EF – її середня лінія (мал. 10.1). Доведемо, що $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$ і $EF = \frac{AD + BC}{2}$.



Мал. 10.1

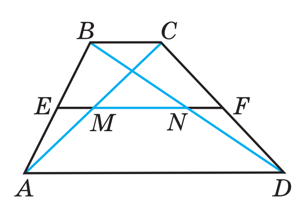
1) Проведемо промінь BF до його перетину з променем AD. Нехай M – точка їхнього перетину. Тоді $\angle BCF = \angle MDF$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AM та січній CD), $\angle CFB = \angle DFM$ (як вертикальні кути), $CF = FD$ (за умовою). Отже, $\triangle CFB = \triangle DFM$ (за стороною і двома прилеглими кутами), звідки $BF = FM$, $BC = DM$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

2) Оскільки $BF = FM$, то EF – середня лінія трикутника ABM. Тоді, за властивістю середньої лінії трикутника, $EF \parallel AM$, отже, $EF \parallel AD$. А оскільки $AD \parallel BC$, то $EF \parallel BC$.

3) Окрім того, $EF = \frac{1}{2}AM = \frac{AD + DM}{2} = \frac{AD + BC}{2}$. ■

Приклад 1. Довести, що відрізок середньої лінії трапеції, який міститься між її діагоналями, дорівнює піврізниці основ.

Доведення. Нехай EF – середня лінія трапеції $ABCD$, M – точка перетину AC і EF, N – точка перетину BD і EF (мал. 10.2). Нехай $AD = a$, $BC = b$. Доведемо, що $MN = \frac{a - b}{2}$.



Мал. 10.2

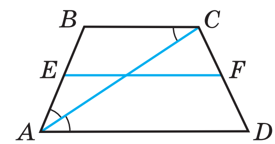
1) Оскільки $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$ і $AE = BE$, то за теоремою Фалеса: M – середина AC, N – середина BD. Тому EM – середня лінія трикутника ABC, NF – середня лінія трикутника DBC. Тоді $EM = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$, $NF = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$.

2) EF – середня лінія трапеції, тому $EF = \frac{a + b}{2}$.

3) $MN = EF - (EM + NF) = \frac{a + b}{2} - \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) = \frac{a - b}{2}$. ■

Приклад 2. У рівнобічній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Знайти середню лінію трапеції, якщо її основи відносяться як 3 : 7, а периметр – 48 см.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – дана трапеція, $BC : AD = 3 : 7$, $\angle CAD = \angle BAC$, EF – середня лінія (мал. 10.3).



Мал. 10.3

1) Позначимо $BC = 3x$, $AD = 7x$. Тоді

$$EF = \frac{AD + BC}{2} = \frac{7x + 3x}{2} = \frac{10x}{2} = 5x \text{ (см)}.$$

2) $\angle CAD = \angle BCA$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AD і BC та січній AC). $\angle CAD = \angle BAC$ (за умовою). Тому $\angle BCA = \angle BAC$. Отже, $\triangle BAC$ – рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника). Тоді $AB = BC$. Але $AB = CD$ (за умовою). Отже, $AB = BC = CD = 3x$ (см).

3) Оскільки $P_{ABCD} = 48$ см, маємо рівняння:

$7x + 3x + 3x + 3x = 48$, звідки $x = 3$ (см).

4) Тоді $EF = 5 \cdot 3 = 15$ (см).

А ще раніше...

Те, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, було відомо ще давнім єгиптянам; цю інформацію містив папірус Ахмеса (близько XVII ст. до н. е.).

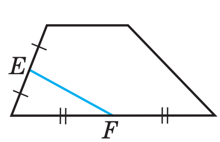
Про властивість середньої лінії трапеції знали й вавилонські землеміри; про неї також згадується й у працях Герона Александрійського (перша половина I ст. н. е.).

Що називають середньою лінією трапеції? ○ Сформулюйте й доведіть властивість середньої лінії трапеції.

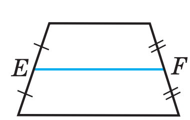
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

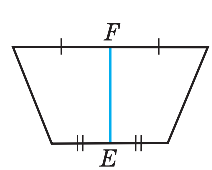
10.1. (*Усно.*) На яких малюнках (10.3–10.6) відрізок EF є середньою лінією трапеції?



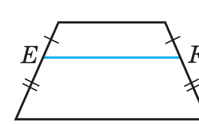
Мал. 10.3



Мал. 10.4



Мал. 10.5



Мал. 10.6

10.2. Основи трапеції дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

10.3. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її основи дорівнюють 8 см і 12 см.

2

10.4. Знайдіть основу трапеції, якщо її друга основа дорівнює 8 см, а середня лінія – 6 см.

10.5. Одна з основ трапеції дорівнює 4 см, а середня лінія – 9 см. Знайдіть другу основу трапеції.

10.6. Одна з основ трапеції дорівнює 8 см, а друга – удвічі більша за неї. Знайдіть відстань між серединами бічних сторін трапеції.

10.7. Розв’яжіть задачі, умови яких подано у таблиці, та прочитайте прізвище видатної української легкоатлетки, рекорд світу якої з потрійних стрибків тримався 26 років. Знайдіть в інтернеті інформацію про інші видатні досягнення українських спортсменок і спортсменів.

AB і CD — основи традиції $ABCD$, середня лінія якої дорівнює 30 см. Знайдіть AB і CD, якщо:	AB	CD
$AB - CD = 8$ см	В	А
AB у 4 рази менша від CD	К	Ц
$AB : CD = 3 : 2$	Е	Р

12 см	24 см	26 см	34 см	36 см	48 см	
						Ь

10.8. Середня лінія трапеції дорівнює 16 см. Знайдіть основи трапеції, якщо:
1) одна з них на 2 см менша від другої;
2) одна з них утричі більша за другу;
3) їх відношення дорівнює 3 : 5.

10.9. K – точка перетину діагоналі BD трапеції $ABCD$ з її середньою лінією MN. Доведіть, що $BK = KD$.

10.10. Бічні сторони трапеції дорівнюють 7 см і 9 см, а її середня лінія – 10 см. Знайдіть периметр трапеції.

10.11. Бічні сторони трапеції дорівнюють 10 см і 12 см, а її периметр – 52 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

3

10.12. Чи може середня лінія трапеції:
1) дорівнювати одній з основ;
2) бути меншою від меншої основи;
3) бути більшою за більшу основу;
4) бути вдвічі меншою від більшої основи?

10.13. EF – середня лінія трапеції $ABCD$, яка перетинає діагональ BD у точці N, $EN = 5$ см, $NF = 3$ см. Знайдіть основи трапеції.

10.14. MN – середня лінія трапеції $ABCD$, яка перетинає діагональ AC у точці K. Знайдіть MK і KN, якщо основи трапеції дорівнюють 18 см і 12 см.

10.15. У трапеції $ABCD$ $AD = 30$ см, $BC = 12$ см – основи, а точки E і T – середини AB і AE відповідно. Через E і T проведено прямі, паралельні AD. Знайдіть відрізки цих прямих, що містяться між бічними сторонами трапеції.

10.16. У трапеції $ABCD$ M – середина бічної сторони AB, N – середина MB. Через точки M і N проведено прямі, паралельні BC, які перетинають CD у точках K і L відповідно. $MK = 12$ см, $NL = 8$ см. Знайдіть основи трапеції.

10.17. У рівнобічній трапеції $ABCD$ перпендикуляр, проведений з вершини B на більшу основу AD трапеції, ділить її на відрізки 3 см і 7 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

10.18. З вершини B тупого кута рівнобічної трапеції $ABCD$ проведено висоту BK до основи AD, $AK = 4$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

10.19. Точки A і B лежать по один бік від прямої l. Відстань до неї від точки A дорівнює 7 см, а від точки M, яка є серединою AB, – 5 см. Знайдіть відстань від точки B до прямої l.

10.20. По один бік від прямої a на відстані 10 см і 16 см від неї позначено точки M і N. Знайдіть відстань від середини відрізка MN до прямої a.

4

10.21. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 14 см. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три частини. Знайдіть довжини цих частин.

10.22. Діагоналі ділять середню лінію трапеції на три частини, довжини яких 7 см, 8 см і 7 см. Знайдіть основи трапеції.

10.23. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90°$, $\angle C = 135°$, $AB = 6$ см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

10.24. Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл тупий кут трапеції, а її середню лінію – на відрізки 4 см і 6 см. Знайдіть периметр трапеції.

10.25. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її гострий кут навпіл, а середню лінію – на відрізки 3 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.

Вправи для повторення

10.26. Знайдіть кути M і N чотирикутника $MNKL$, вписаного в коло, якщо $\angle K = 37°$, $\angle L = 119°$.

10.27. Коло вписано в рівнобічну трапецію, бічна сторона якої дорівнює a см. Знайдіть периметр трапеції.

10.28. У прямокутній трапеції тупий кут дорівнює 120°, більша основа – 14 см, а більша бічна сторона – 8 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

Життєва математика

10.29. Ширина захвату сівалки становить 2 м, рухається вона зі швидкістю 6 км/год. Норма висіву насіння – 150 кг на 1 га.

1) Запишіть формулу залежності витрати насіння m (у кг) від часу t (у год).

2) На який час роботи сівалки вистачить 270 кг насіння?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

10.30. Усі стінки й дно картонної коробки без кришки мають форму квадрата зі стороною a. Розріжте розгортку коробки двома розрізами так, щоб з отриманих частин можна було скласти квадрат, площа якого дорівнює $5a^2$.

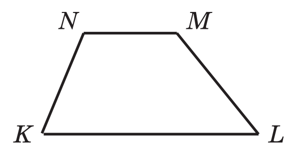
ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2 (§§6–10)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. На малюнку 1 зображено трапецію. Укажіть її основи.

А. KN і ML **Б.** KL і MN
В. KN і MN **Г.** ML і MN



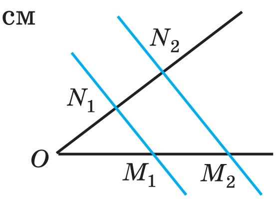
Мал. 1

2. Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть сторону цього трикутника.

А. 3 см **Б.** 9 см **В.** 12 см **Г.** 18 см

3. На малюнку 2 $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, $ON_1 = N_1N_2$, $OM_2 = 16$ см. Знайдіть M_1M_2.

А. 4 см **Б.** 8 см
В. 6 см **Г.** Знайти неможливо



Мал. 2

2

4. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло, $\angle A = 20°$, $\angle B = 100°$. Знайдіть кути C і D цього чотирикутника.

А. $\angle C = 80°$, $\angle D = 160°$
Б. $\angle C = 150°$, $\angle D = 80°$
В. $\angle C = 20°$, $\angle D = 100°$
Г. $\angle C = 160°$, $\angle D = 80°$

5. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см, а бічна сторона – 10 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін заданого трикутника.

А. 11 см **Б.** 12 см **В.** 14 см **Г.** 16 см

6. Середня лінія трапеції дорівнює 20 см, а її основи відносяться як 2 : 3. Знайдіть довжину меншої основи.

А. 16 см **Б.** 24 см **В.** 18 см **Г.** 8 см

3

7. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі і утворює з нею кут 30°. Знайдіть тупий кут трапеції.

А. 110° **Б.** 95° **В.** 105° **Г.** 115°

8. Коло вписано в рівнобічну трапецію, бічна сторона якої дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трапеції.

А. 50 см **Б.** 20 см **В.** 30 см **Г.** 40 см

9. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60°, а більша бічна сторона й менша основа – по 18 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

А. 36 см **Б.** 24 см **В.** 27 см **Г.** 30 см

10. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її гострий кут навпіл, а середню лінію – на відрізки 4 см і 5 см. Знайдіть периметр трапеції.

А. 32 см **Б.** 34 см **В.** 36 см **Г.** 38 см

11. Точка N – середина медіани AD трикутника ABC. BN перетинає AC у точці F. Знайдіть AF, якщо $AC = 18$ см.

А. 6 см **Б.** 9 см **В.** 3 см **Г.** 2 см

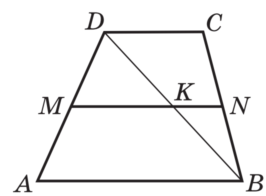
12. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 36 см. Знайдіть відстань від середини катета до гіпотенузи.

А. 12 см **Б.** 6 см **В.** 18 см **Г.** 9 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. MN – середня лінія трапеції $ABCD$ (мал. 3), $MN = 8$ см, $AB = 10$ см. Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Відрізок	*Довжина відрізка*
1. DC	**А.** 3 см
2. MK	**Б.** 4 см
3. KN	**В.** 5 см
	Г. 6 см



Мал. 3

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 6–10

1. Накресліть трапецію $MKPF$ ($MK \parallel PF$). Укажіть її основи та бічні сторони.

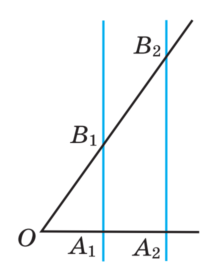
2. Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

3. На малюнку 1 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $OB_1 = B_1B_2$, $OA_1 = 2$ см. Знайдіть OA_2.

4. Знайдіть кути A і B чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle C = 140°$, $\angle D = 70°$.

5. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 12 см і 16 см. Знайдіть периметр трикутника, сторонами якого є середні лінії даного трикутника.

6. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 4 см більша за другу.



Мал. 1

7. Коло вписано в рівнобічну трапецію, периметр якої 20 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

8. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60°, а більша бічна сторона й більша основа дорівнюють по 12 см. Знайдіть меншу основу.

4 **9.** Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її тупий кут, а середню лінію – на відрізки 9 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.

Додаткові завдання

4 **10.** Точки K, L, M ділять медіану BD трикутника ABC на чотири рівні частини ($BK = KL = LM = MD$). AM перетинає BC у точці F. Знайдіть $CF : FB$.

11. Точка D – середина катета BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Відстань від точки D до гіпотенузи трикутника на 15 см менша від гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

1 **1.** Накресліть чотирикутник $AMCN$. Запишіть вершини, сторони та кути цього чотирикутника.

2 **2.** Чи можуть у чотирикутнику три кути бути прямими, а четвертий:
1) гострим; 2) тупим?

3. Два кути чотирикутника дорівнюють 40° і 80°, а два інших між собою рівні. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

3 **4.** Запишіть усі можливі варіанти позначення чотирикутника $ABCD$.

5. Один з кутів чотирикутника на 10° менший від другого, на 50° менший від третього й удвічі менший від четвертого. Знайдіть кути чотирикутника.

4 **6.** Усі сторони чотирикутника між собою рівні. Доведіть, що сума будь-яких двох сусідніх кутів цього чотирикутника дорівнює 180°.

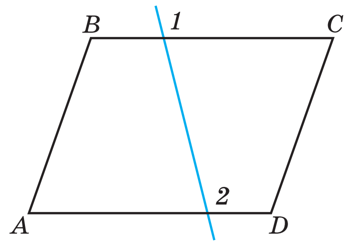
До § 2

1 **7.** Накресліть паралелограм $KMTL$, у якого кут K – тупий. Проведіть діагоналі паралелограма й позначте їхню точку перетину через O. Укажіть на малюнку пари рівних між собою відрізків.

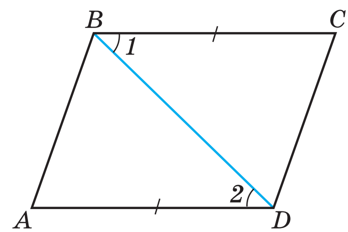
8. На малюнку 2 $ABCD$ – паралелограм, $\angle 1 = 105°$. Знайдіть $\angle 2$.

2 **9.** У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.

10. На малюнку 3 $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.



Мал. 2



Мал. 3

3 **11.** Прямі a і b перетинаються. Побудуйте паралелограм так, щоб його діагоналі лежали на цих прямих.

12. Дано паралелограм $ABCD$ і трикутник ENM. Чи можливо, щоб одночасно виконувалися рівності $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle M$?

13. У паралелограмі $ABCD$ точка M – середина AD, N – середина BC. Доведіть, що відрізки AN і BM точкою перетину діляться навпіл.

14. Дано три точки, що не лежать на одній прямій. Скільки паралелограмів з вершинами в цих точках можна побудувати?

4 **15.** Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, дорівнює куту паралелограма при сусідній вершині.

16. Доведіть, що бісектриси протилежних кутів паралелограма або паралельні, або збігаються.

17. Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 30°. Знайдіть ці висоти, якщо сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 20 см.

18. Побудуйте паралелограм за двома непаралельними сторонами й висотою, проведеною до однієї з них.

До § 3

1 **19.** Накресліть прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см та знайдіть його периметр.

2 **20.** У чотирикутнику точка перетину діагоналей ділить діагоналі на чотири рівних між собою відрізки. З'ясуйте вид чотирикутника.

21. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає продовження сторони DC у точці N. Знайдіть $\angle AND$.

3 **22.** Побудуйте прямокутник за:
1) стороною і діагоналлю;
2) діагоналлю й кутом, який вона утворює з однією зі сторін;
3) діагоналлю й кутом між діагоналями.

23. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону CD у точці M. Знайдіть периметр прямокутника, якщо $DM = 5$ см, $MC = 2$ см.

24. Точка перетину діагоналей прямокутника розміщена від меншої сторони на 2 см далі, ніж від більшої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 см.

25. Перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута прямокутника до діагоналі, ділить її у відношенні 1 : 3. Знайдіть меншу сторону прямокутника, якщо діагональ дорівнює a см.

26. Бісектриси кутів A і D прямокутника $ABCD$ перетинають його сторону BC у точках L і K відповідно, $BL = 7$ см, $LK = 2$ см. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$. Скільки випадків слід розглянути?

До § 4

27. Накресліть ромб $MKLN$ з тупим кутом M та проведіть у ньому висоти MA і MB.

28. У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, $\angle BAO = 25°$. Знайдіть кути ромба.

29. Знайдіть кути ромба, якщо відношення двох з них дорівнює 2 : 3.

30. У ромбі $ABCD$ з вершини гострого кута A проведено висоти AM і AN. Доведіть, що $AM = AN$.

31. Діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні, а його периметр дорівнює m см. Знайдіть сторони паралелограма.

32. Кут між продовженням висоти ромба, проведеної з вершини гострого кута, і продовженням діагоналі, що сполучає вершини тупих кутів, дорівнює 40°. Знайдіть кути ромба.

33. Висота ромба дорівнює 10 см, а його периметр – 80 см. Знайдіть:
1) кути ромба;
2) кут між висотою, проведеною з вершини тупого кута ромба, і його меншою діагоналлю.

34. Побудуйте ромб за діагоналлю й висотою.

35. На сторонах прямокутника зовні нього побудовано рівносторонні трикутники. Доведіть, що вершини трикутників є вершинами ромба.

До § 5

36. Накресліть квадрат, сторона якого дорівнює 3 см. Знайдіть периметр квадрата.

37. Різниця між периметром квадрата та сумою трьох його сторін дорівнює 8 см. Знайдіть сторону квадрата і його периметр.

38. У задане коло, положення центра якого відоме, впишіть квадрат.

39. Діагональ прямокутника ділить його кут навпіл. Чи є прямокутник квадратом?

4 **40.** На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ позначено точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, що $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Визначте вид чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$.

41. У квадрат вписано прямокутник так, що на кожній стороні квадрата лежить по одній вершині прямокутника, а сторони прямокутника паралельні діагоналям квадрата. Знайдіть периметр прямокутника, якщо діагональ квадрата дорівнює d см.

До § 6

1 **42.** Накресліть прямокутну трапецію $NMLK$ і рівнобічну $DCFH$. Укажіть основи трапецій та їхні бічні сторони.

2 **43.** Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої 8 см і 5 см, а бічні сторони дорівнюють меншій основі.

44. У рівнобічній трапеції один з кутів на 20° більший за другий. Знайдіть кути трапеції.

45. У прямокутній трапеції більша бічна сторона вдвічі більша за висоту. Знайдіть кути трапеції.

46. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо протилежні її кути відносяться як 4 : 5.

3 **47.** У трапеції $ABCD$ з більшою основою AD через точку K – середину CD – проведено пряму BK, що перетинає пряму AD у точці M. Доведіть, що $\triangle BKC = \triangle MKD$.

48. Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, утворює з бічною стороною кут 30° і ділить навпіл більшу основу. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо більша бічна сторона дорівнює m см.

49. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а її основи дорівнюють 10 см і 6 см. Знайдіть периметр трапеції.

50. $ABCD$ – прямокутна трапеція, $\angle D = \angle C = 90°$, AD – більша основа, $\angle BDC = 45°$, $\angle ABD = 90°$, $AD = 10$ см. Знайдіть BC і CD.

51. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює 5 см, бічна сторона – 3 см, а кут між бічною стороною і більшою основою дорівнює 60°. Знайдіть периметр трапеції.

4 **52.** У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі, а бічна сторона – меншій. Знайдіть кути трапеції.

53. Побудуйте трапецію за основами та діагоналями.

54. У трапеції $ABCD$ BC – менша основа. Через точку C проведено пряму, паралельну AB, що перетинає AD у точці E. Знайдіть периметр трикутника ECD, якщо периметр трапеції дорівнює 56 см, а $BC = 10$ см.

До § 7

1 **55.** Чи можна вписати коло в чотирикутник $ABCD$, якщо:
1) $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $CD = 4$ см, $DA = 6$ см;
2) $AB = 3$ дм, $BC = 7$ дм, $CD = 8$ дм, $DA = 10$ дм?

2 **56.** Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого в порядку слідування відносяться як:
1) 2 : 7 : 10 : 5; 2) 3 : 5 : 8 : 4?

57. $ABCD$ – чотирикутник, описаний навколо кола, $AB = 3$ см, $BC = 9$ см, $CD = 10$ см. Знайдіть AD.

3 **58.** У чотирикутнику $ABCD$ $\angle ABC = 100°$, $\angle ADC = 80°$, $\angle BDC = 30°$. Знайдіть $\angle BAC$.

59. Три кути чотирикутника, вписаного в коло, відносяться в порядку слідування як 3 : 4 : 6. Знайдіть кути чотирикутника.

4 **60.** Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло, причому AC є діаметром кола. Точка O – точка перетину діагоналей. Знайдіть $\angle AOD$, якщо $\angle BAC = 30°$, $\angle CAD = 58°$.

61. Гострий кут прямокутної трапеції, описаної навколо кола, у 5 разів менший від тупого. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша бічна сторона дорівнює a см.

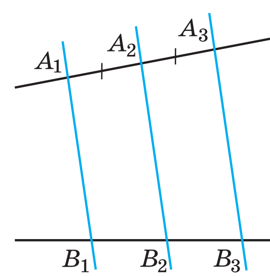
До § 8

1 **62.** На малюнку 4 прямі A_1B_1, A_2B_2 і A_3B_3 – паралельні, $A_1A_2 = A_2A_3$. Знайдіть на цьому малюнку й інші пари рівних між собою відрізків.

2 **63.** Поділіть даний відрізок на 9 рівних частин (не використовувати лінійку з поділками).

3 **64.** Поділіть даний відрізок на 3 частини, довжини яких відносяться як 3 : 1 : 2 (не використовувати лінійку з поділками).

4 **65.** Точка K ділить медіану AN трикутника ABC у відношенні 2 : 1, починаючи від точки A. Доведіть, що пряма CK ділить сторону AB навпіл.



Мал. 4

До § 9

1 **66.** Відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника, дорівнює 5 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

67. Побудуйте довільний прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) і його найбільшу середню лінію.

2 **68.** EF – середня лінія трикутника ABC ($E \in AC$, $F \in BC$), $CE = 3$ см, $CF = 5$ см, $EF = 7$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

69. Одна із середніх ліній рівностороннього трикутника дорівнює 2 см. Знайдіть периметр трикутника.

70. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см, а периметр – 20 см. Знайдіть середню лінію, кінці якої належать бічним сторонам.

71. Точки D, E, F – відповідно середини сторін AB, BC і CA трикутника ABC. Доведіть, що чотирикутник $DEFA$ – паралелограм.

3 **72.** Сторона трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з його середніх ліній дорівнює 5 см, а периметр трикутника, утвореного його середніми лініями, дорівнює 18 см.

73. У трикутнику проведено середні лінії. Периметри паралелограмів, що утворилися при цьому, дорівнюють 22 см, 24 см і 26 см. Знайдіть периметр заданого трикутника та трикутника, який утворюють середні лінії.

4 **74.** Побудуйте трикутник за трьома точками – серединами його сторін.

75. Послідовно сполучили середини сторін квадрата, діагональ якого дорівнює d см. Визначте вид чотирикутника, що при цьому утворився, та обчисліть його периметр.

До § 10

1 **76.** Накресліть трапецію $ABCD$ та її середню лінію EF. Виміряйте основи трапеції та обчисліть довжину її середньої лінії.

2 **77.** Сума бічних сторін трапеції дорівнює 17 см, а середня лінія – 8 см. Знайдіть периметр трапеції.

78. Різниця основ трапеції дорівнює 2 см, а середня лінія – 14 см. Знайдіть основи трапеції.

3 **79.** Основи трапеції дорівнюють 20 см і 12 см. Бічну сторону трапеції поділено на 4 рівні частини й через точки поділу проведено прямі, паралельні основам. Знайдіть відрізки цих прямих, що містяться між сторонами трапеції.

80. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія, 18 см завдовжки, поділяється діагоналлю на відрізки, один з яких удвічі більший за другий.

81. Середня лінія трапеції втричі більша за меншу основу й на 12 см менша від більшої основи. Знайдіть основи трапеції.

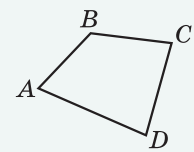
4 **82.** Середня лінія трапеції діагоналями ділиться на відрізки, відношення яких дорівнює 2 : 3 : 2. Знайдіть відношення основ трапеції.

83. Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії.

84. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює a см, бічна сторона – c см, а гострий кут 60°. Знайдіть середню лінію трапеції.

Головне в розділі І

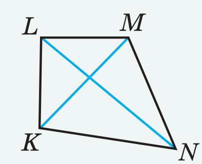
ЧОТИРИКУТНИК, ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. СУМА КУТІВ ЧОТИРИКУТНИКА



Чотирикутник – фігура, що складається із чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають.

Відрізки, які сполучають протилежні вершини чотирикутника, – ***діагоналі*** чотирикутника.

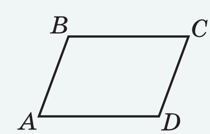
Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.



Якщо всі кути чотирикутника менші від 180°, то він ***опуклий***.

Якщо один з кутів чотирикутника більший за 180°, то він ***неопуклий***.

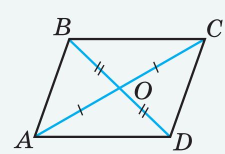
ПАРАЛЕЛОГРАМ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКИ



Паралелограм – чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°.
2. Паралелограм є опуклим чотирикутником.
3. У паралелограмі протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.
4. Периметр паралелограма

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC).$$



5. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

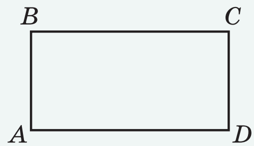
Висота паралелограма – перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.

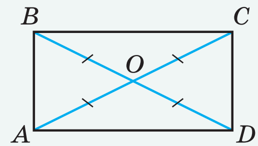
Т е о р е м а (ознаки паралелограма). **Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні й паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються й точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, – то чотирикутник є паралелограмом.**

ПРЯМОКУТНИК І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі.

1. У прямокутнику протилежні сторони рівні.
2. Периметр прямокутника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
3. Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.
4. Діагоналі прямокутника рівні.
5. Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.



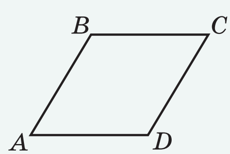


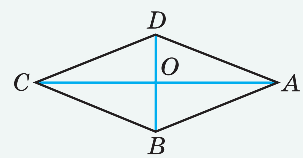
Т е о р е м а (ознаки прямокутника). **Якщо в паралелограма: 1) усі кути рівні, або 2) один кут прямий, або 3) діагоналі рівні, – то паралелограм є прямокутником.**

РОМБ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба дорівнює 180°.
2. У ромба протилежні кути рівні.
3. Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.
4. Периметр ромба $P_{ABCD} = 4AB$.
5. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні й ділять його кути навпіл.



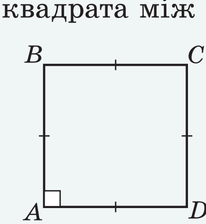


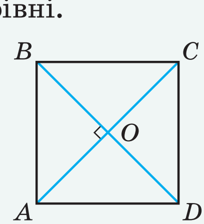
Т е о р е м а (ознаки ромба). **Якщо в паралелограмі: 1) дві сусідні сторони рівні, або 2) діагоналі перетинаються під прямим кутом, або 3) діагональ ділить навпіл кути паралелограма, – то паралелограм є ромбом.**

КВАДРАТ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні.

1. Усі кути квадрата прямі.
2. Периметр квадрата $P_{ABCD} = 4AB$.
3. Діагоналі квадрата між собою рівні.

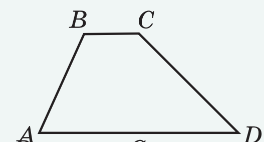




4. Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл.
5. Діагоналі квадрата ділять його кути навпіл, тобто утворюють кути 45° зі сторонами квадрата.
6. Точка перетину діагоналей квадрата рівновіддалена від усіх його вершин: $AO = BO = CO = DO$.

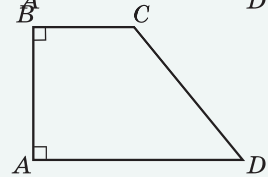
Теорема (ознаки квадрата). **1) Якщо діагоналі прямокутника взаємно перпендикулярні, то він є квадратом. 2) Якщо діагоналі ромба між собою рівні, то він є квадратом.**

ТРАПЕЦІЯ



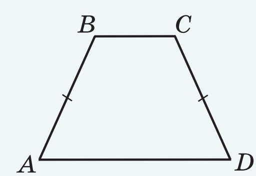
Трапеція – це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні.

Паралельні сторони трапеції – ***основи***, а непаралельні – ***бічні сторони***. На малюнку AD і BC – основи трапеції, AB і CD – її бічні сторони.



1. Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.
2. Трапеція є опуклим чотирикутником.

Висота трапеції – це перпендикуляр, проведений з будь-якої точки основи трапеції до прямої, що містить протилежну основу.



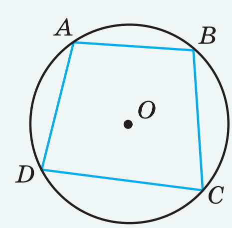
Трапеція ***прямокутна***, якщо один з її кутів прямий.

Трапеція ***рівнобічна***, якщо її бічні сторони рівні.

1. У рівнобічній трапеції кути при основі між собою рівні.
2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

Теорема (ознака рівнобічної трапеції). **Якщо в трапеції кути при одній основі рівні, то трапеція – рівнобічна.**

ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ



Чотирикутник вписаний у коло, якщо всі його вершини лежать на колі. ***Коло*** при цьому – ***описане*** навколо чотирикутника.

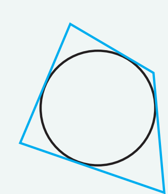
Теорема 1 (властивість кутів вписаного чотирикутника). **Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.**

Наслідок 1. **Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона рівнобічна.**

Теорема 2 (ознака вписаного чотирикутника). **Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.**

Наслідок 1. **Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.**

Наслідок 2. **Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.**



Чотирикутник описаний навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола. ***Коло*** при цьому – ***вписане*** в чотирикутник.

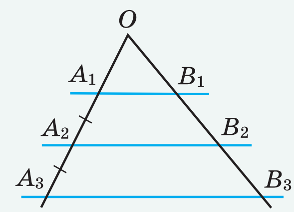
Теорема 3 (властивість сторін описаного чотирикутника). **В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін між собою рівні.**

Теорема 4 (ознака описаного чотирикутника). **Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.**

Наслідок. **У будь-який ромб можна вписати коло.**

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

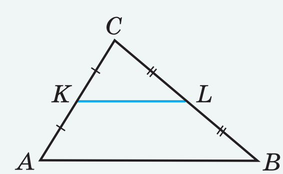
Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні між собою відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки й на другій його стороні.



Наслідок. **Паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі та відтинають на одній з них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки й на другій прямій.**

СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

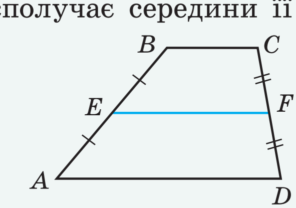
Середня лінія трикутника – це відрізок, який сполучає середини двох його сторін.



Теорема 1 (властивість середньої лінії трикутника). **Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.**

СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Середня лінія трапеції – це відрізок, що сполучає середини її бічних сторін.



Теорема (властивість середньої лінії трапеції). **Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.**

Розділ 2 ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

- **дізнаєтеся** про подібні трикутники та їхні властивості; про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику та їхні властивості; про властивість бісектриси трикутника;
- **навчитесь** обґрунтовувати подібність трикутників, використовувати узагальнену теорему Фалеса та подібність трикутників для розв'язування задач.

§ 11. Узагальнена теорема Фалеса

1. Відношення та пропорційність відрізків

Відношенням відрізків AB і *CD* називають відношення їхніх довжин, тобто $\frac{AB}{CD}$.

Кажуть, що відрізки AB і CD *пропорційні відрізкам* A_1B_1 і C_1D_1, якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$.

Наприклад, якщо $AB = 6$ см, $CD = 8$ см, $A_1B_1 = 3$ см, $C_1D_1 = 4$ см, то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, справді $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$.

Поняття пропорційності можна поширити й на більшу кількість відрізків. Наприклад, три відрізки AB, CD і MN пропорційні трьом відрізкам A_1B_1, C_1D_1 і M_1N_1, якщо

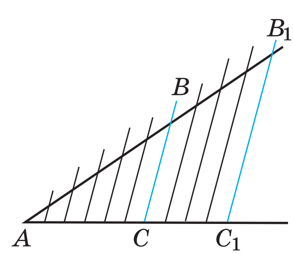
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}.$$

2. Узагальнена теорема Фалеса та наслідки з неї

Узагальнена теорема Фалеса (теорема про пропорційні відрізки). **Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.**

Доведення. Нехай паралельні прямі BC і B_1C_1 перетинають сторони кута A (мал. 11.1). Доведемо, що $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$.

1) Розглянемо випадок, коли довжини відрізків AC і CC_1 є раціональними числами (цілими або дробовими). Тоді існує відрізок завдовжки h, який можна відкласти ціле число разів і на відрізку AC, і на відрізку CC_1. Нехай $AC = a$, $CC_1 = b$, a і b – раціональні числа. Запишемо їх у вигляді дробу з однаковим знаменником: $AC = \frac{p}{n}$, $CC_1 = \frac{q}{n}$. Тому $h = \frac{1}{n}$. Маємо: $AC = ph$, $CC_1 = qh$.



Мал. 11.1

2) Розіб'ємо відрізок AC на p рівних частин завдовжки h, а відрізок CC_1 – на q рівних частин завдовжки h. Проведемо через точки розбиття прямі, паралельні прямій BC (мал. 11.1). За теоремою Фалеса вони розіб'ють відрізок AB_1 на $(p + q)$ рівних відрізків завдовжки h_1, причому AB складатиметься з p таких відрізків, а BB_1 –

з q таких відрізків. Маємо: $AB = ph_1$, $BB_1 = qh_1$.

3) Знайдемо відношення $\frac{AB}{BB_1}$ і $\frac{AC}{CC_1}$. Матимемо:

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{ph_1}{qh_1} = \frac{p}{q} \text{ і } \frac{AC}{CC_1} = \frac{ph}{qh} = \frac{p}{q}.$$

Отже, $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$. ■

Враховуючи, що в пропорції середні члени можна поміняти місцями, з доведеної рівності приходимо до такого.

Наслідок 1. $\boldsymbol{\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}}$.

Наслідок 2. $\boldsymbol{\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}}$.

Доведення. Оскільки $\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}$, то $\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$. Додамо до обох частин цієї рівності по одиниці: $1 + \frac{BB_1}{AB} = 1 + \frac{CC_1}{AC}$, тобто $\frac{AB + BB_1}{AB} = \frac{AC + CC_1}{AC}$.

Враховуючи, що $AB + BB_1 = AB_1$, $AC + CC_1 = AC_1$, матимемо: $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$.

Звідки $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$. ■

3. Побудова четвертого пропорційного відрізка

Розглянемо, як побудувати один із чотирьох відрізків, що утворюють пропорцію, якщо відомо три з них.

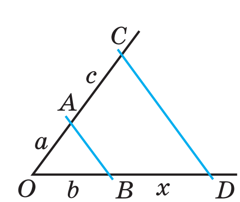
Приклад. Дано відрізки a, b, c. Побудувати відрізок $x = \frac{bc}{a}$.

Розв'язання. Оскільки $x = \frac{bc}{a}$, то $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$ і $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Для побудови відрізка x можна використовувати й узагальнену теорему Фалеса й один з її наслідків. Використаємо, наприклад, наслідок 1.

1) Будуємо нерозгорнутий кут з вершиною O (мал. 11.2). Відкладаємо на одній з його сторін відрізок $OB = b$, а на другій – відрізки $OA = a$ і $AC = c$.

2) Проведемо пряму AB. Через точку C паралельно AB проведемо пряму, яка перетне сторону OB кута



Мал. 11.2

в точці D. Тому: $CD \parallel AB$.

3) За наслідком 1 з узагальненої теореми Фалеса маємо: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{BD}$, звідки $BD = \dfrac{bc}{a}$. Отже, $BD = x$.

Побудований відрізок x називають *четвертим пропорційним відрізків* a, b і c, оскільки справджується рівність $a : b = c : x$.

А ще раніше...

Відношення й пропорції в геометрії використовувалися з давніх-давен. Про це свідчать давньоєгипетські храми, деталі гробниці Менеса в Накаді, піраміди в Гізі (III ст. до н. е.), перські палаци, давньоіндійські пам'ятки тощо.

Гробниця Менеса

Піраміди в Гізі

У сьомій книзі «Начал» Евклід виклав *арифметичну* теорію вчення про відношення, яку застосував тільки до співрозмірних величин і цілих чисел. Теорія виникла на основі дій з дробами та застосовувалася для дослідження властивостей цілих чисел.

У п'ятій книзі Евклід виклав загальну теорію відношень і пропорцій, яку приблизно за 100 років до Евкліда розробив давньогрецький математик, механік й астроном Евдокс (408 р. до н. е. – 355 р. до н. е.). Ця теорія є основою вчення про подібність фігур, яку Евклід виклав у шостій книзі «Начал», де також було розв'язано задачу про ділення відрізка в заданому відношенні.

Пропорційність відрізків прямих, які перетнуто кількома паралельними прямими, була відома ще вавилонським ученим, хоча багато істориків математики вважають, що це відкриття належить Фалесу Мілетському.

? Що називають відношенням відрізків? ○ Сформулюйте узагальнену теорему Фалеса. ○ За якої умови відрізок x є четвертим пропорційним відрізків a, b і c?

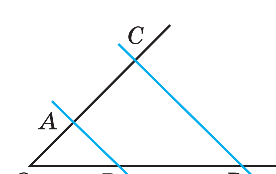
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

11.1. (*Усно.*) На малюнку 11.3 $AB \parallel CD$. Які з пропорцій справджуються:

1) $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AC}{BD}$; 2) $\dfrac{AC}{OA} = \dfrac{OB}{OD}$;

3) $\dfrac{AC}{OA} = \dfrac{OB}{BD}$; 4) $\dfrac{OB}{BD} = \dfrac{OA}{AC}$?



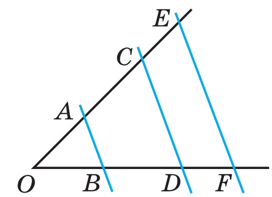
Мал. 11.3

11.2. На малюнку 11.3 $AB \parallel CD$, $OA = 3$, $AC = 5$, $BD = 10$. Знайдіть OB.

11.3. На малюнку 11.3 $AB \parallel CD$, $OB = 2$, $BD = 3$, $OA = 1$. Знайдіть AC.

2

11.4. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута O (мал. 11.4). $AC = 6$ см, $CE = 2$ см, $BD = 5$ см. Знайдіть BF.



Мал. 11.4

11.5. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута O (мал. 11.4), $BD = 4$ см, $DF = 2$ см, $CE = 3$ см. Знайдіть AE.

11.6. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 11.4). $OA = 3$ см, $AC = 4$ см, $BD = 5$ см, $DF = 2$ см. Знайдіть CE і OB.

11.7. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 11.4). $OB = 5$, $BD = 7$, $AC = 4$, $CE = 3$. Знайдіть OA і DF.

3

11.8. Дано відрізки a, b, c. Побудуйте відрізок $x = \frac{ab}{c}$.

11.9. Дано відрізки l, n, m. Побудуйте відрізок $x = \frac{mn}{l}$.

11.10. На малюнку 11.3 $AB \parallel CD$, $OA = 4$, $AC = 6$. Знайдіть відрізки OB і BD, якщо $OD = 15$.

11.11. На малюнку 11.3 $AB \parallel CD$, $OB = 5$, $BD = 7$. Знайдіть відрізки OA і AC, якщо $AC - OA = 1$.

4

11.12. На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MB = 1 : 3$. У якому відношенні відрізок CM ділить медіану AP трикутника ABC?

11.13. AD – медіана трикутника ABC, точка M лежить на стороні AC, відрізок BM ділить AD у відношенні $5 : 3$, починаючи від точки A. Знайдіть $AM : MC$.

Вправи для повторення

11.14. Діагональ чотирикутника дорівнює 5 см, а периметри трикутників, на які вона розбиває чотирикутник, дорівнюють 12 см і 14 см. Знайдіть периметр чотирикутника.

11.15. Тупий кут прямокутної трапеції дорівнює 120°, а менша діагональ трапеції дорівнює більшій бічній стороні. Знайдіть відношення середньої лінії трапеції до більшої бічної сторони.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

11.16. $\triangle ABC = \triangle MKL$. Заповніть пропуски:

1) $\angle A = \ldots$; 2) $\angle B = \ldots$; 3) $\angle C = \ldots$;
4) $MK = \ldots$; 5) $ML = \ldots$; 6) $KL = \ldots$.

11.17. Сторони одного трикутника вдвічі більші за відповідні сторони другого трикутника. У скільки разів периметр першого трикутника більший за периметр другого?

11.18. Дано $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$. Відомо, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Чи можна стверджувати, що
1) $\angle C = \angle C_1$; 2) $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$?

Життєва математика

11.19. 1) Щоб залити один квадратний метр ковзанки потрібно 40 л води. Скільки води знадобиться, щоб залити ковзанку прямокутної форми 30 м завдовжки і 20 м завширшки?
2) Дізнайтеся, скільки коштує 1 м³ води у вашій місцевості. Обчисліть, яку суму потрібно буде сплатити муніципальній владі за спожиту воду.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

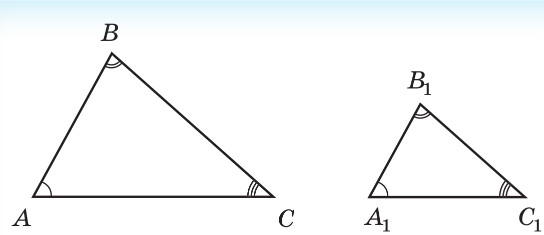
11.20. Дано квадрат $ABCD$. Скільки існує точок K у площині цього квадрата таких, що кожний із трикутників ABK, BCK, CDK і ADK – рівнобедрений?

§ 12. Подібні трикутники

У повсякденному житті трапляються предмети однакової форми, але різних розмірів, наприклад, футбольний м'яч та металева кулька, картина та її фотознімок, літак і його модель, географічні карти різного масштабу. У геометрії фігури однакової форми прийнято називати ***подібними***. Так, подібними між собою є всі квадрати, усі круги, усі відрізки.

Два *трикутники* називають *подібними*, якщо їхні кути відповідно рівні й сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого.

$$\angle A = \angle A_1,$$
$$\angle B = \angle B_1,$$
$$\angle C = \angle C_1$$
$$\text{і } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні між собою, записують: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Нехай значення кожного з отриманих відношень відповідних сторін дорівнює k. Число k називають ***коефіцієнтом подібності*** трикутника ABC до трикутника $A_1B_1C_1$, або коефіцієнтом подібності трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

Зауважимо, якщо $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, то із співвідношення $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ слідує співвідношення $AB : BC : AC = A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1$.

Задача 1. Довести, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін цих трикутників.

Доведення. Нехай $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$.

1) Тоді $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$.

2) Маємо: $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} =$

$= \frac{k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1)}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k = \frac{AB}{A_1B_1}$. ■

Задача 2. Сторони трикутника ABC відносяться як $4 : 7 : 9$, а більша сторона подібного йому трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 27 см. Знайти інші сторони другого трикутника.

Розв'язання. 1) Оскільки за умовою $AB : BC : AC = 4 : 7 : 9$ і $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, то $A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1 = 4 : 7 : 9$.

2) Позначимо $A_1B_1 = 4x$, $B_1C_1 = 7x$, $A_1C_1 = 9x$. За умовою $9x = 27$, тоді $x = 3$ (см).

3) Маємо: $A_1B_1 = 4 \cdot 3 = 12$ (см), $B_1C_1 = 7 \cdot 3 = 21$ (см).

Відповідь: 12 см, 21 см.

Зауважимо, що подібні трикутники легко створювати за допомогою сучасних комп'ютерних програм, зокрема графічних редакторів. Для цього достатньо побудований трикутник розтягнути або стиснути, «потягнувши» за один з кутових маркерів.

А ще раніше...

Однакові за формою, але різні за розміром фігури використовувалися ще у вавилонських та єгипетських пам'ятках архітектури. Так, наприклад, у гробниці батька фараона Рамзеса II є стіна, що вкрита сіткою квадратиків, за допомогою яких на цю стіну переносили в збільшеному вигляді малюнки маленьких розмірів.

Учення про подібні фігури, яке ґрунтувалося на теорії відношень і пропорцій, було створено в Давній Греції у V–IV ст. до н. е. завдяки працям Гіппократа Хіоського, Архита Тарентського, Евдокса та інших. Узагальнив ці відомості Евклід у шостій книзі «Начал». Починається теорія подібності з такого означення:

«Подібні прямолінійні фігури – це ті, які мають відповідно рівні кути й пропорційні сторони».

Наведіть з довкілля приклади предметів однакової форми. ○ Які трикутники називають подібними? ○ Що таке коефіцієнт подібності?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

12.1. (*Усно.*) Дано: $\triangle ABC \sim \triangle MNK$. Заповніть пропуски:
1) $\angle A = \angle ...$; 2) $\angle B = \angle ...$; 3) $\angle C = \angle ...$.

12.2. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle KLM$, $\frac{AB}{KL} = 3$. Заповніть пропуски:

1) $\frac{AC}{KM} = ...$; 2) $\frac{BC}{LM} = ...$.

12.3. Дано: $\triangle MLF \sim \triangle PNK$. Складіть усі можливі пропорції для сторін трикутників.

2

12.4. Дано: $\triangle MNL \sim \triangle ABC$, $\angle M = 50°$, $\angle B = 70°$. Знайдіть невідомі кути обох трикутників.

12.5. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\angle A = 40°$, $\angle F = 90°$. Знайдіть невідомі кути обох трикутників.

12.6. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 12$ см, $A_1B_1 = 3$ см. Знайдіть:

1) $\frac{A_1C_1}{AC}$; 2) $\frac{B_1C_1}{BC}$.

12.7. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 10$, $BC = 8$, $CA = 6$, $A_1B_1 = 5$. Знайдіть: B_1C_1, C_1A_1.

12.8. Дано: $\triangle KLM \sim \triangle K_1L_1M_1$, $KL = 12$, $KM = 9$, $LM = 21$, $K_1L_1 = 4$. Знайдіть: K_1M_1, L_1M_1.

3

12.9. Сторони трикутника відносяться як 7 : 8 : 9. Знайдіть невідомі сторони подібного йому трикутника у випадках, якщо його:
1) менша сторона дорівнює 21 см;
2) більша сторона на 5 см більша за середню;
3) периметр дорівнює 48 см.

12.10. Розв’яжіть задачі, умови яких подано у таблиці, відтак прочитаєте прізвище видатної української математикині, котра стала другою жінкою у світі, яка отримала найпрестижнішу премію світу для математиків — медаль Філдса.

У трикутнику ABC $AB : BC : CA = 7 : 8 : 9$. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо його:	A_1B_1	B_1C_1	C_1A_1
менша сторона дорівнює 21 см	В	Я	О
більша сторона на 5 см більша за середню	З	Ь	А
периметр дорівнює 48 см	В	С	К

14 см	24 см	35 см	27 см	21 см	16 см	40 см	18 см	45 см

12.11. Доведіть, що два рівносторонніх трикутники між собою подібні.

4 **12.12.** Периметри подібних трикутників відносяться як 2 : 3, а сума їхніх найбільших сторін дорівнює 20 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 2 : 3 : 4.

12.13. Периметри подібних трикутників відносяться як 4 : 3, а сума їхніх найменших сторін дорівнює 21 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 3 : 4 : 5.

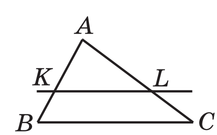
Вправи для повторення

12.14. У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Знайдіть усі пари рівних трикутників, що при цьому утворилися.

12.15. Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, належить середній лінії трапеції.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

12.16. На малюнку 12.1 пряма KL паралельна стороні BC різностороннього трикутника ABC. Знайдіть усі рівні між собою кути на цьому малюнку.



Мал. 12.1

Життєва математика

12.17. Скільки потрібно робітників для перенесення соснової балки розміром 4,5 м × 20 см × 55 см? Кожен робітник може підняти в середньому 70 кг. Щільність сосни – 520 кг/м^3.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

12.18. Точки K і L належать відповідно сторонам AB і AC трикутника ABC. Чи може точка перетину відрізків BL і KC ділити кожний з них навпіл?

§ 13. Ознаки подібності трикутників

1. Лема про властивість прямої, яка паралельна стороні трикутника

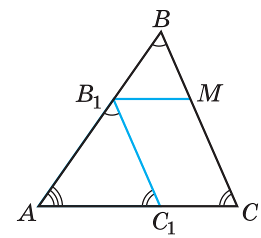
Подібність трикутників аналогічно до рівності трикутників можна встановлювати за допомогою ознак.

Перш ніж їх розглянути, сформулюємо й доведемо *лему*, тобто допоміжне твердження, яке є правильним і використовується для доведення однієї або кількох теорем.

Лема. **Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.**

Доведення. Нехай пряма B_1C_1 перетинає сторони AB і AC трикутника ABC відповідно в точках B_1 і C_1 (мал. 13.1). Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$.

1) Кут A є спільним для обох трикутників, $\angle B = \angle B_1$ (як відповідні кути при паралельних прямих BC і B_1C_1 та січній AB), $\angle C = \angle C_1$ (аналогічно для січної AC). Отже, три кути трикутника ABC дорівнюють відповідним кутам трикутника AB_1C_1.



Мал. 13.1

2) За наслідком 2 з узагальненої теореми Фалеса маємо: $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$.

3) Доведемо, що $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AB_1}$. Проведемо через точку B_1 пряму, паралельну AC, що перетинає BC у точці M. Оскільки B_1MCC_1 – паралелограм, то $B_1C_1 = MC$. За узагальненою теоремою Фалеса: $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BB_1}{AB_1}$. Додамо число 1 до обох частин цієї рівності. Матимемо:

$$\frac{BM}{MC} + 1 = \frac{BB_1}{AB_1} + 1; \quad \frac{BM + MC}{MC} = \frac{BB_1 + AB_1}{AB_1}; \quad \frac{BC}{MC} = \frac{AB}{AB_1}.$$

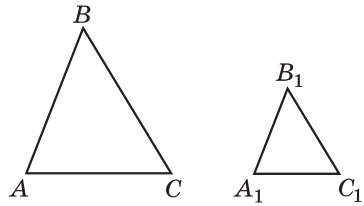
Але $MC = B_1C_1$. Отже, $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{AB_1}$.

4) Остаточно маємо: $\angle A = \angle A$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$. Отже, $\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$. ■

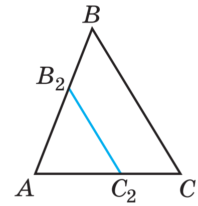
2. Ознака подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними

Теорема 1 (ознака подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними). **Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого й кути, утворені цими сторонами, між собою рівні, то трикутники подібні.**

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$ і $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ (мал. 13.2). Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 13.2



Мал. 13.3

1) Відкладемо на стороні AB трикутника ABC відрізок $AB_2 = A_1B_1$ і проведемо через B_2 пряму, паралельну BC (мал. 13.3). Тоді $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$ (за лемою).

2) За наслідком 2 з узагальненої теореми Фалеса $\dfrac{AB}{AB_2} = \dfrac{AC}{AC_2}$.

Але $AB_2 = A_1B_1$ (за побудовою). Тому $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{AC_2}$. За умовою $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, отже, $\dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{AC}{AC_2}$ і звідси $A_1C_1 = AC_2$.

3) Оскільки $\angle A = \angle A_1$, $AB_2 = A_1B_1$ і $AC_2 = A_1C_1$, то $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за двома сторонами й кутом між ними).

4) Але $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$, отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■

Наслідок 1. **Прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного з них пропорційні катетам другого.**

Наслідок 2. **Якщо кут при вершині одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при вершині другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.**

3. Ознака подібності трикутників за двома кутами

Теорема 2 (ознака подібності трикутників за двома кутами). **Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то ці трикутники подібні.**

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (мал. 13.2).

1) Виконаємо побудови, аналогічні до тих, що й у доведенні теореми 1 (мал. 13.3). Маємо: $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$.

2) $\angle AB_2C_2 = \angle B$, але $\angle B = \angle B_1$. Тому $\angle AB_2C_2 = \angle B_1$.

3) Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за стороною і двома прилеглими кутами).

4) Отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■

Наслідок 1. **Рівносторонні трикутники подібні.**

Наслідок 2. **Якщо кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.**

Наслідок 3. **Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то ці трикутники подібні.**

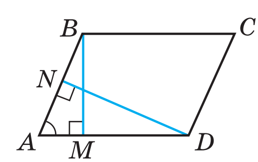
Приклад 1. Сторони паралелограма дорівнюють 15 см і 10 см, а висота, проведена до більшої сторони, – 8 см. Знайти висоту, проведену до меншої сторони.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – паралелограм (мал. 13.4). $AD = 15$ см, $AB = 10$ см, $BM = 8$ см – висота паралелограма.

1) Проведемо DN – другу висоту паралелограма.

2) $\triangle ABM \sim \triangle ADN$ (як прямокутні зі спільним гострим кутом). Тоді $\frac{AB}{AD} = \frac{BM}{DN}$, тобто $\frac{10}{15} = \frac{8}{DN}$, звідки $10 \cdot DN = 8 \cdot 15$, отже, $DN = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.



Мал. 13.4

4. Ознака подібності трикутників за трьома сторонами

Теорема 3 (ознака подібності трикутників за трьома сторонами). **Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то ці трикутники подібні.**

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$,у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ (мал. 132).

1) Виконаємо побудови, аналогічні до тих, що й у доведенні теореми 1 (мал. 133). Маємо: $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$.

2) Тоді $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$, але $AB_2 = A_1B_1$, тому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$. Враховуючи, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, маємо: $AC_2 = A_1C_1$, $B_2C_2 = B_1C_1$.

3) Тоді $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ (за трьома сторонами).

4) Отже, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. ■

Приклад 2. Сторони одного трикутника дорівнюють 9 см, 15 см і 18 см, а сторони другого трикутника відносяться як 3 : 5 : 6. Чи подібні ці трикутники?

Розв'язання. Позначимо сторони другого трикутника через $3x$, $5x$ і $6x$. Оскільки $\frac{9}{3x} = \frac{15}{5x} = \frac{18}{6x} = \frac{3}{x}$, то трикутники подібні (за трьома сторонами).

Відповідь: так.

Сформулюйте й доведіть ознаки подібності трикутників та наслідки з них.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

13.1. (*Усно.*) За яких умов два трикутники подібні:
1) у трикутників є спільний кут;
2) два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого;
3) дві сторони одного трикутника дорівнюють двом сторонам другого?

13.2. За яких умов $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$:
1) $\angle A = \angle D$;
2) $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle D = 50°$, $\angle E = 60°$;
3) $AB = 3DE$, $BC = 3EF$;
4) $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$, $\angle D = 40°$, $\angle E = 90°$?

13.3. За яких умов $\triangle ABC \backsim \triangle MNK$:
1) $AB = MN = 15$ см, $BC = NK = 12$ см;
2) $\angle A = \angle M$, $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}$;
3) $\angle A = 100°$, $\angle B = 30°$, $\angle M = 70°$, $\angle N = 20°$;
4) $\angle C = \angle K$, $CB = 5$, $CA = 2$, $KN = 10$, $KM = 4$?

13.4. Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$, $A_1B_1 = 4$, $B_1C_1 = 6$, $A_1C_1 = 8$;
2) $\angle A = 20°$, $\angle A_1 = 20°$, $AB = 3$, $AC = 5$, $A_1B_1 = 9$, $A_1C_1 = 15$;
3) $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$, $\angle B_1 = 40°$, $\angle C_1 = 110°$.

13.5. Доведіть, що $\triangle MNK \backsim \triangle M_1N_1K_1$, якщо:
1) $\angle M = \angle M_1$, $MN = 5$, $MK = 6$, $M_1N_1 = 10$, $M_1K_1 = 12$;
2) $\angle M = 90°$, $\angle N = 50°$, $\angle K_1 = 40°$, $\angle N_1 = 50°$;
3) $MN = 3$, $NK = 4$, $MK = 5$, $M_1N_1 = 6$, $N_1K_1 = 8$, $M_1K_1 = 10$.

2

13.6. Прямі AB і CD перетинаються в точці O, $AC \parallel BD$. Доведіть, що $\triangle AOC \backsim \triangle BOD$.

13.7. Прямі MN і KL перетинаються в точці O, $\angle MLO = \angle NKO$. Доведіть, що $\triangle MOL \backsim \triangle NOK$.

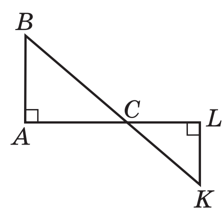
13.8. На сторонах AB і AC трикутника ABC відповідно позначено точки P і L так, що $AP = \frac{1}{3}AB$, $AL = \frac{1}{3}AC$. Доведіть, що $\triangle APL \sim \triangle ABC$.

13.9. На сторонах KL і KN трикутника KLN відповідно позначено точки A і B так, що $KA = \frac{2}{3}KL$, $KB = \frac{2}{3}KN$. Доведіть, що $\triangle KAB \sim \triangle KLN$.

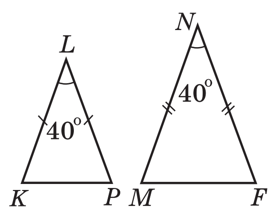
13.10. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB : BC : CA = 3 : 4 : 6$, $A_1B_1 = 6$, $B_1C_1 = 8$, $C_1A_1 = 11$;
2) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle A_1 : \angle B_1 : \angle C_1 = 1 : 2 : 3$?

13.11. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB : BC : CA = 4 : 3 : 7$, $A_1B_1 = 8$, $B_1C_1 = 6$, $C_1A_1 = 14$;
2) $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$, $\angle A_1 = 20°$, $\angle B_1 = 50$?

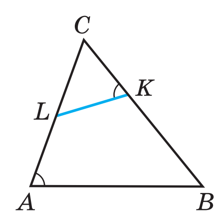
13.12. На малюнках 13.5–13.7 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.



Мал. 13.5

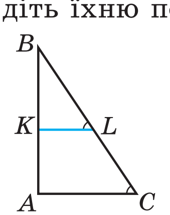


Мал. 13.6

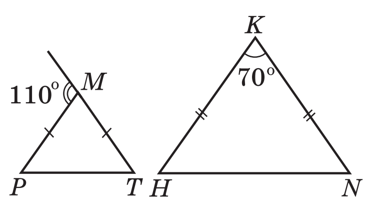


Мал. 13.7

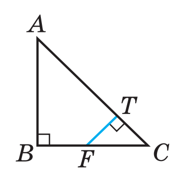
13.13. На малюнках 13.8–13.10 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.



Мал. 13.8



Мал. 13.9



Мал. 13.10

13.14. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Доведіть, що $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

13.15. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, у якої $AB \parallel CD$, $AB = 10$ см, $CD = 5$ см, $OD = 4$ см. Знайдіть OB.

13.16. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) поділяє діагональ BD на відрізки $DO = 3$ см, $OB = 9$ см. Знайдіть AB, якщо $DC = 2$ см.

13.17. У трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) на катеті AC і гіпотенузі AB позначено точки M і N так, що $AM = \frac{3}{4}AC$, $AN = \frac{3}{4}AB$. Доведіть, що $\triangle AMN$ – прямокутний.

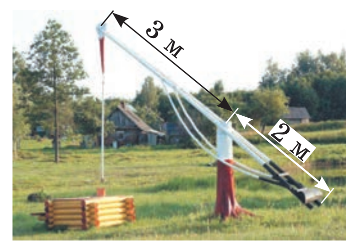
13.18. На катеті BC і гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точки P і F так, що $BP = \frac{1}{3}BC$, $BF = \frac{1}{3}BA$. Доведіть, що $PF = \frac{1}{3}CA$.

13.19. Кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі другого рівнобедреного трикутника. Периметр першого трикутника – 36 см. Знайдіть його сторони, якщо в другого трикутника бічна сторона відноситься до основи як 5 : 2.

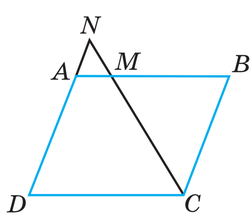
13.20. Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при вершині одного з них дорівнює куту при вершині другого. Периметр першого трикутника – 30 см. Знайдіть його сторони, якщо в другого трикутника основа відноситься до бічної сторони як 1 : 2.

3

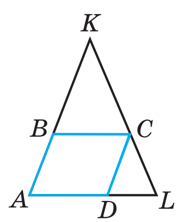
13.21. На малюнку зображено колодязь із «журавлем». Коротке плече має довжину 2 м, а довге – 3 м. На скільки метрів опуститься кінець довгого плеча, коли кінець короткого підніметься на 1 м?



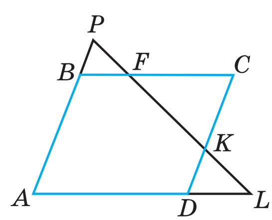
13.22. На малюнках 13.11–13.13 $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть на цих малюнках усі пари подібних трикутників і доведіть їхню подібність.



Мал. 13.11

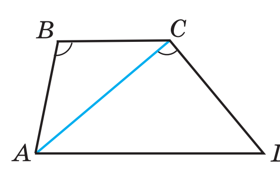


Мал. 13.12



Мал. 13.13

13.23. На малюнку 13.14 $ABCD$ – трапеція, $\angle ABC = \angle ACD$. Знайдіть подібні трикутники на цьому малюнку й доведіть, що $CA^2 = BC \cdot AD$.



Мал. 13.14

13.24. Кути одного трикутника відносяться як 2 : 3 : 4, а один з кутів другого трикутника на 20° більший за другий і на 20° менший від третього. Чи подібні ці трикутники?

13.25. Кути одного трикутника відносяться як 1 : 3 : 2, а другий трикутник є прямокутним, у якого один з гострих кутів дорівнює половині другого. Чи подібні ці трикутники?

13.26. У паралелограмі $ABCD$ точки E, F, M і N належать відповідно сторонам AB, BC, CD і DA, $\frac{EB}{BF} = \frac{DM}{DN}$. Доведіть, що $\angle BFE = \angle DNM$.

13.27. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, $\frac{AO}{OB}=\frac{DO}{OC}$. Доведіть, що $\angle BCO = \angle ADO$.

13.28. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $BO = 4$ см, $DO = 7$ см. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 22 см.

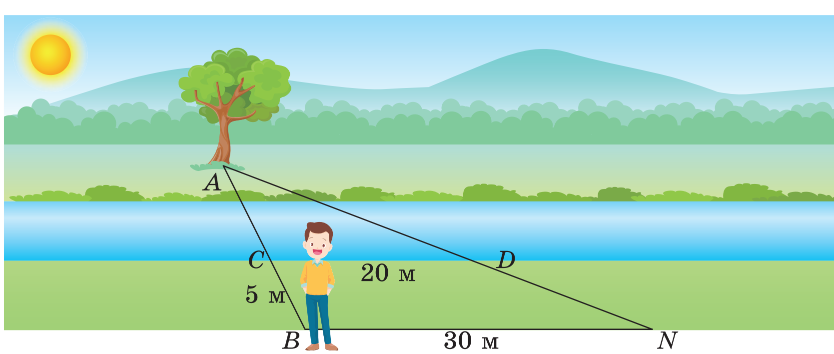
13.29. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $AD = 11$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть відрізки BO і OD, якщо їхня різниця дорівнює 3 см.

13.30. У трикутнику ABC $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $AC = 18$ см. На стороні AC відкладено відрізок $CK = 6$ см, на стороні BC – відрізок $CP = 4$ см.
1) Чи подібні трикутники ABC і KPC?
2) Чи паралельні прямі AB і KP?
3) Знайдіть довжину відрізка PK.

13.31. Пряма MN паралельна стороні AB трикутника ABC, $M \in AC$, $N \in BC$. $AB = 10$ см, $MN = 4$ см, $MA = 2$ см. Знайдіть довжину сторони AC.

13.32. Пряма KL паралельна стороні BC трикутника ABC, $K \in AB$, $L \in AC$. $KB = 6$ см, $BC = 12$ см, $KL = 9$ см. Знайдіть довжину сторони AB.

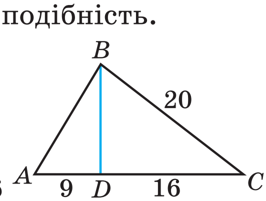
13.33. Знайдіть відстань від подорожнього B (мал. 13.15), який стоїть на одному березі річки, до дерева A на іншому березі, якщо $BN = 30$ м, $CD = 20$ м, $BC = 5$ м. На малюнку $BN \parallel CD$.



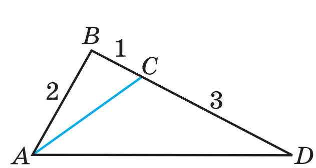
Мал. 13.15

13.34. На малюнку 13.16 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.

13.35. На малюнку 13.17 знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.



Мал. 13.16



Мал. 13.17

4

13.36. Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при вершині одного з них дорівнює куту при вершині другого. Периметр першого трикутника дорівнює 90 см. Знайдіть його сторони, якщо сторони другого трикутника відносяться як 4 : 7. Скільки випадків слід розглянути?

13.37. Дано два рівнобедрених трикутники. Кут при основі одного трикутника дорівнює куту при основі другого. Сторони одного з трикутників відносяться як 5 : 8, а периметр другого дорівнює 126 см. Знайдіть сторони другого трикутника. Скільки випадків слід розглянути?

13.38. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, CD і C_1D_1 – бісектриси даних трикутників. Доведіть, що $\triangle ADC \sim \triangle A_1D_1C_1$.

13.39. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, AM і A_1M_1 – медіани даних трикутників. Доведіть, що $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C_1$.

13.40. На стороні BC трикутника ABC позначено точку F так, що $\angle BAF = \angle C$, $BF = 4$ см, $AB = 6$ см. Знайдіть BC.

13.41. На стороні AC трикутника ABC позначено точку K так, що $\angle ABK = \angle C$. Знайдіть KC, якщо $AB = 2$ см, $AK = 1$ см.

13.42. У прямокутний трикутник ABC з катетами a см і b см і прямим кутом A вписано квадрат $AKLM$, $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in AC$. Знайдіть сторону квадрата.

13.43. Периметр паралелограма дорівнює 24 см, а його висоти відносяться як 5 : 3. Знайдіть сторони паралелограма.

13.44. Периметр паралелограма дорівнює 30 см, а його висоти – 4 см і 8 см. Знайдіть сторони паралелограма.

13.45. У трикутник ABC вписано ромб $AKFP$ так, що кут A в них спільний, $P \in AB$, $F \in BC$, $K \in AC$. Знайдіть сторону ромба, якщо $CK = 4$ см, $PB = 9$ см.

13.46. У рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а бічна сторона – 10 см, вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику кола до бічних сторін.

Вправи для повторення

13.47. Знайдіть кути трикутника, якщо три його середні лінії рівні між собою.

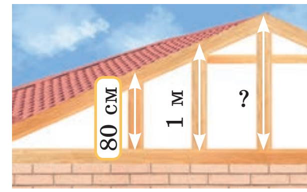
13.48. У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) E – середина AD, F – середина BC, K – середина AB. Доведіть, що $KE = KF$.

13.49. Кожна з бічних сторін рівнобедреного трикутника дорівнює a см. З точки, узятої на основі трикутника, проведено прямі, паралельні бічним сторонам. Обчисліть периметр паралелограма, який утворився.

13.50. Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, який не є квадратом, перетинаючись, утворюють квадрат.

Життєва математика

13.51. Похила балка підтримується трьома стовпами, встановленими вертикально на однаковій відстані один від одного (мал. 13.18). Довжини двох менших стовпів – 80 см і 1 м. Знайдіть довжину більшого стовпа.



Мал. 13.18

Цікаві задачі – поміркуй одначе

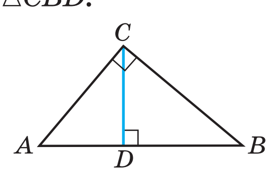
13.52. Чи можуть бісектриса й медіана, що виходять з вершини прямого кута трикутника, утворювати рівнобедрений трикутник? Якщо так, то знайдіть менший з гострих кутів прямокутного трикутника.

§ 14. Середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику

1. Лема про висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута

Лема. **Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, розбиває трикутник на два подібних між собою прямокутних трикутники, кожний з яких подібний даному трикутнику.**

Доведення. Нехай ABC – прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), CD – висота трикутника (мал. 14.1). Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ і $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.



Мал. 14.1

1) У прямокутних трикутників ABC і ACD кут A – спільний. Тому $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (за гострим кутом).

2) Аналогічно $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ ($\angle B$ – спільний, $\angle BCA = \angle BDC = 90°$). Звідки $\angle A = \angle BCD$.

3) У трикутників ACD ($\angle D = 90°$) і CBD ($\angle D = 90°$) $\angle A = \angle BCD$. Тому $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (за гострим кутом). ■

Відрізок AD називають *проєкцією* катета AC на гіпотенузу AB, а відрізок BD – *проєкцією* катета BC на гіпотенузу AB.

2. Теорема про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику

Відрізок k називають *середнім пропорційним* (або *середнім геометричним*) відрізків m і n, якщо $k^2 = m \cdot n$.

Т Теорема (про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику). **1) Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним проєкцій катетів на гіпотенузу.**
2) Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи та проєкції цього катета на гіпотенузу.

Доведення. Розглянемо малюнок 14.1.

1) $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (за лемою). Тому $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$, або $CD^2 = AD \cdot BD$.

2) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (за лемою). Тому $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$, або $AC^2 = AB \cdot AD$.

3) $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ (за лемою). Тому $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BD}{BC}$, або $BC^2 = AB \cdot BD$. ■

Приклад 1. CD – висота прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C. Доведіть, що $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$.

Доведення. Розглянемо малюнок 14.1.

1) Оскільки $AC^2 = AB \cdot AD$, то $AB = \dfrac{AC^2}{AD}$, а оскільки $BC^2 = AB \cdot BD$, то $AB = \dfrac{BC^2}{BD}$.

2) Тому $\dfrac{AC^2}{AD} = \dfrac{BC^2}{BD}$, звідки $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC^2}{AC^2}$. ■

Приклад 2. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 9 см і 16 см. Знайдіть периметр трикутника.

Розв'язання. Розглянемо малюнок 14.1, де $AD = 9$ см, $DB = 16$ см.
1) $AB = AD + DB = 9 + 16 = 25$ (см).
2) $AC^2 = AB \cdot AD$, тобто $AC^2 = 25 \cdot 9 = 225$. Оскільки $15^2 = 225$, то $AC = 15$ (см).
3) $BC^2 = AB \cdot BD$, $BC^2 = 25 \cdot 16 = 400$. Оскільки $20^2 = 400$, то $BC = 20$ (см).
4) $P_{ABC} = 25 + 15 + 20 = 60$ (см).
Відповідь: 60 см.

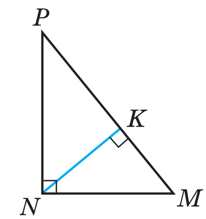
Під час розв'язування задач цього параграфа варто використовувати таблицю квадратів натуральних чисел.

Сформулюйте й доведіть лему із цього параграфа. ○ Який відрізок називають середнім пропорційним двох відрізків? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

14.1. (*Усно.*) На малюнку 14.2 NK – висота прямокутного трикутника PNM ($\angle N = 90°$). Назвіть:
1) проєкцію катета NM на гіпотенузу;
2) проєкцію катета NP на гіпотенузу.



Мал. 14.2

14.2. (*Усно.*) NK – висота прямокутного трикутника PNM (мал. 14.2). Які з рівностей правильні:
1) $NK = PK \cdot KM$; 2) $NM^2 = KM \cdot PM$;
3) $PN = PK \cdot KM$; 4) $PK \cdot KM = NK^2$?

14.3. NK – висота прямокутного трикутника PNM з прямим кутом N (мал. 14.2). Заповніть пропуски:
1) $NK^2 = ...$; 2) $NM^2 = ...$;
3) $PK \cdot PM = ...$; 4) $PK \cdot KM = ...$.

14.4. Знайдіть середнє пропорційне відрізків завдовжки:
1) 2 см і 8 см; 2) 27 дм і 3 дм.

14.5. Знайдіть середнє пропорційне відрізків завдовжки:
1) 16 дм і 1 дм; 2) 4 см і 9 см.

2

14.6. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо проєкції катетів на гіпотенузу дорівнюють 9 см і 25 см.

14.7. Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки 2 см і 8 см.

14.8. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проєкція на гіпотенузу дорівнює 4 см, а гіпотенуза – 16 см.

14.9. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 25 см, а проєкція катета на гіпотенузу – 9 см.

14.10. Катет прямокутного трикутника дорівнює 18 см, а його проєкція на гіпотенузу – 9 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

14.11. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а гіпотенуза – 9 см. Знайдіть проєкцію цього катета на гіпотенузу.

14.12. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 8 см і 4,5 см. Знайдіть катети трикутника.

14.13. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 50 см, а проєкція одного з катетів на гіпотенузу – 18 см. Знайдіть катети трикутника.

3

14.14. Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки 1 см і 8 см, починаючи від вершини кута при основі. Знайдіть периметр трикутника.

14.15. Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки 6 см і 2 см, починаючи від вершини, протилежної основі. Знайдіть периметр трикутника.

14.16. Висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, ділить гіпотенузу на відрізки, що відносяться як 9 : 16. Знайдіть катети трикутника, якщо його висота дорівнює 24 см.

14.17. Висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника, ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких дорівнює 16 см, а другий відноситься до висоти як 3 : 4. Знайдіть висоту трикутника.

14.18. Коло, вписане в ромб, точкою дотику ділить сторону ромба на відрізки 1 см і 4 см. Знайдіть радіус кола.

4

14.19. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої 10 см і 8 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

14.20. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основа якої 13 см і 5 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

14.21. Коло, вписане в трапецію, точкою дотику ділить бічну сторону на відрізки 4 см і 9 см завдовжки. Знайдіть висоту трапеції.

14.22. Коло, вписане в трапецію, точкою дотику ділить одну з бічних сторін на відрізки 2 см і 8 см завдовжки, а іншу – на відрізки, один з яких дорівнює 4 см. Знайдіть периметр трапеції.

Вправи для повторення

14.23. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника утворює зі стороною трикутника кут 18°. Знайдіть кути трикутника.

14.24. Про трикутники ABC і KLM відомо, що $\angle A + \angle B = \angle K + \angle L$, $\angle B + \angle C = \angle L + \angle M$. Чи подібні ці трикутники?

14.25. У рівнобічній трапеції діагональ ділить гострий кут навпіл. Доведіть, що тупий кут трапеції дорівнює тупому куту між діагоналями.

Життєва математика

14.26. Студенти агроекологічного коледжу на експериментальній ділянці 40 м завдовжки і 20 м завширшки висаджують картоплю раннього сорту. Обчисліть, скільки знадобиться картоплі для такої ділянки, якщо в середньому на 1 а потрібно 40 кг картоплі.

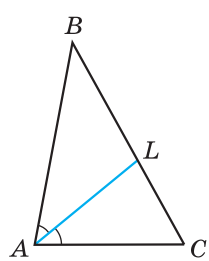
Цікаві задачі – поміркуй одначе

14.27. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1976 р.*) Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці O, а на відрізках OB і OC позначено точки B_1 і C_1, для яких $\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90°$. Доведіть, що $AB_1 = AC_1$.

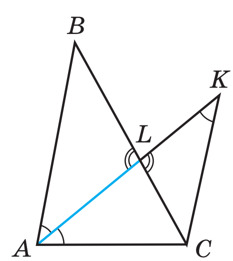
§ 15. Властивість бісектриси трикутника

Теорема (властивість бісектриси трикутника). **Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до неї сторонам.**

Доведення. Нехай AL – бісектриса трикутника ABC (мал. 15.1). Доведемо, що $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$.



Мал. 15.1



Мал. 15.2

1) Проведемо через точку C пряму, паралельну AB, та продовжимо бісектрису AL до перетину із цією прямою в точці K (мал. 15.2). Тоді $\angle LKC = \angle BAL$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і CK та січній AK).

2) Трикутник AKC – рівнобедрений (оскільки $\angle BAL = \angle LAC$ і $\angle BAL = \angle LKC$, а тому $\angle KAC = \angle AKC$), а отже, $AC = KC$.

3) $\angle BLA = \angle CLK$ (як вертикальні). Тому $\triangle ABL \sim \triangle KCL$ (за двома кутами). Отже, $\frac{AB}{KC} = \frac{BL}{CL}$.

Але $KC = AC$, тому $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$. ■

З пропорції $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$ можна отримати й таку: $\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{LC}$.

Приклад 1. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $AC = 4$ см, $BC = 9$ см, AL – бісектриса трикутника. Знайти BL і LC.

Розв'язання. Розглянемо $\triangle ABC$ на малюнку 15.1.

1) Нехай $BL = x$ (см), тоді $LC = BC - BL = 9 - x$ (см).

2) Оскільки $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$, маємо рівняння: $\frac{8}{4} = \frac{x}{9-x}$, звідки $x = 6$ (см).

3) Отже, $BL = 6$ см, $LC = 9 - 6 = 3$ (см).

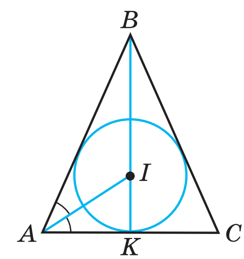
Відповідь: 6 см, 3 см.

Приклад 2. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 24 см, а бічна сторона відноситься до основи як 3 : 2. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC $AB = BC$, BK – медіана (мал. 15.3).

1) Тоді BK є також висотою і бісектрисою. Оскільки точка I – центр вписаного кола – є точкою перетину бісектрис трикутника, то $I \in BK$, IK – радіус кола.

2) Оскільки $AB : AC = 3 : 2$, позначимо $AB = 3x$, $AC = 2x$. K – середина AC, тому $AK = \frac{AC}{2} = \frac{2x}{2} = x$.



Мал. 15.3

3) Оскільки AI – бісектриса трикутника ABK, то $\frac{AB}{AK} = \frac{BI}{IK}$.

4) Нехай $IK = r$. Тоді $BI = 24 - r$. Маємо: $\frac{3x}{x} = \frac{24-r}{r}$, звідки $r = 6$ (см).

Відповідь: 6 см.

Сформулюйте й доведіть теорему про властивість бісектриси трикутника.

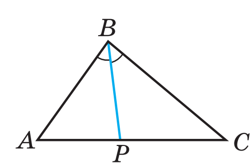
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

15.1. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 15.4). Які з рівностей є пропорціями:

1) $\frac{AB}{BC} = \frac{CP}{AP}$; 2) $\frac{BC}{AB} = \frac{CP}{AP}$;

3) $\frac{AP}{CP} = \frac{BA}{BC}$; 4) $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PC}$?



Мал. 15.4

15.2. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 15.4). $AP : PC = 1 : 2$, $AB = 3$ см. Знайдіть BC.

15.3. BP – бісектриса трикутника ABC (мал. 15.4). $AB : BC = 1 : 2$, $AP = 5$ см. Знайдіть PC.

2

15.4. BD – бісектриса трикутника ABC, $AD = 3$ см, $DC = 9$ см. Знайдіть відношення сторін $\frac{AB}{BC}$.

15.5. MA – бісектриса трикутника MNL, $ML = 4$ см, $MN = 16$ см. Знайдіть відношення відрізків $\frac{LA}{AN}$.

15.6. MD – бісектриса трикутника KMP, $KM = 8$ см, $MP = 6$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса MD ділить сторону KP, дорівнює 3 см. Знайдіть KP.

15.7. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 12$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса BK ділить сторону AC, дорівнює 6 см. Знайдіть AC.

3

15.8. AL – бісектриса трикутника ABC, $AB = 15$ см, $AC = 12$ см, $BC = 18$ см. Знайдіть BL і LC.

15.9. Бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, різниця довжин яких 1 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють 8 см і 6 см.

15.10. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а бісектриса ділить бічну сторону на відрізки, з яких той, що суміжний з основою, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр трикутника.

15.11. У рівнобедреному трикутнику основа менша від бічної сторони на 9 см, а бісектриса ділить бічну сторону на відрізки, які відносяться як 2 : 5. Знайдіть периметр трикутника.

4

15.12. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 15 см, 21 см і 24 см, проведено півколо, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається до двох інших сторін. На які відрізки центр півкола ділить більшу сторону?

15.13. У трикутник ABC вписано ромб $CKLM$ так, що кут C у них спільний, $K \in AC$, $L \in AB$, $M \in BC$. Знайдіть довжини відрізків AL і LB, якщо $AC = 18$ см, $BC = 12$ см, $AB = 20$ см.

Вправи для повторення

15.14. Сторони паралелограма дорівнюють a і b ($a > b$). Знайдіть відрізки, на які бісектриса гострого кута ділить його більшу сторону.

15.15. Чи може діагональ AC трапеції $ABCD$ ділити навпіл і кут A, і кут C?

15.16. У трикутнику ABC проведено висоту CH, причому $CH^2 = AH \cdot BH$ і точка H належить стороні AB. Доведіть, що трикутник ABC – прямокутний ($\angle C = 90°$).

Життєва математика

15.17. Бригаді з ремонту квартир потрібно поштукатурити стіни кімнати 3,5 м завширшки, 4,5 м завдовжки і 2,8 м заввишки. Зазвичай бригада витрачає 6 мішків сухої суміші на 5 м^2 поверхні. Кімната має одні двері й одне вікно. Ширина дверей – 0,9 м, висота – 2 м, ширина вікна – 2,2 м, висота – 1,8 м. Скільки мішків сухої суміші потрібно придбати бригаді, щоб повністю поштукатурити стіни від підлоги до стелі?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

15.18. 1) Розв'яжіть задачу, відтак дізнаєтеся прізвище видатного українця – ученого в галузі ракетобудування та космонавтики, конструктора перших штучних супутників Землі й космічних кораблів.

Знайдіть кути A і B паралелограма $ABCD$, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A$ на 20° більший за $\angle B$	Л	Р
$\angle A$ втричі менший від $\angle B$	К	В
$\angle A : \angle B = 7 : 5$	Ь	О

45°	75°	80°	75°	100°	105°	75°	135°

2) Поцікавтеся (використовуючи різні джерела інформації) біографією та досягненнями нашого видатного земляка.

§ 16. Застосування подібності трикутників до розв'язування задач

Розглянемо деякі цікаві властивості геометричних фігур, які можна встановити з подібності трикутників, та застосування подібності до практичних задач.

1. Пропорційність відрізків хорд

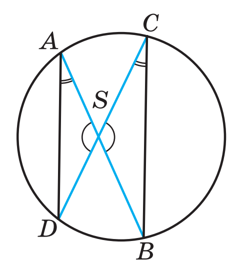
Т Теорема 1 (про пропорційність відрізків хорд). **Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці S, то**

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Доведення. Нехай хорди AB і CD перетинаються в точці S (мал. 16.1).

1) Розглянемо $\triangle SAD$ і $\triangle SCB$, у яких $\angle ASD = \angle CSB$ (як вертикальні кути), $\angle DAB = \angle DCB$ (як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу).

2) Тоді $\triangle SAD \sim \triangle SCB$ за двома кутами, а отже, $\frac{AS}{CS} = \frac{DS}{BS}$, тобто $AS \cdot BS = CS \cdot DS$. ■



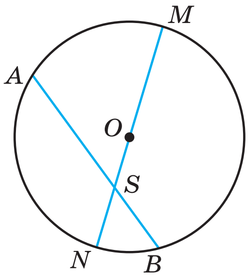
Мал. 16.1

Н Наслідок 2. **Якщо O – центр кола, R – його радіус, AB – хорда, $S \in AB$, то $AS \cdot BS = R^2 - a^2$, де $a = SO$.**

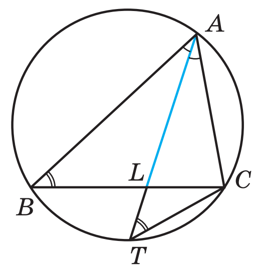
Доведення. Проведемо діаметр MN, що проходить через точку S (мал. 16.2).

1) Тоді $AS \cdot BS = MS \cdot NS$, $AS \cdot BS = (R + a)(R - a)$, $AS \cdot BS = R^2 - a^2$.

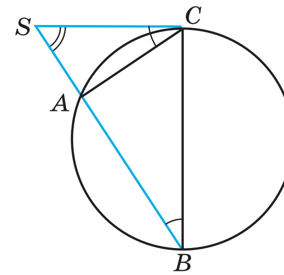
2) Остаточно маємо: $AS \cdot BS = MS \cdot NS = R^2 - a^2$. ■



Мал. 16.2



Мал. 16.3



Мал. 16.4

Приклад 1. Діаметр кола AB перпендикулярний до хорди MN і перетинає її у точці K. $AK = 4$ см, $KB = 9$ см. Знайти довжину хорди MN.

Розв'язання. На малюнку 16.5 AB – діаметр кола, MN – хорда, $AB \perp MN$.

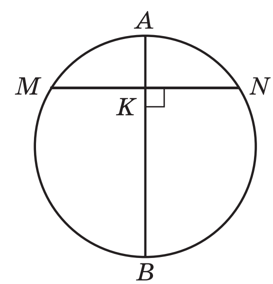
1) За теоремою про пропорційність відрізків хорд, маємо $MK \cdot KN = AK \cdot KB$.
Тоді $MK \cdot KN = 4 \cdot 9 = 36$.

2) За властивістю діаметра кола, перпендикулярного до ходи, маємо $MK = KN$.

3) Позначимо $MK = KN = x$ см, тоді $x^2 = 36$ і $x = 6$ (см).

4) $MK = KN = 6$ (см), тому $MN = 2 \cdot 6 = 12$ см.

Відповідь: 12 см.



Мал. 16.5

2. Формула бісектриси трикутника

Приклад 2. AL – бісектриса трикутника ABC. Довести *формулу бісектриси*: $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$.

Доведення. Опишемо навколо трикутника ABC коло й продовжимо AL до перетину з колом у точці T (мал. 16.3).

1) $\angle ABC = \angle ATC$ (як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу AC), $\angle BAL = \angle CAL$ (за умовою). Тому $\triangle ABL \sim \triangle ATC$ (за двома кутами).

2) Маємо: $\dfrac{AB}{AT} = \dfrac{AL}{AC}$, звідки $AL \cdot AT = AB \cdot AC$;

$AL \cdot (AL + LT) = AB \cdot AC$; $AL^2 + AL \cdot LT = AB \cdot AC$.

Але за теоремою про пропорційність відрізків хорд:

$AL \cdot LT = BL \cdot CL$.

3) Отже, $AL^2 + BL \cdot CL = AB \cdot AC$, тобто $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot CL$. ■

3. Пропорційність відрізків січної і дотичної

Т Теорема 2 (про пропорційність відрізків січної і дотичної). **Якщо з точки S поза колом провести січну, яка перетинає коло в точках A і B, та дотичну SC, де C – точка дотику, то**

$$SC^2 = SA \cdot SB.$$

Доведення. Розглянемо малюнок 16.4.

1) $\angle ABC$ – вписаний, тому $\angle ABC = \frac{1}{2}\smile AC$, $\angle SCA = \frac{1}{2}\smile AC$ (див. задачу 709 з підручника для 7 класу), тобто $\angle SCA = \angle ABC$.

2) Тому $\triangle CSA \sim \triangle BSC$ (за двома кутами), отже, $\frac{SC}{SB} = \frac{SA}{SC}$. Звідки $SC^2 = SA \cdot SB$. ■

Н Наслідок 1. **Якщо з точки S провести дві січні, одна з яких перетинає коло в точках A і B, а друга – у точках M і N, то $SA \cdot SB = SM \cdot SN$.**

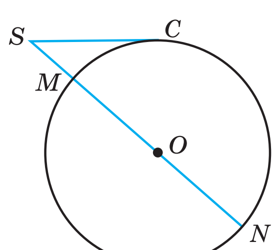
Наслідок є очевидним, оскільки кожний з добутків $SA \cdot SB$ і $SM \cdot SN$ за теоремою дорівнює SC^2.

Н Наслідок 2. **Якщо O – центр кола, R – його радіус, SC – дотична, C – точка дотику, то $SC^2 = a^2 - R^2$, де $a = SO$.**

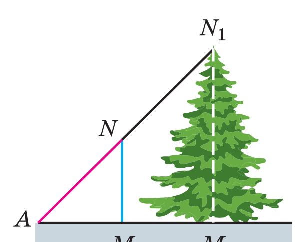
Доведення. Проведемо січну через центр кола – точку O (мал. 16.6). Тоді за теоремою:

$$SC^2 = SM \cdot SN; \quad SC^2 = (a - R)(a + R).$$

Отже, $SC^2 = a^2 - R^2$. ■



Мал. 16.6



Мал. 16.7

4. Вимірювальні роботи на місцевості

Припустимо, що нам потрібно виміряти висоту деякого предмета, наприклад висоту ялини M_1N_1 (мал. 16.7). Для цього встановимо на деякій відстані від ялини жердину MN з планкою, що обертається навколо точки N. Спрямуємо планку на верхню точку N_1 ялини, як показано на малюнку 16.7. На землі позначимо точку A, у якій планка впиратиметься в поверхню землі.

Розглянемо $\triangle ANM$ ($\angle M = 90°$) і $\triangle AN_1M_1$ ($\angle M_1 = 90°$). $\angle A$ – їхній спільний гострий кут.

Тоді $\triangle ANM \sim \triangle AN_1M_1$ (за гострим кутом).

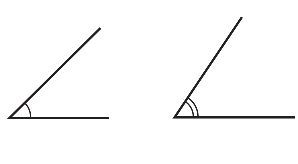
Тому $\dfrac{MN}{AM} = \dfrac{M_1N_1}{AM_1}$, звідки $M_1N_1 = \dfrac{MN \cdot AM_1}{AM}$.

Якщо, наприклад, $MN = 2$ м, $AM = 3{,}2$ м, $AM_1 = 7{,}2$ м, то $M_1N_1 = \dfrac{2 \cdot 7{,}2}{3{,}2} = 4{,}5$ (м).

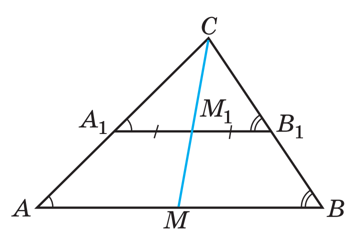
5. Задачі на побудову

Приклад 3. Побудувати трикутник за двома кутами та медіаною, проведеною з вершини третього кута.

Розв'язання. На малюнку 16.8 зображено два заданих кути й заданий відрізок. Побудуємо трикутник, у якого два кути відповідно дорівнюють двом заданим кутам, а медіана, проведена з вершини третього кута, дорівнює заданому відрізку.



Мал. 16.8



Мал. 16.9

1) Будуємо деякий трикутник, подібний до шуканого. Для цього побудуємо довільний трикутник A_1B_1C, у якого кути A_1 і B_1 дорівнюють заданим (мал. 16.9).

2) Проводимо медіану CM_1 трикутника A_1CB_1 і відкладаємо на прямій CM_1 відрізок CM, що дорівнює заданому.

3) Через точку M проводимо пряму, паралельну A_1B_1. Вона перетинає сторони кута C у деяких точках A і B (мал. 16.9).

4) Оскільки $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Отже, два кути трикутника ABC дорівнюють заданим.

Доведемо, що M – середина AB.

$\triangle A_1CM_1 \sim \triangle ACM$ (за двома кутами). Тому $\dfrac{CM_1}{CM} = \dfrac{A_1M_1}{AM}$.

$\triangle B_1CM_1 \sim \triangle BCM$ (за двома кутами). Тому $\dfrac{CM_1}{CM} = \dfrac{B_1M_1}{BM}$.

Отже, $\frac{A_1M_1}{AM} = \frac{B_1M_1}{BM}$, тобто $\frac{A_1M_1}{B_1M_1} = \frac{AM}{BM}$. Але $A_1M_1 = B_1M_1$ (за побудовою), тому $\frac{AM}{BM} = 1$ і $AM = BM$.

Отже, CM – медіана трикутника ABC і трикутник ABC – шуканий.

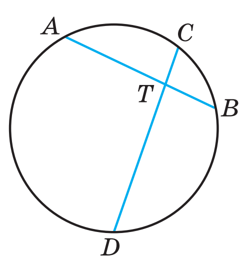
Сформулюйте теорему про пропорційність відрізків хорд та наслідок з неї. Сформулюйте теорему про пропорційність відрізків січної і дотичної та наслідки з неї.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

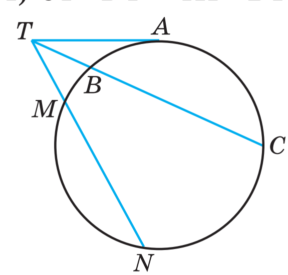
1

16.1. (*Усно.*) T – точка перетину хорд AB і CD (мал. 16.10). Які з рівностей є правильними:

1) $AT \cdot TC = BT \cdot TD$; 2) $AT \cdot TB = CT \cdot TD$;
3) $AT \cdot DT = CT \cdot BT$; 4) $CT \cdot DT = AT \cdot BT$?



Мал. 16.10



Мал. 16.11

16.2. (*Усно.*) TA – відрізок дотичної до кола. Дві січні перетинають коло відповідно в точках B і C та M і N (мал. 16.11). Які з рівностей є правильними:

1) $TA^2 = TB \cdot BC$; 2) $TA^2 = TM \cdot TN$;
3) $TB \cdot TC = TM \cdot MN$; 4) $TM \cdot TN = TB \cdot TC$?

2

16.3. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці P, $AP = 9$, $PB = 2$, $DP = 4$. Знайдіть CP.

16.4. Хорди MN і KL кола перетинаються в точці A, $KA = 6$, $AL = 3$, $MA = 4$. Знайдіть AN.

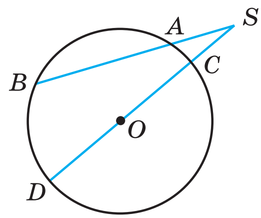
16.5. SA – відрізок дотичної до кола, A – точка дотику. Січна, що проходить через точку S, перетинає коло в точках B і C, $SA = 6$ см, $SB = 4$ см. Знайдіть SC і BC.

16.6. MP – відрізок дотичної до кола, P – точка дотику. Січна, що проходить через точку M, перетинає коло в точках B і C, $MP = 4$ см, $MC = 8$ см. Знайдіть MB і BC.

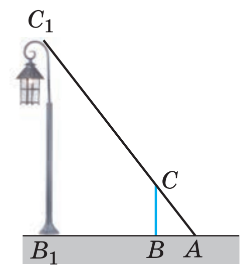
16.7. Хорда AB, довжина якої 16 см, перетинається з хордою CD в точці T. $AT = 2$ см, $CT = 1$ см. Знайдіть довжину хорди CD.

16.8. Хорда CD завдовжки 13 см, перетинає хорду MN у точці A, $CA = 4$ см, $MA = 2$ см. Знайдіть довжину хорди MN.

16.9. Січна, що проходить через точку S, перетинає коло в точках A і B, а інша січна, що проходить через точки S і центр кола O, – у точках C і D (мал. 16.12). $SA = 4$ см, $SB = 16$ см, $SC = 2$ см. Знайдіть радіус кола.



Мал. 16.12



Мал. 16.13

16.10. Січна, що проходить через точку S, перетинає коло в точках A і B, а друга січна, що проходить через точки S і центр кола O, – у точках C і D (мал. 16.12). $SA = 4$ см, $SB = 9$ см, $SC = 3$ см. Знайдіть діаметр кола.

16.11. Для знаходження висоти ліхтаря B_1C_1 використали жердину BC завдовжки 1,5 м (мал. 16.13). $AB = 1$ м, $AB_1 = 6$ м. Знайдіть висоту ліхтаря B_1C_1.

16.12. Двірник виміряв висоту ліхтаря B_1C_1, використавши жердину BC з планкою AC (мал. 16.13). Знайдіть довжину використаної жердини BC, якщо висота ліхтаря склала 8 м і $AB_1 = 10$ м, $AB = 2,5$ м.

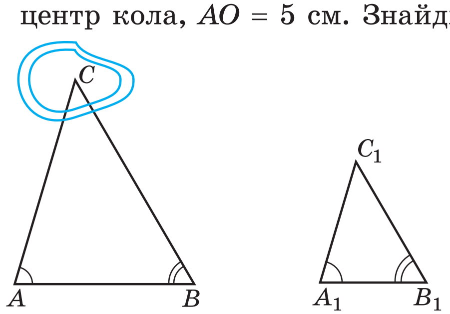
16.13. Щоб знайти на місцевості відстань від точки A до недоступної точки C, вибрали точку B, а потім на папері побудували трикутник $A_1B_1C_1$ так, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (мал. 16.14). Знайдіть AC, якщо $AB = 30$ м, $A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 7$ см.

3

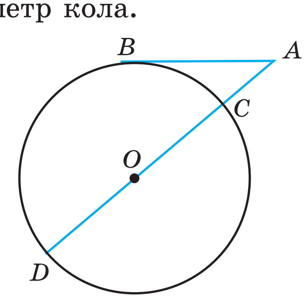
16.14. Хорди кола AB і CD перетинаються в точці E. $AE : BE = 1 : 3$, $CD = 20$ см, $DE = 5$ см. Знайдіть AB.

16.15. Через точку M, що розміщена всередині кола, проведено дві хорди AB і CD, $AM = MB$, $CM = 16$ см, $DM : MC = 1 : 4$. Знайдіть AB.

16.16. На малюнку 16.15 AB – дотична до кола, $AB = 3$ см. Точка O – центр кола, $AO = 5$ см. Знайдіть діаметр кола.



Мал. 16.14



Мал. 16.15

16.17. На малюнку 16.15 AB – дотична до кола, точка O – центр кола, $AB = 8$ см, $AO = 10$ см. Знайдіть радіус кола.

16.18. Діаметр кола AB перпендикулярний до хорди CD, AB і CD перетинаються в точці M, $AM = 2$ см, $CM = 4$ см. Знайдіть радіус кола.

16.19. Діаметр кола MN і хорда AB – взаємно перпендикулярні й перетинаються в точці P, $PB = 12$ см, $NP = 18$ см. Знайдіть діаметр кола.

4 **16.20.** Перпендикуляр, проведений з точки кола до радіуса, дорівнює 24 см і ділить радіус у відношенні 5 : 8, починаючи від центра. Знайдіть радіус кола.

16.21. Знайдіть бісектрису AL трикутника ABC, якщо $AC = 15$ см, $AB = 12$ см, $BC = 18$ см.

16.22. Побудуйте трикутник за двома кутами й бісектрисою, проведеною з вершини третього кута.

16.23. Побудуйте трикутник за двома кутами й висотою, проведеною з вершини третього кута.

16.24. Побудуйте трикутник ABC за даним кутом C, відношенням сторін $AC : CB = 3 : 2$ та медіаною CM.

Вправи для повторення

16.25. PL – бісектриса трикутника PMN, $PN = 6$ см, $PM = 10$ см. Більший з двох відрізків, на які бісектриса PL ділить сторону MN, дорівнює 5 см. Знайдіть менший із цих відрізків.

16.26. Сторони трикутника відносяться як 3 : 4 : 6. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 52 см.

16.27. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a см і b см ($a > b$). Знайдіть квадрат висоти трапеції, якщо її бічна сторона перпендикулярна до діагоналі.

Життєва математика

16.28. На дачі родини Гордієнків потрібно пофарбувати із зовнішнього та внутрішнього боків бак із кришкою для води. Він має форму куба, ребро якого дорівнює 1,2 м. У магазині є фарба в банках по 1 кг і 2,5 кг.
1) Скільки м^2 потрібно пофарбувати?
2) Скільки фарби і в яких банках потрібно придбати, якщо на 1 м^2 витрачається 0,2 кг фарби?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

16.29. На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок $CM = BC$. Чи може кут ABM бути:
1) гострим; 2) прямим?

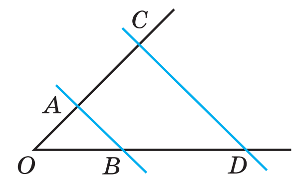
ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3 (§§ 11–16)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Дано: $AB \parallel CD$ (мал. 1), $OA = 3$ см, $OB = 4$ см, $BD = 12$ см. Знайдіть AC.

А. 8 см **Б.** 9 см
В. 10 см **Г.** 16 см



Мал. 1

2. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB : DE = 2 : 3$. Знайдіть відношення $EF : BC$.

А. 5 : 2 **Б.** 3 : 5
В. 2 : 3 **Г.** 3 : 2

3. За яких з наведених умов $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$?

А. $\angle A = \angle A_1 = 30°$
Б. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = 40°$, $\angle B_1 = 50°$
В. $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = 47°$, $\angle C_1 = 47°$
Г. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = 150°$, $\angle C_1 = 150°$

2

4. CL – бісектриса трикутника ABC, $AC = 6$ см, $BC = 9$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса CL ділить сторону AB, дорівнює 3 см. Знайдіть AB.

А. 7,5 см **Б.** 6 см **В.** 5 см **Г.** 6,5 см

5. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проєкція на гіпотенузу – 8 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

А. 15 см **Б.** 18 см **В.** 16 см **Г.** 24 см

6. Хорда AB завдовжки 12 см перетинає хорду CD у точці K, $AK = 2$ см, $CK = 4$ см. Знайдіть довжину хорди CD.

А. 9 см **Б.** 8 см **В.** 12 см **Г.** 10 см

3

7. Сторони трикутника відносяться як 3 : 4 : 5. Знайдіть найменшу сторону подібного йому трикутника, якщо сума його середньої за величиною і найбільшої сторін дорівнює 72 см.

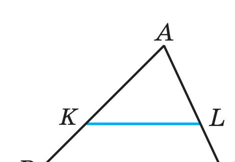
А. 18 см **Б.** 27 см **В.** $30\frac{6}{7}$ см **Г.** 24 см

8. $ABCD$ – трапеція, AB і CD – її основи, O – точка перетину діагоналей. $AB - CD = 4$ см, $AO = 8$ см, $OC = 6$ см. Знайдіть AB.

А. 12 см **Б.** 16 см **В.** 14 см **Г.** 18 см

9. Пряма KL паралельна стороні BC трикутника ABC, $K \in AB$, $L \in AC$ (мал. 2). $BC = 9$ см, $KL = 6$ см, $KB = 4$ см. Знайдіть довжину сторони AB.

А. 12 см **Б.** 8 см
В. 16 см **Г.** 10 см



Мал. 2

4

10. Периметр паралелограма дорівнює 30 см, а його висоти – 4 см і 6 см. Знайдіть більшу сторону паралелограма.

А. 6 см **Б.** 8 см **В.** 9 см **Г.** 12 см

11. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Висота трапеції дорівнює 6 см і ділить більшу основу на два відрізки, менший з яких дорівнює 3 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

А. 6 см **Б.** 8 см **В.** 9 см **Г.** 12 см

12. У трикутнику, сторони якого дорівнюють 8 см, 12 см і 15 см, проведено півколо, центр якого належить більшій стороні трикутника і яке дотикається до двох інших сторін. На які відрізки центр півкола ділить більшу сторону трикутника?

А. 6 см і 9 см **Б.** 8 см і 7 см
В. 7,5 см і 7,5 см **Г.** 5 см і 10 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3

13. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90°$, CK — висота трикутника, $KB = 9$ см, $AK : CK = 4 : 3$. Установіть відповідність між сторонами трикутника ABC (1–3) та їхніми довжинами (А–Д).

Сторона трикутника	*Довжина*
1. AB	**А.** 15 см
2. BC	**Б.** 16 см
3. AC	**В.** 20 см
	Г. 25 см

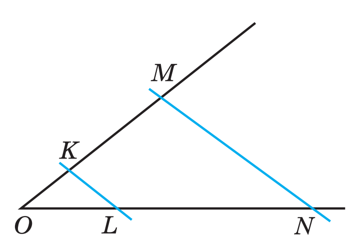
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 11–16

1

1. $\triangle ABC \sim \triangle LMN$, $\dfrac{AB}{LM} = 3$. Знайдіть відношення $\dfrac{AC}{LN}$.

2. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, якщо $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см, $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 8$ см, $A_1C_1 = 10$ см.

3. Дано: $KL \parallel MN$ (мал. 3), $OL = 3$ см, $LN = 6$ см, $OK = 2$ см. Знайдіть KM.



Мал. 3

2

4. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проєкція на гіпотенузу дорівнює 4 см, а гіпотенуза – 25 см.

5. AL – бісектриса трикутника ABC, $AB = 8$ см, $AC = 10$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса AL ділить сторону BC, дорівнює 4 см. Знайдіть BC.

6. Хорда CD завдовжки 9 см перетинає хорду AB у точці M, $CM = 3$ см, $AM = 9$ см. Знайдіть довжину хорди AB.

3 **7.** Сторони трикутника відносяться як 5 : 6 : 7. Знайдіть невідомі сторони подібного йому трикутника, якщо сума його більшої і меншої сторін дорівнює 24 см.

8. O – точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AO = 6$ см, $OC = 4$ см. Знайдіть основи трапеції, якщо їхня сума дорівнює 20 см.

4 **9.** Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 6 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

Додаткові завдання

4 **10.** У двох рівнобедрених трикутниках кути при вершині між собою рівні. Периметр одного з трикутників дорівнює 56 см. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо дві сторони другого трикутника відносяться як 2 : 3.

11. На стороні AC трикутника ABC позначено точку K таку, що $\angle ABK = \angle C$, $AB = 8$ см, $AK = 4$ см. Знайдіть KC.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

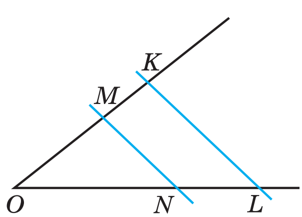
До § 11

1 **1.** На малюнку 1 $MN \parallel KL$.

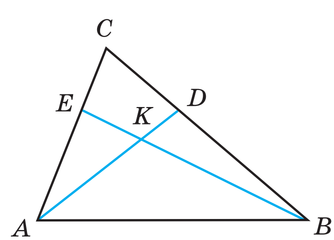
1) $OM : ON = 2 : 3$. Знайдіть $MK : NL$.

2) $OL : ON = 7 : 5$. Знайдіть $OK : OM$.

2 **2.** Паралельні прямі MN і KL перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 1). $OM = 4$, $NL = 9$, $ON = MK$. Знайдіть довжину відрізка ON.



Мал. 1



Мал. 2

3 **3.** Дано відрізки a і b. Побудуйте відрізок $x = \frac{a^2}{b}$.

4 **4.** На малюнку 2 $AE : EC = 2 : 1$, $BD : DC = 3 : 2$. Знайдіть $BK : KE$.

До § 12

1 **5.** $\triangle ABC \sim \triangle KLM$. Заповніть порожні комірки:

1) $\frac{AB}{AC} = \frac{\square}{\square}$; 2) $\frac{BC}{AC} = \frac{\square}{\square}$.

6. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Знайдіть невідомі сторони обох трикутників.

7. Сторони трикутника відносяться як $2 : 5 : 6$. Знайдіть периметр трикутника, подібного даному, якщо:
1) його середня за розміром сторона дорівнює 20 см;
2) сума більшої і меншої сторін дорівнює 40 см.

8. У трикутнику проведено середню лінію. Чи подібний трикутник, що утворився, даному трикутнику?

До § 13

9. За яких умов два трикутники подібні:
1) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого;
2) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого;
3) три кути одного трикутника дорівнюють трьом кутам другого?

10. На катеті AC і гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точки P і L такі, що $\angle APL = 90°$. Доведіть, що $\triangle APL \sim \triangle ACB$.

11. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, $OB = 3OA$, $OC = 3OD$. Доведіть, що $\triangle AOD \sim \triangle BOC$.

12. Діагоналі трапеції діляться точкою перетину у відношенні $2 : 3$. Менша основа трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

13. У трикутниках KLM і $K_1L_1M_1$ $\angle K = \angle K_1$, а сторони трикутника KLM, що утворюють кут K, у 2,5 раза більші за сторони, що утворюють кут K_1. Знайдіть LM, якщо $L_1M_1 = 4$ см.

14. $ABCD$ – трапеція, $AD \parallel BC$, $\angle BAC = \angle ADC$.
1) Знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.
2) Доведіть, що $AC^2 = AD \cdot BC$.

15. На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено точки M і N так, що $AC \cdot CM = BC \cdot CN$. Знайдіть подібні трикутники та доведіть їхню подібність.

16. На стороні AC трикутника ABC вибрано точку K так, що $\angle BKC = \angle ABC$, причому $\angle BKC$ – тупий. Знайдіть BC, якщо $AK = 16$ см, $CK = 9$ см.

17. У трикутнику ABC через точку N, що належить стороні BC, проведено прямі, що перетинають сторони AB і AC відповідно в точках M і K, і паралельні AC і AB. Доведіть, що $MN \cdot NK = BM \cdot CK$.

18. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, точки I і I_1 – точки перетину бісектрис цих трикутників. Доведіть, що $\triangle AIB \sim \triangle A_1I_1B_1$.

19. У трикутник ABC вписано прямокутник $KLMN$, у якого $KN = 16$ см, $LK = 10$ см. Причому $K \in AC$, $N \in AC$, $M \in BC$, $L \in AB$. Знайдіть висоту трикутника, проведену з вершини B, якщо $AC = 24$ см.

20. BD і AE – висоти гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що $DC \cdot AC = EC \cdot BC$.

До § 14

1 **21.** Накресліть прямокутний трикутник KLM ($\angle K = 90°$) та проведіть у ньому висоту KP. Які відрізки є проєкціями катетів KL і KM на гіпотенузу?

2 **22.** Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 1 см і 8 см. Знайдіть менший катет трикутника.

23. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 24 см, а проєкція одного з катетів на гіпотенузу – 18 см. Знайдіть проєкцію другого катета на гіпотенузу та катети трикутника.

3 **24.** BM – бісектриса рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). З точки M до BC проведено перпендикуляр MK. Знайдіть BM і периметр трикутника, якщо $KC = 9$ см, $MK = 12$ см.

25. Перпендикуляр, проведений з вершини кута прямокутника до діагоналі, ділить її на відрізки, довжини яких відносяться як 9 : 16. Знайдіть периметр прямокутника, якщо довжина перпендикуляра 12 см.

4 **26.** Коло, вписане в ромб, точкою дотику ділить сторону ромба на відрізки 3,6 см і 6,4 см. Знайдіть діагоналі ромба.

27. У рівнобічній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Висота трапеції дорівнює 6 см, а середня лінія – 9 см. Знайдіть основи трапеції.

До § 15

1 **28.** BM – бісектриса трикутника ABC. Знайдіть відношення $\frac{AM}{MC}$, якщо $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$.

2 **29.** BD – бісектриса трикутника ABC. Знайдіть сторону AB, якщо $AD : DC = 3 : 5$, $BC = 20$ см.

3 **30.** Одна зі сторін паралелограма на 9 см більша за другу. Бісектриса кута паралелограма ділить діагональ паралелограма на відрізки 4 см і 10 см. Знайдіть периметр паралелограма.

31. Периметр прямокутника – 60 см. Бісектриса, що виходить з вершини кута прямокутника, ділить його діагональ на відрізки, що відносяться як 7 : 8. Знайдіть сторони прямокутника.

4 **32.** Точка D належить стороні AB трикутника ABC. Порівняйте кути ACD і BCD, якщо $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $AD = 3$ см, $DB = 7$ см.

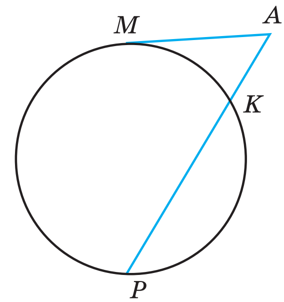
33. У рівнобедреному трикутнику радіус вписаного кола в 5 разів менший від висоти, проведеної до основи. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 90 см.

До § 16

1 **34.** S – точка перетину хорд AB і CD, $AS = 4$, $SB = 1$. Якому числу дорівнює добуток $CS \cdot DS$?

2 **35.** Січні a і b виходять з точки M, що лежить поза колом. Січна a перетинає коло в точках A і B, а січна b – у точках C і D. Відомо, що $MA \cdot MB = 28$, $MC = 4$. Знайдіть MD і CD.

36. З точки A до кола проведено дотичну AM та січну AP (мал. 3). Знайдіть довжини відрізків AK і PK, якщо $AM = 8$ см, $AP = 16$ см.



Мал. 3

3 **37.** З точки A до кола проведено дотичну AM та січну, яка перетинає коло в точках K і P (мал. 3). $AM = 10$ см, $AP : AK = 4 : 1$. Знайдіть AK, AP та KP.

38. Продовження медіани AM рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) перетинає коло, описане навколо трикутника, у точці P, $AM = 6$ см, $BC = 8$ см. Знайдіть AP.

4 **39.** У трикутнику ABC з вершини B проведено бісектрису BL. Відомо, що $BL = 5$ см, $AL = 4$ см, $LC = 5$ см. Знайдіть AB і BC.

40. Побудуйте трикутник ABC за даним кутом A, відношенням сторін $AC : AB = 4 : 3$ і бісектрисою AL.

Головне в розділі 2

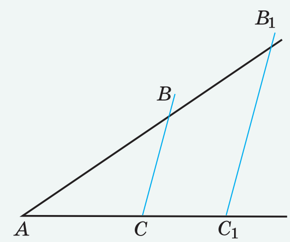
УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА
(теорема про пропорційні відрізки)

Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1}.$$

Наслідок 1. $\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}$.

Наслідок 2. $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$.

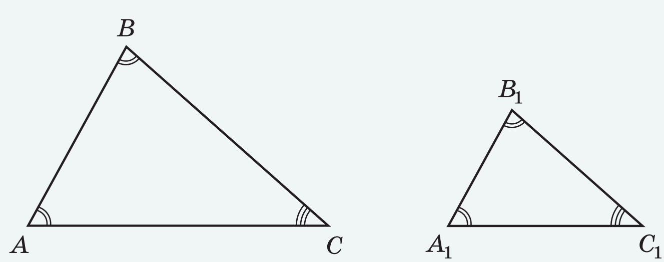


ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

Два ***трикутники*** називають ***подібними***, якщо їхні кути відповідно рівні й сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого.

Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні між собою, то

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.



Якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то із співвідношення $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ випливає співвідношення:

$$AB : BC : AC = A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1.$$

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін цих трикутників.

ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Теорема 1 (за двома сторонами та кутом між ними). **Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, між собою рівні, то трикутники подібні.**

Н а с л і д о к 1. **Прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного з них пропорційні катетам другого.**

Н а с л і д о к 2. **Якщо кут при вершині одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при вершині другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.**

Т е о р е м а 2 (за двома кутами). **Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то ці трикутники подібні.**

Н а с л і д о к 1. **Рівносторонні трикутники подібні.**

Н а с л і д о к 2. **Якщо кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі другого рівнобедреного трикутника, то ці трикутники подібні.**

Н а с л і д о к 3. **Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то ці трикутники подібні.**

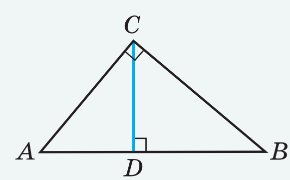
Т е о р е м а 3 (за трьома сторонами). **Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то ці трикутники подібні.**

СЕРЕДНІ ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ У ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ

Т е о р е м а (про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику). **1) Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним проєкцій катетів на гіпотенузу.**

2) Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи та проєкції цього катета на гіпотенузу.

$CD^2 = AD \cdot BD,$
$AC^2 = AB \cdot AD,$
$BC^2 = AB \cdot BD.$

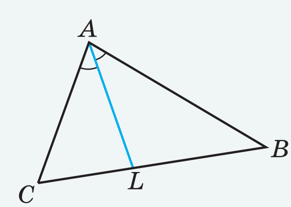


ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ ТРИКУТНИКА

Т е о р е м а (властивість бісектриси трикутника). **Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до неї сторонам.**

$\frac{AB}{KC} = \frac{BL}{CL}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$

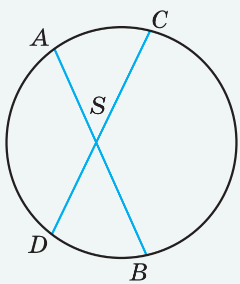
$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}, \quad \frac{AB}{BL} = \frac{AC}{LC}$

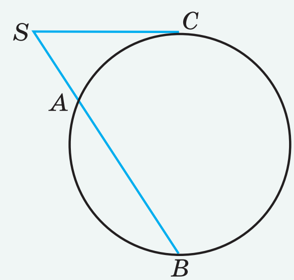


ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Теорема 1 (про пропорційність відрізків хорд). **Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці S, то**

$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

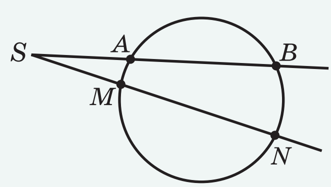




Теорема 2 (про пропорційність відрізків січної і дотичної). **Якщо з точки S поза колом провести січну, яка перетинає коло в точках A і B, та дотичну SC (C — точка дотику), то**

$$SC^2 = SA \cdot SB.$$

Наслідок 1. **Якщо з точки S провести дві січні, одна з яких перетинає коло в точках A і B, а друга — у точках M і N, то $SA \cdot SB = SM \cdot SN$.**

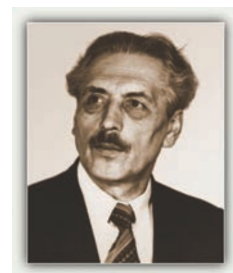


Найвеличніший геометр XX століття

На початку 1980-х років Американське математичне товариство видало багатотомник «Видатні математики XX століття». Четвертий його том було присвячено монографії «Проблема Монжа–Ампера» – праці Олексія Васильовича Погорєлова. В анотації до цього тому Погорєлова було названо «найвеличнішим геометром XX століття».

Саме так було оцінено внесок нашого видатного вченого в розвиток геометрії, однієї з найдавніших наук на Землі.

Народився Олексій Погорєлов 3 березня 1919 року в маленькому місті Короча тодішньої Білгородської губернії. У 1929 році сім'я Погорєлових переїжджає до Харкова. Батьки Олексія працювали спочатку на будівництві Харківського тракторного заводу, а потім на цьому заводі. Родина Погорєлових протягом довгого часу мешкала в крихітній, відгородженій від сусідів кімнатці бараку. Ліжок на всіх у родині бракувало, і батькові доводилося спеціально працювати в нічну зміну, щоб його діти могли виспатися в нормальних умовах. Незважаючи на складні умови проживання, Олексій добре навчався в школі з усіх предметів, але найбільше його цікавила математика. Згодом на одному з ювілеїв шкільні друзі згадували, що ще в школі однокласники дали йому прізвисько Паскаль.



У 1935 році в Києві було започатковано проведення математичних олімпіад[2]. А в 1937-му харківський десятикласник Олексій Погорєлов став переможцем такої олімпіади, і його запросили на навчання до Харківського державного університету (нині – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна). Отже, він став студентом математичного відділення. Олексій був дуже обдарованим студентом, про що свідчить той факт, що в 1943–1944 роках під час Другої світової війни його направили на навчання до Військово-повітряної академії ім. Жуковського – в один із найелітніших тодішніх військово-навчальних і наукових центрів. Після стажування в діючій армії та закінчення академії в 1945 році Олексія Погорєлова направляють на конструкторську роботу у відомий Центральний аерогідродинамічний інститут у Москві. У той самий час Олексій Васильович заочно навчається в аспірантурі Математичного інституту Московського держуніверситету. Саме в ці роки класичний математик-геометр Погорєлов сформувався і як інженер-конструктор, що має справу з конкретною технікою. У 1947 році Погорєлов починає викладацьку діяльність у Харківському університеті. У 1950-му йому було присвоєно звання професора. Із цього часу й протягом наступних двадцяти років його діяльність було відзначено багатьма державними та міжнародними преміями, він був членом-кореспондентом, а потім і дійсним членом Академії наук України та академіком АН СРСР.

У 1960 році в Харкові було створено Фізико-технічний інститут низьких температур (ФТІНТ), і Погорєлов очолив там відділ геометрії.

[2] Про становлення і розвиток українського математичного олімпіадного руху можна знайти в підручнику «Алгебра. 7 клас» (автор – О. С. Істер, видавництво «Генеза», 2024 р., с. 173–176).

В інституті він пропрацював 40 років, створивши новий напрям у механіці та геометрії – геометричну теорію стійкості тонких пружних оболонок, пошук якої розпочав ще академік О. Д. Александров, видатний математик, якого Погорєлов уважав своїм наставником у науці. Ця теорія підтвердилася під час досліджень, проведених у ФТІНТі. Інженерний талант класичного математика знайшов своє відображення у двох упроваджених авторських свідоцтвах, співпраці з машинобудівниками під час створення унікальних кріотурбогенераторів та надпровідних двигунів. А скільки оригінальних технічних ідей Погорєлова не було доведено до впровадження й офіційного визнання з виправдань, що це потребувало немалого клопоту та зусиль! Серед таких винаходів – безінерційна спінінгова котушка, незвичний новаторський плуг, двигун внутрішнього згоряння принципово нової схеми.

Але головною справою його життя, безперечно, була чиста математика, геометрія. Цілу бібліотеку – близько 40 монографій, перекладених мовами багатьох народів світу, залишив нам у спадок Олексій Васильович. Серед них є й такі, які зрозуміє лише коло спеціалізованих фахівців, а є й підручники з геометрії, написані для десятків тисяч студентів-математиків. А найвідомішим і найвизначнішим для класичної математики став його підручник з геометрії для середньої загальноосвітньої школи, перше видання якого вийшло друком у 1972 році та за яким протягом майже 20 років навчалися десятки мільйонів школярів СРСР та ще кілька років поспіль – українські школярі після здобуття Україною незалежності.

Помер Олексій Васильович Погорєлов у грудні 2002 року.

Нашому видатному земляку вдалося розв'язати задачі, які сформулювали найвідоміші математики XIX та початку XX століття: Коші, Дарбу, Гільберт, Вейль, Мінковський, Кон-Фессет і Бернштейн.

ЗМІСТ