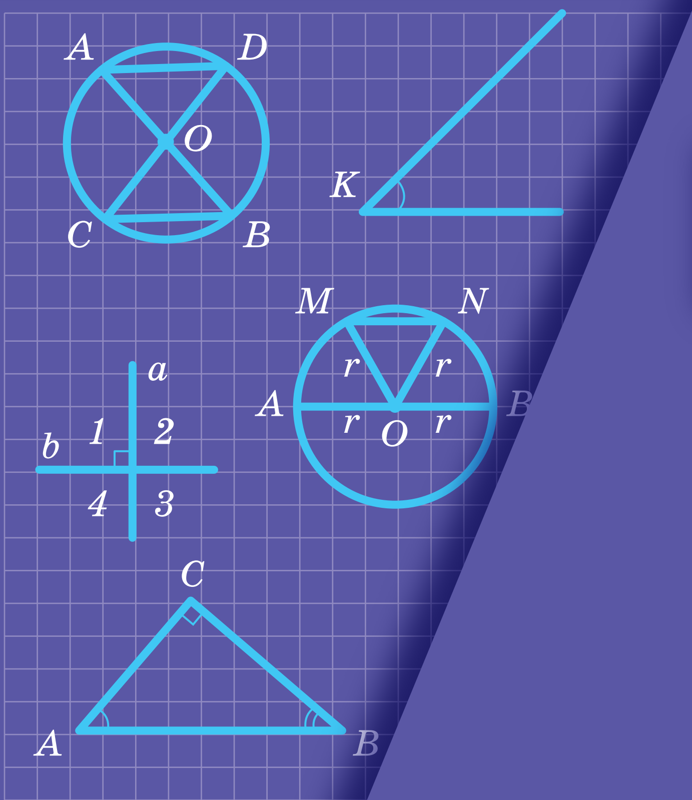
Генеза

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

Олександр Істер

ГЕОМЕТРІЯ

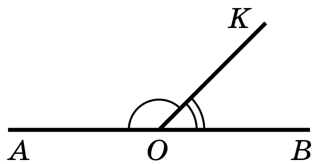


7

СУМІЖНІ КУТИ

$\angle AOK$ і $\angle KOB$ – суміжні

$\angle AOK + \angle KOB = 180^\circ$



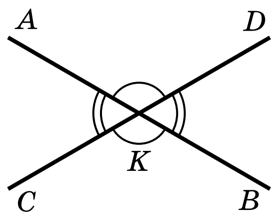
ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

$\angle AKC$ і $\angle DKB$ – вертикальні

$\angle AKD$ і $\angle CKB$ – вертикальні

$\angle AKC = \angle DKB$

$\angle AKD = \angle CKB$



ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

$a \parallel b$, якщо

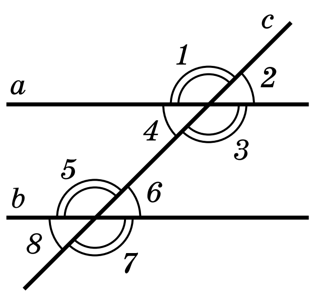
$\angle 1 = \angle 5$ ($\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$)

або

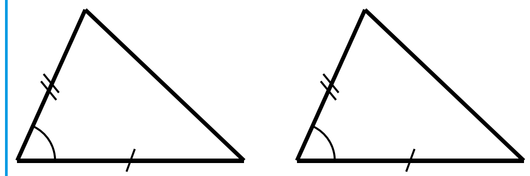
$\angle 3 = \angle 5$ ($\angle 4 = \angle 6$)

або

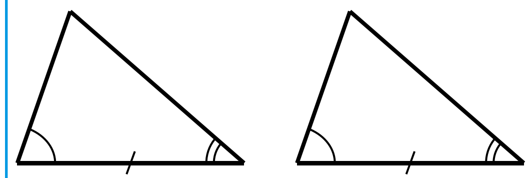
$\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ ($\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$)



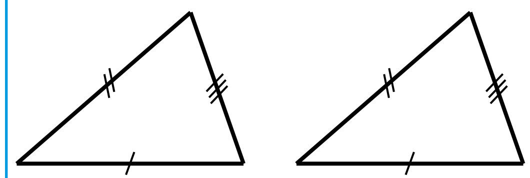
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



1. За двома сторонами і кутом між ними



2. За стороною і прилеглими до неї кутами



3. За трьома сторонами

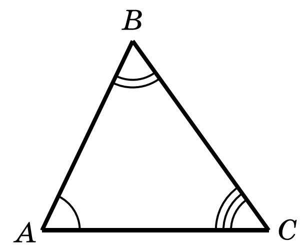
ТРИКУТНИК

$P = AB + BC + CA$

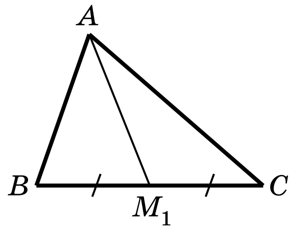
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$|AB - BC| < AC < AB + BC$

(нерівність трикутника)

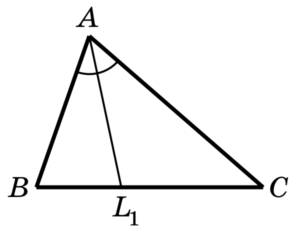


МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА І ВИСОТА ТРИКУТНИКА



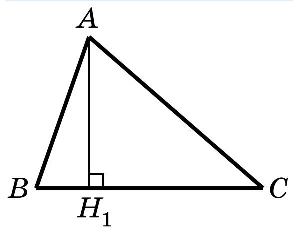
$BM_1 = M_1C$

AM_1 – медіана $\triangle ABC$



$\angle BAL_1 = \angle CAL_1$

AL_1 – бісектриса $\triangle ABC$

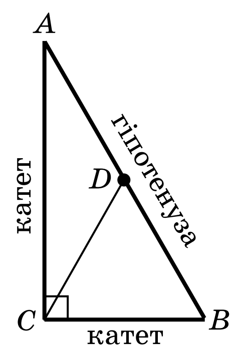


$AH_1 \perp BC$

AH_1 – висота $\triangle ABC$

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

1. $\angle A + \angle B = 90°$
2. $AB > AC$, $AB > BC$
3. Якщо $\angle A = 30°$, то $BC = \dfrac{AB}{2}$
4. Якщо $BC = \dfrac{AB}{2}$, то $\angle A = 30°$
5. Якщо CD – медіана, то $CD = \dfrac{AB}{2}$



ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

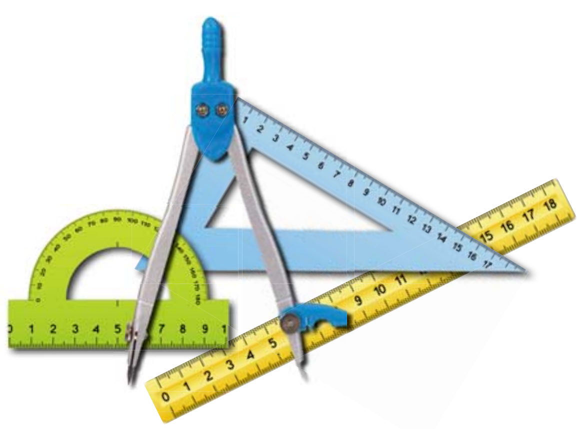
Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв	Друковані букви	Рукописні букви	Назва букв
Aa	*Aa*	а	Nn	*Nn*	ен
Bb	*Bb*	бе	Oo	*Oo*	о
Cc	*Cc*	це	Pp	*Pp*	пе
Dd	*Dd*	де	Qq	*Qq*	ку
Ee	*Ee*	е	Rr	*Rr*	ер
Ff	*Ff*	еф	Ss	*Ss*	ес
Gg	*Gg*	же	Tt	*Tt*	те
Hh	*Hh*	аш	Uu	*Uu*	у
Ii	*Ii*	і	Vv	*Vv*	ве
Jj	*Jj*	йот (жі)	Ww	*Ww*	дубль-ве
Kk	*Kk*	ка	Xx	*Xx*	ікс
Ll	*Ll*	ель	Yy	*Yy*	ігрек
Mm	*Mm*	ем	Zz	*Zz*	зет

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України



Київ
«ГЕНЕЗА»
2024

УДК 514(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Відповідає модельній навчальній програмі «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)

Істер О. С.
І-89 Геометрія : підруч. для 7-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2024. — 224 с. : іл.
ISBN 978-617-8353-28-5.

УДК 514(075.3)

ISBN 978-617-8353-28-5

Шановні семикласниці й семикласники!

Ви починаєте вивчати один з найцікавіших предметів – **геометрію** (у перекладі з грецької *гео* – земля, *метрео* – міряти). Виникнення геометрії пов'язане з практичною діяльністю людини. Ще давні єгиптяни та греки близько трьох тисяч років тому вміли виконувати різні вимірювання, потрібні для розмічування ділянок, спорудження будівель, прокладання доріг тощо. У процесі практичної діяльності землемірів, будівельників, астрономів, мореплавців, художників поступово складалися правила геометричних вимірювань, побудов та обчислень.

Пізніше, завдяки давньогрецьким ученим Фалесу, Піфагору, Евкліду та іншим, дедалі більшу роль у геометрії стали відігравати системи міркувань, які давали змогу доводити нові формули та факти на основі раніше відомих. На початок нашої ери геометрія вже сформувалася як наука, у якій властивості геометричних фігур вивчають шляхом міркувань.

Отже, геометрія виникла на основі діяльності людини. Спочатку вона використовувалася суто практично, але згодом сформувалася як самостійна математична наука.

Оволодіти матеріалом курсу вам допоможе цей підручник. Вивчаючи теоретичний матеріал, зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Так виділено нові, незнайомі поняття.

У підручнику є такі умовні позначення:

– пригадай (раніше вивчене);

! – зверни особливу увагу;

? – запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

113 – завдання для класної і 115 – домашньої роботи;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв'язування інших задач);

Т – теорема;

Н – наслідок з теореми;

■ – кінець доведення теореми або задачі;

– рубрика «Україна – це ми»;

– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;

– рубрика «Життєва математика»;

– вправи для повторення;

– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

– рубрика «Головне в розділі».

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня;

з позначки * починаються вправи підвищеної складності.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто всім тим, без чого неможливо уявити людину в сучасному світі.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – *«Завдання для перевірки знань за курс геометрії 7 класу»* та *«Задачі підвищеної складності»*. Учням, які цікавляться геометрією, варто розглянути вправи рубрики *«Цікаві задачі – поміркуй одначе»*.

Автор намагався подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів розміщено в рубриці *«А ще раніше...»*.

Бажаю успіхів на шляху до знань!

Шановні вчительки та вчителі!

Підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на факультативних та індивідуальних заняттях, під час підготовки до математичних змагань.

Додаткові вправи в *«Завданнях для перевірки знань»* призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Правильне їх розв'язання вчитель/ка може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час уроків узагальнення або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати цей матеріал за підручником удома. Спочатку бажано, щоб вона прочитала теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього – розв'язати задачі та вправи, що їй під силу, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу геометрії 7-го класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Розділ 1

ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** елементарні геометричні фігури: точку, пряму, промінь, кут, відрізок;
- **дізнаєтеся** про основні властивості елементарних геометричних фігур;
- **навчитеся** розв'язувати задачі, пов'язані з відрізками та кутами.

§ 1. Геометричні фігури. Точка, пряма, промінь

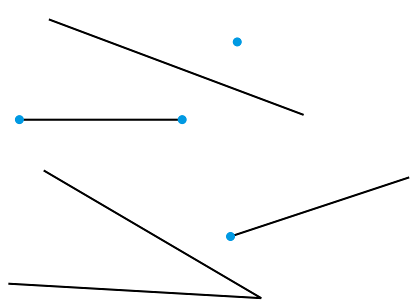
Геометрія

З уроків математики ви вже знаєте деякі геометричні фігури: точку, пряму, відрізок, промінь, кут (мал. 1.1), трикутник, прямокутник, коло (мал. 1.2). На уроках геометрії ви розширите й поглибите знання про ці фігури, ознайомитеся з іншими важливими фігурами та їхніми властивостями.

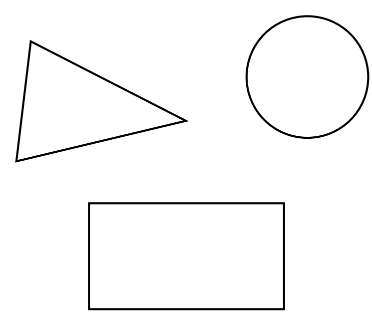
Геометрія – це наука про властивості геометричних фігур.

Точка

Найпростіша геометрична фігура – ***точка***. Уявлення про точку можна отримати, якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем або на шкільну дошку – добре загостреним шматком крейди.



Мал. 1.1

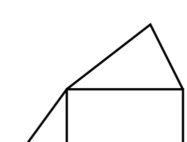


Мал. 1.2

З точок складаються всі інші геометричні фігури.

Будь-яка множина точок є геометричною фігурою.

Частина геометричної фігури теж є геометричною фігурою. Геометричною фігурою є й об'єднання кількох геометричних фігур. На малюнку 1.3 фігура складається з прямокутника і двох трикутників.



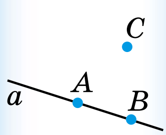
Мал. 1.3

Одна з основних геометричних фігур – ***площина***. Уявлення про частину площини дає поверхня стола, шибки, стелі тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою; вона не має ані краю, ані товщини. У 7–9-му класах ви вивчатимете частину шкільного курсу геометрії – ***планіметрію***.

Планіметрія вивчає властивості фігур на площині.

Пряма

Основними геометричними фігурами на площині є ***точка*** і ***пряма***. Прямі можна проводити за допомогою лінійки. При цьому ми зображуємо лише частину прямої, а всю пряму уявляємо нескінченною в обидва боки. Прямі найчастіше позначають маленькими латинськими буквами a, b, c, d, ..., а точки – великими латинськими буквами A, B, C, D, ...



Точки A і B *лежать* на прямій a, або пряма a *проходить через точки* A і B.

Кажуть: «Точки A і B *належать прямій* a».

Точка C *не лежить* на прямій a.

Кажуть: «Точка C *не належить прямій* a», або «Пряма a *не проходить через точку* C».

Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

Кажуть: «Точка A *належить прямій* a». → **Записують: $A \in a$.**

Кажуть: «Точка C *не лежить* на прямій a». → **Записують: $C \notin a$.**

Зауважимо, що через точки A і B не можна провести іншої прямої, яка б не збігалася з прямою a.

Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

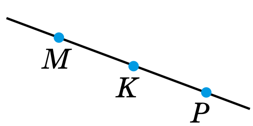
Тут і далі, говорячи про «дві точки», «дві прямі», вважатимемо, що ці точки, прямі – різні.

Пряму, на якій позначено дві точки, наприклад A і B, записують двома буквами: AB або BA. Якщо точка C, наприклад, не належить прямій AB, це записують так: $C \notin AB$ – і кажуть, що *точки A, B і C не лежать на одній прямій*.

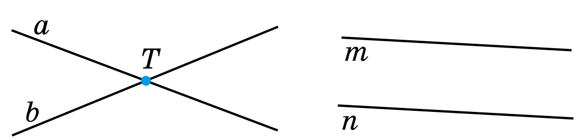
Точки M, K і P лежать на одній прямій (мал. 1.4), причому точка K лежить між точками M і P.

> **!** З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Якщо дві прямі мають спільну точку, то кажуть, що вони *перетинаються* в цій точці. На малюнку 1.5 прямі a і b перетинаються в точці T, а прямі m і n не перетинаються.



Мал. 1.4

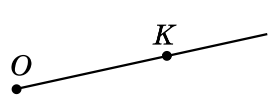


Мал. 1.5

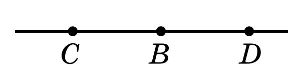
Промінь

Проведемо пряму та позначимо на ній точку A (мал. 1.6). Ця точка ділить пряму на дві частини, кожну з яких разом з точкою A називають ***променем***, що виходить з точки A. Точку A називають ***початком*** кожного з променів. Промені позначають двома великими латинськими буквами, перша з яких означає початок променя, а друга – деяку точку на промені (наприклад, промінь OK на малюнку 1.7).

Мал. 1.6



Мал. 1.7



Мал. 1.8

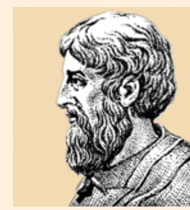
Доповняльні промені

Два промені, що мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають ***доповняльними***. На малюнку 1.8 промінь BC є доповняльним для променя BD, і навпаки, промінь BD є доповняльним для променя BC.

А ще раніше...

Перші відомості про властивості геометричних фігур люди отримували з практичної діяльності та спостережень за довколишнім світом. Перший твір, що містить найпростіші геометричні відомості про знаходження площ деяких фігур та об'ємів тіл, дійшов до нас із Давнього Єгипту. Він датується XVII ст. до н. е. Описані в цьому творі правила обчислення площ та об'ємів отримали з практики. Жодних логічних доведень їх істинності не наводилося. Самі ж значення площ та об'ємів, обчислені за такими правилами, були приблизними.

Про зародження геометрії у Давньому Єгипті давньогрецький історик Геродот (V ст. до н. е.) писав: «Сезострис, єгипетський фараон, розділив землю, давши кожному єгиптянину ділянку за жеребкуванням, та стягував відповідно податок з кожної ділянки. Бувало, що Ніл заливав ту чи ту ділянку, тоді потерпілий звертався до фараона, а той посилав землемірів, щоб установити, на скільки зменшилася ділянка, і відповідно зменшував податок. Так виникла геометрія в Єгипті, а звідти перейшла в Грецію».



Фалес
(бл. 640–548 рр. до н. е.)

Саме в Давній Греції і відбулося становлення геометрії як науки. Завдяки грецьким геометрам Фалесу, Піфагору, Демокріту (бл. 460–370 рр. до н. е.) відбувся поступовий перехід від практичної до теоретичної геометрії. Ці та інші вчені зробили кроки до строгого обґрунтування геометричних фактів і теорем, збагатили науку численними теоремами, які ми використовуємо й донині.

Піфагор
(бл. 580–500 рр. до н. е.)

Так було створено науку, що вивчає форми, розміри, властивості, взаємне розміщення геометричних фігур. Цю науку, як і раніше, називають *геометрією*, хоча її зміст вийшов далеко за межі вчення про вимірювання землі.

Що вивчає геометрія? ○ Наведіть приклади геометричних фігур. ○ Назвіть основні геометричні фігури на площині. ○ Як позначають прямі та точки? ○ Скільки прямих можна провести через дві точки? ○ Що таке промінь? ○ Як позначають промені? ○ Які промені називають доповняльними?

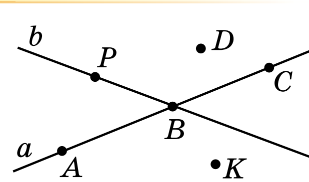
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **1.** Назвіть за малюнком 1.9:

1) точки, що належать прямій a;

2) точки, що належать прямій b;

3) точку, що належить і прямій a, і прямій b;



Мал. 1.9

4) точки, що належать прямій a, але не належать прямій b;

5) точки, що не належать ані прямій a, ані прямій b.

2. Позначте в зошиті точки M і N та проведіть через них пряму. Назвіть цю пряму. Позначте точку K, що належить побудованій прямій, та точку L, яка їй не належить. Зробіть відповідні записи.

3. Проведіть пряму a. Позначте дві точки, що належать цій прямій, і дві точки, які їй не належать. Назвіть точки та запишіть взаємне розміщення прямої і точок, використовуючи символи $\in$ і $\notin$.

4. На малюнку 1.10 пряма AB перетинає прямі MN і KL у точках C і D. Запишіть:

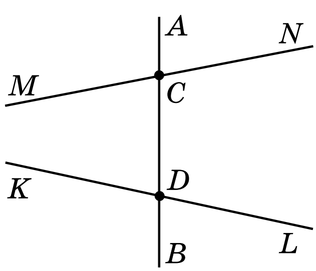
1) усі промені з початком у точці C;

2) пари доповняльних променів, початок яких – точка D.

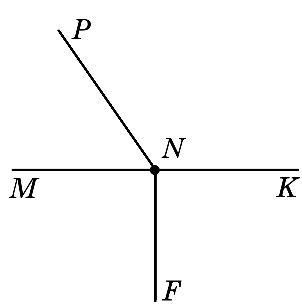
5. 1) Запишіть усі промені, зображені на малюнку 1.11.

2) Чи є серед цих променів пари доповняльних променів?

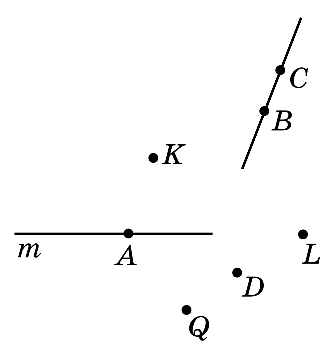
6. Позначте в зошиті точки M, N, F так, щоб через них можна було провести пряму. Запишіть усі можливі назви цієї прямої.



Мал. 1.10



Мал. 1.11



Мал. 1.12

7. Позначте в зошиті точки B, C і D так, щоб записи CD і CB позначали одну й ту саму пряму. Як ще можна назвати цю пряму?

8. Використовуючи малюнок 1.12:

1) з'ясуйте, чи перетинаються прямі m і CB;

2) запишіть усі точки, які належать прямій m;

3) запишіть усі точки, які належать прямій BC;

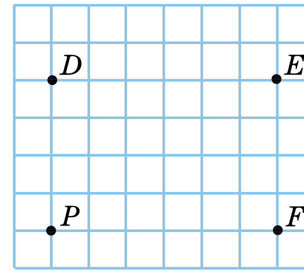
4) запишіть точки, які не належать ані прямій m, ані прямій BC.

4 **9.** Позначте в зошиті точки D, E, F, P, як на малюнку 1.13.

1) Через кожні дві точки проведіть пряму. Запишіть назви всіх цих прямих.

2) Скільки всього прямих утворилося?

3) На скільки частин ці прямі розбивають площину?



Мал. 1.13

10. Позначте в зошиті три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій.

1) Через кожні дві точки проведіть пряму. Запишіть усі утворені прямі.

2) Скільки всього прямих утворилося?

3) На скільки частин ці прямі розбивають площину?

11. Точка A ділить пряму m на два промені. За якої умови точки B і C цієї прямої належать одному променю; різним променям?

Життєва математика

12. Парк має форму прямокутника розмірами 800 м і 600 м, по периметру якого є доріжка для бігу, ходьби або велосипедних прогулянок.

1) Семикласник Вадим веде здоровий спосіб життя та щоранку пробігає по доріжці в парку зі швидкістю 14 км/год. Скільки часу витрачає учень на пробіжку?

2) Батьки Вадима також ведуть здоровий спосіб життя та щовечора прогулюються доріжкою парку, на це вони витрачають 50 хв. З якою швидкістю прогулюються батьки Вадима?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

13. Накресліть відрізок MN, позначте на ньому точки A і B. Запишіть усі утворені відрізки з кінцями в точках M, N, A і B.

14. Побудуйте відрізки AB і DC так, щоб $AB = 5$ см, $CD = 6$ см 2 мм. Порівняйте довжини відрізків.

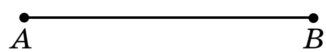
Цікаві задачі – поміркуй одначе

15. На площині проведено три прямі. На першій позначено 2023 точки, на другій – 2024, а на третій – 2025 точок. Яку найменшу загальну кількість точок при цьому може бути позначено?

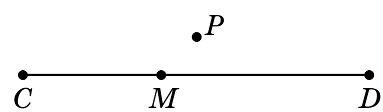
§ 2. Відрізок. Вимірювання відрізків. Відстань між двома точками

Відрізок

Відрізком **називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками разом із цими точками. Ці точки називають *кінцями відрізка*.**

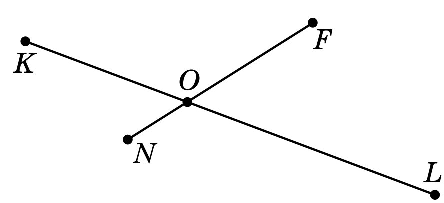


Мал. 2.1



Мал. 2.2

На малюнку 2.1 зображено відрізок AB, або відрізок BA; точки A і B – його кінці. На малюнку 2.2 точка M належить відрізку CD (її ще називають ***внутрішньою точкою*** відрізка), а точка P йому не належить.



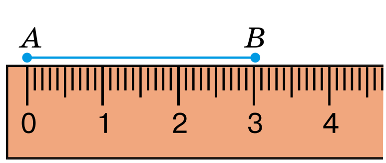
Мал. 2.3

На малюнку 2.3 відрізки KL і FN мають єдину спільну точку O. Кажуть, що відрізки KL і FN *перетинаються* в точці O.

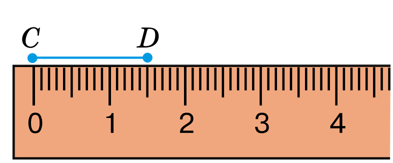
Вимірювання відрізків

На практиці часто доводиться вимірювати відрізки. Для цього потрібно мати ***одиничний відрізок*** (одиницю вимірювання). Одиницями вимірювання довжини є 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Для вимірювання відрізків використовують різні вимірювальні інструменти. Одним з таких інструментів є лінійка з поділками. На малюнку 2.4 довжина відрізка AB дорівнює 3 см. Коротко кажуть: «Відрізок AB дорівнює 3 см». На малюнку 2.5 довжина відрізка CD дорівнює 1 см 5 мм, або 1,5 см, або 15 мм. Записують це так: $AB = 3$ см, $CD = 1{,}5$ см $= 15$ мм.



Мал. 2.4



Мал. 2.5

❗ Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.

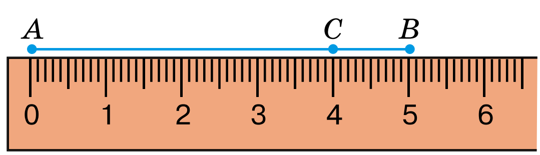
Іншими інструментами, якими можна вимірювати відрізки, є складаний метр (мал. 2.6), рулетка (мал. 2.7), клейончастий сантиметр (мал. 2.8).

Мал. 2.6

Мал. 2.7

Мал. 2.8

На малюнку 2.9 зображено відрізок AB. Точка C ділить його на два відрізки: AC і CB (кажуть також, що точка C належить відрізку AB). Бачимо, що $AC = 4$ см, $CB = 1$ см, $AB = 5$ см. Отже, $AC + CB = AB$.



Мал. 2.9

Маємо *основну властивість вимірювання* відрізків.

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

Довжину відрізка називають також ***відстанню між його кінцями***. На малюнку 2.9 відстань між точками A і C дорівнює 4 см.

Приклад 1. Чи лежать точки A, B і K на одній прямій, якщо:

1) $AB = 10$ см, $AK = 6$ см, $KB = 4$ см;

2) $AB = 9$ см, $AK = 6$ см, $KB = 5$ см?

Розв'язання. Якщо три точки A, B і K лежать на одній прямій, то довжина більшого з трьох відрізків AB, AK і KB має дорівнювати сумі довжин двох менших.

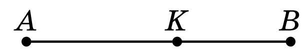
1) Оскільки $10 = 6 + 4$, то $AB = AK + KB$. Точки A, B і K лежать на одній прямій, причому точка K лежить між точками A і B.

2) Оскільки $9 \neq 6 + 5$, то $AB \neq AK + KB$. Точки A, B і K не лежать на одній прямій.

Відповідь: 1) так; 2) ні.

Приклад 2. Точка K належить відрізку AB, довжина якого 15 см. Знайти довжини відрізків AK і KB, якщо AK більший за KB на 3 см.

Розв'язання. Розглянемо малюнок, на якому точка K належить відрізку AB, $AB = 15$ см.



1) Нехай $KB = x$ см, тоді $AK = (x + 3)$ см.
2) Оскільки $AK + KB = AB$ (за основною властивістю вимірювання відрізків), маємо рівняння:

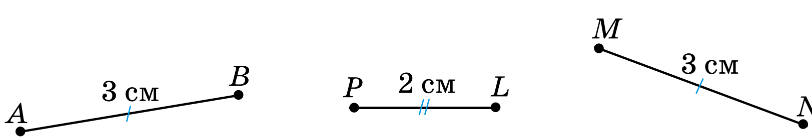
$$(x + 3) + x = 15.$$

Розв'яжемо це рівняння: $2x + 3 = 15$; $x = 6$ (см).
3) Отже, $KB = 6$ см, $AK = 6 + 3 = 9$ (см).
Відповідь: $KB = 6$ см, $AK = 9$ см.

Порівняння довжин відрізків

Два відрізки називають *рівними*, якщо рівні їхні довжини.

З двох відрізків більшим вважають той, довжина якого більша. На малюнку 2.10 довжина відрізка MN дорівнює довжині відрізка AB, тому ці відрізки рівні між собою. Можна записати: $MN = AB$. На цьому самому малюнку довжина відрізка MN більша за довжину відрізка PL. Кажуть, що відрізок MN більший за відрізок PL, записують це так: $MN > PL$.



Мал. 2.10

На малюнках рівні відрізки прийнято позначати однаковою кількістю рисочок, а відрізки неоднакової довжини – різною кількістю рисочок.

Середина відрізка

Точку відрізка, яка ділить його навпіл, тобто на два рівних між собою відрізки, називають ***серединою відрізка***.

$AC = 2$ см, $CB = 2$ см, → **тому точка C – середина відрізка AB.**

Очевидно, що

> якщо два відрізки рівні, то їхні половини рівні, і навпаки, якщо половини двох відрізків рівні, то й самі відрізки рівні.

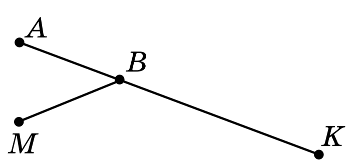
Що називають відрізком? Що таке кінці відрізка? Які одиниці вимірювання довжини ви знаєте? Якими інструментами вимірюють довжини відрізків? Що називають відстанню між двома точками? Сформулюйте основну властивість вимірювання довжин відрізків. Які відрізки називають рівними? Яку точку називають серединою відрізка?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

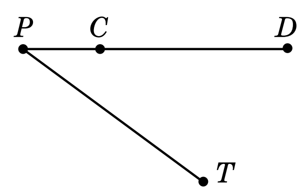
1

16. Назвіть усі відрізки, зображені на малюнку 2.11. Виміряйте довжини двох з них.

17. Запишіть усі відрізки, зображені на малюнку 2.12, та виміряйте довжини трьох з них.



Мал. 2.11



Мал. 2.12

18. Позначте в зошиті точки C і D та знайдіть відстань між ними.

2

19. Накресліть відрізки AB і MN так, щоб AB = 7 см 2 мм, MN = 6 см 3 мм. Порівняйте довжини відрізків AB і MN.

20. Накресліть відрізки KL і FP так, щоб KL = 5 см 9 мм, FP = 6 см 8 мм. Порівняйте довжини відрізків KL і FP.

21. Точка C лежить між точками A і B (мал. 2.13). Знайдіть:

1) AB, якщо AC = 5 см, CB = 2 см;

2) BC, якщо AB = 12 дм, AC = 9 дм.

Мал. 2.13

Мал. 2.14

22. Точка K лежить між точками P і Q (мал. 2.14). Знайдіть:

1) PQ, якщо PK = 3 дм, KQ = 7 дм;

2) PK, якщо PQ = 8 см, KQ = 6 см.

23. Чи лежать точки K, L і M на одній прямій, якщо:

1) KL = 8 см, LM = 3 см, KM = 11 см;

2) KL = 5 см, LM = 9 см, KM = 8 см?

У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

24. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо:
1) $AB = 7$ см, $BC = 3$ см, $AC = 9$ см;
2) $AB = 5$ см, $BC = 2$ см, $AC = 7$ см?
У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

3 **25.** На прямій позначено точки P, L і M, причому $PL = 42$ мм, $PM = 3$ см 2 мм, $LM = 0{,}74$ дм. Яка з точок лежить між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

26. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо $AB = 12$ см, $BC = 1{,}5$ дм, $AC = 40$ мм?

27. На малюнку 2.15 довжини відрізків AB і CD однакові. Обґрунтуйте, чому $AC = BD$.

Мал. 2.15

28. На малюнку 2.15 довжини відрізків AC і BD однакові. Обґрунтуйте, чому $AB = CD$.

29. Точки C і D належать відрізку AB. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AB = 40$ см, $AC = 25$ см, $BD = 32$ см.

30. Точки C і D належать відрізку MN. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $MN = 50$ см, $MC = 40$ см, $ND = 16$ см.

4 **31.** Точки C, D і M лежать на одній прямій. Знайдіть відстань між точками C і D, якщо відстань між точками C і M дорівнює 5,2 см, а відстань між точками D і M – 4,9 см. Скільки розв'язків має задача?

32. На прямій позначено точки A, M і N, причому $AM = 7{,}2$ см, $MN = 2{,}5$ см. Знайдіть відстань між точками A і N. Скільки розв'язків має задача?

33. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте назву першої столиці України.

Точка C належить відрізку AB завдовжки 14 дм. Знайдіть довжини відрізків AC і BC, якщо	AC	BC
AC втричі менший від BC	В	Х
AC більший за BC на 1,8 дм	Р	К
$AC : BC = 3 : 2$	А	І

10,5 дм	8,4 дм	7,9 дм	6,1 дм	5,6 дм	3,5 дм

34. Розв’яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище українського поета та правозахисника. Дізнайтеся з інтернету про його біографію, творчий шлях і боротьбу за незалежність України.

Точка M належить відрізку CD = 8,4 см. Визначте довжину відрізків CM і DM, якщо	CM	DM
CM більший за DM на 0,6 см	У	Т
$CM : DM = 1 : 3$	С	С

2,1 см	3,9 см	4,5 см	6,3 см

Життєва математика

35. На хімічному комбінаті, де у великій кількості є отруйні й небезпечні для життя речовини, унаслідок аварії стався витік хлору. У безвітряну погоду хлор стелиться по землі. Поширюючись, він займає ділянку поверхні у формі круга.

1) Обчисліть площу зараженої території, якщо відстань від місця витоку хлору до межі по радіусу 200 м.

2) Обчисліть, якої довжини мотузка знадобиться для огородження зараженої зони.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

36. Назвіть вид кута (гострий, прямий, тупий, розгорнутий), градусна міра якого дорівнює:

1) 52°; 2) 180°; 3) 129°;
4) 90°; 5) 2°; 6) 173°.

37. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює:

1) 60°; 2) 25°; 3) 90°;
4) 110°; 5) 180°; 6) 145°.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

38. Розділіть трикутник двома прямими на:

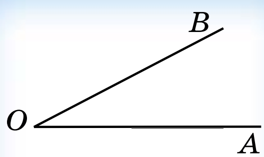
1) два трикутники й один чотирикутник;

2) два трикутники, один чотирикутник і один п’ятикутник.

§ 3. Кут. Вимірювання кутів. Бісектриса кута

Кут

Кут — це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки.
Промені називають _сторонами кута_, а їхній спільний початок — _вершиною кута_.

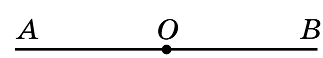


O — вершина кута, OA і OB — сторони кута.

Називають:
кут O, або
кут AOB, або
кут BOA
(букву O, що позначає його вершину, ставлять посередині).

Записують:
$\angle O$,
або
$\angle AOB$,
або
$\angle BOA$.

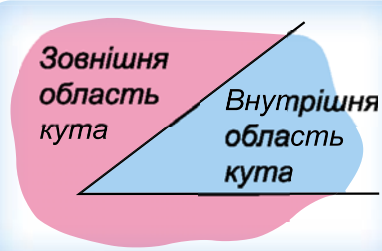
Розгорнутий кут — це кут, сторони якого є доповняльними променями (мал. 3.1).



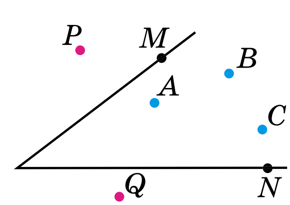
Мал. 3.1

Будь-який кут ділить площину на дві частини.

Якщо кут не розгорнутий, то одну із частин називають _внутрішньою областю_ кута, а іншу — _зовнішньою_.



На малюнку 3.2 точки A, B і C належать внутрішній області кута (лежать усередині кута), точки M і N належать сторонам кута, а точки P і Q належать зовнішній області кута (лежать поза кутом). Якщо кут є розгорнутим, то будь-яку з двох частин, на які він ділить площину, можна вважати внутрішньою областю кута.



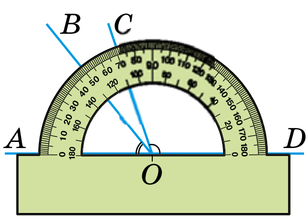
Мал. 3.2

Вимірювання кутів

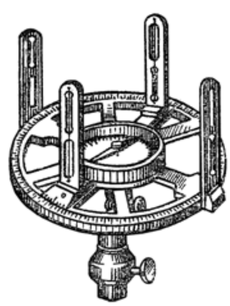
За одиницю вимірювання кутів приймають ***градус*** – кут, який становить $\frac{1}{180}$ від розгорнутого кута. Позначають градус знаком °. Для вимірювання кутів використовують *транспортир* – інструмент, який ви знаєте з молодших класів.

На малюнку 3.3 градусна міра кута AOB дорівнює 50°, а кута COD – 110°. Коротко кажуть: кут AOB дорівнює 50°, кут COD дорівнює 110°; записують так: $\angle AOB = 50°$, $\angle COD = 110°$.

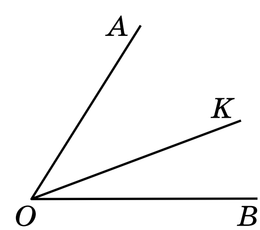
> Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.



Мал. 3.3



Мал. 3.4



Мал. 3.5

Дуже малі кути вимірюють у мінутах і секундах.

Мінута – це $\frac{1}{60}$ частина градуса, позначають знаком ′.

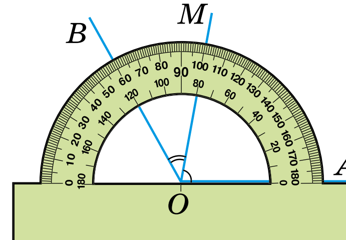
Секунда – $\frac{1}{60}$ частина мінути, позначають знаком ″.

Отже, $1° = 60'$, $1' = 60''$.

На місцевості кути вимірюють *астролябією* (мал. 3.4).

Будемо вважати, що промінь OK ***проходить між сторонами кута*** AOB, якщо він виходить з його вершини і лежить у його внутрішній області (мал. 3.5).

На малюнку 3.6 промінь OM проходить між сторонами кута AOB і ділить його на два кути: BOM і MOA. Бачимо, що $\angle BOM = 40°$, $\angle MOA = 80°$, $\angle AOB = 120°$. Отже, $\angle AOB = \angle BOM + \angle MOA$.



Мал. 3.6

Маємо *основну властивість вимірювання кутів*.

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Приклад 1. Промінь OK ділить кут AOB на два кути (мал. 3.5). Знайти градусну міру кута AOK, якщо $\angle AOB = 75°$, а кут KOB складає 40 % від кута AOB.

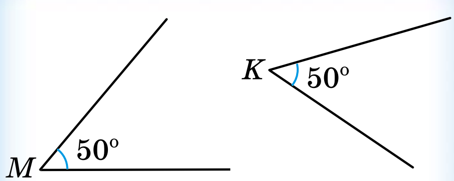
Розв'язання. 1) $\angle KOB = 0{,}4 \cdot \angle AOB = 0{,}4 \cdot 75° = 30°$.
2) $\angle AOK = \angle AOB - \angle KOB = 75° - 30° = 45°$.
Відповідь: 45°.

Порівняння кутів

З'ясуємо, як порівнювати кути.

Два кути називають *рівними між собою*, якщо в них однакові градусні міри.

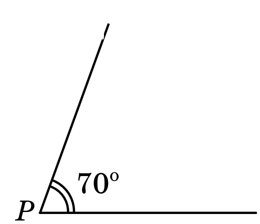
З двох кутів більшим вважають той, градусна міра якого є більшою.



$\angle M = 50°$, $\angle K = 50°$

Ці кути рівні між собою, тому $\angle M = \angle K$. На малюнку такі кути позначають однаковою кількістю дужок при вершині, а якщо кути не є рівними між собою, – різною кількістю дужок.

На малюнку 3.7 градусна міра кута P дорівнює 70°, тому кут P більший за кут M. Записують це так: $\angle P > \angle M$.



Мал. 3.7

Очевидно, що

якщо два кути рівні, то їхні половини рівні, і навпаки, якщо половини двох кутів рівні, то й самі кути рівні.

Види кутів

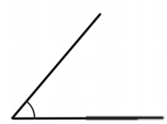
Крім розгорнутого кута, є й інші види кутів.

Якщо градусна міра кута дорівнює 90°, то такий кут називають *прямим*.

Прямий

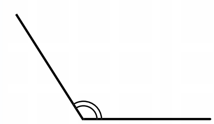
такий кут позначають знаком ⌉

Якщо градусна міра кута менша від прямого кута (від 90°), то такий кут називають *гострим*.



Гострий

Якщо градусна міра кута більша за прямий (за 90°) і менша від розгорнутого, то такий кут називають *тупим*.

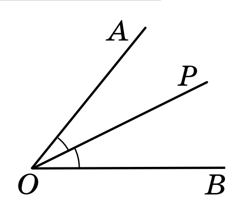


Тупий

Бісектриса кута

Бісектрисою кута **називають промінь, який виходить з його вершини і ділить кут навпіл.**

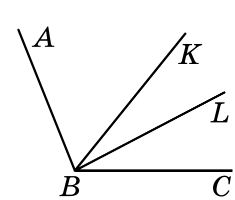
На малюнку 3.8 промінь OP – бісектриса кута AOB.



Мал. 3.8

Приклад 2. $\angle ABC = 100°$, BK – бісектриса кута ABC, а BL – бісектриса кута KBC. Знайти $\angle ABL$.

Розв'язання. Розглянемо малюнок.



1) $\angle KBC = \dfrac{\angle ABC}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°.$

2) $\angle LBC = \dfrac{\angle KBC}{2} = \dfrac{50°}{2} = 25°.$

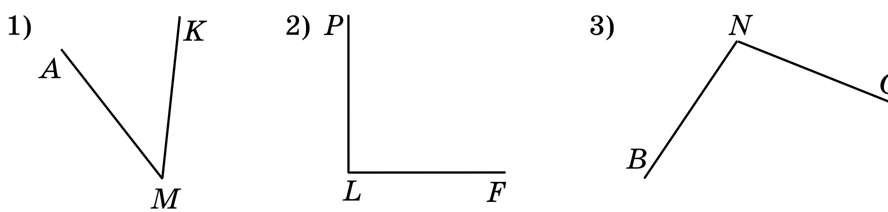
3) $\angle ABL = \angle ABC - \angle LBC = 100° - 25° = 75°$.

Відповідь: 75°.

Яку фігуру називають кутом? Як позначають кут? Що таке вершина кута; сторона кута? Який кут називають розгорнутим? Якими інструментами вимірюють кути? У яких одиницях вимірюють кути? Що означає вислів: «Промінь проходить між сторонами кута»? Сформулюйте основну властивість вимірювання кутів. Які кути називають рівними? Який кут називають прямим; гострим; тупим? Який промінь називають бісектрисою кута?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

39. Назвіть вершини і сторони кутів, зображених на малюнку 3.9.



Мал. 3.9

40. Запишіть вершину і сторони кута:

1) *MOP*; 2) *BLK*.

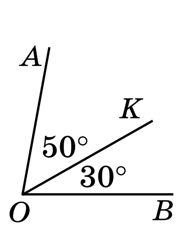
41. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:

1) $\angle A = 39°$; 2) $\angle B = 90°$; 3) $\angle C = 91°$;
4) $\angle D = 170°$; 5) $\angle M = 180°$; 6) $\angle Q = 79°$;
7) $\angle P = 1°3'$; 8) $\angle F = 173°12'$; 9) $\angle K = 89°30'$?

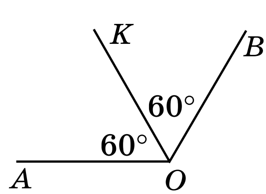
42. Випишіть, які з наведених кутів гострі, тупі, прямі, розгорнуті:

1) $\angle K = 121°$; 2) $\angle A = 90°$; 3) $\angle L = 12°$;
4) $\angle E = 180°$; 5) $\angle M = 89°$; 6) $\angle N = 93°12'$.

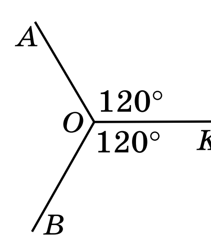
43. (*Усно.*) Чи є промінь *OK* бісектрисою кута *AOB* (мал. 3.10–3.12)?



Мал. 3.10

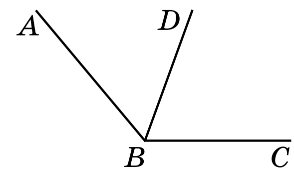


Мал. 3.11



Мал. 3.12

44. За малюнком 3.13:
1) запишіть усі зображені кути;
2) користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри деяких двох з них;
3) обчисліть градусну міру третього кута.



Мал. 3.13

45. Користуючись транспортиром, знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку 3.9. Визначте вид кожного з них.

46. Накресліть кут градусної міри:
1) $30°$; 2) $90°$; 3) $115°$; 4) $75°$.

47. Накресліть кут, градусна міра якого:
1) $65°$; 2) $100°$; 3) $20°$; 4) $155°$.

48. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює $140°$, і проведіть його бісектрису.

49. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює $50°$, і проведіть його бісектрису.

50. Виконайте дії:
1) $7°13' + 12°49'$; 2) $52°17' - 45°27'$.

51. Виразіть: 1) у мінутах: $4°$; $2°15'$;
2) у секундах: $5'$; $2°$; $1°3'$.

52. Промінь OK проходить між сторонами кута BOC. Знайдіть градусну міру кута BOC, якщо $\angle BOK = 38°$, $\angle KOC = 42°$. Виконайте малюнок.

53. Промінь PC проходить між сторонами кута APB. Знайдіть градусну міру кута CPB, якщо $\angle APB = 108°$, $\angle APC = 68°$. Виконайте малюнок.

54. Чи проходить промінь BK між сторонами кута ABC, якщо $\angle ABC = 52°$, $\angle ABK = 57°$? Відповідь обґрунтуйте.

55. Знайдіть градусні міри кутів між годинною та хвилинною стрілками годинника:
1) о 18 год; 2) о 3 год; 3) о 1 год; 4) о 20 год.

56. Знайдіть градусну міру кута між годинною та хвилинною стрілками годинника:
1) о 21 год; 2) о 6 год; 3) о 19 год; 4) о 2 год.

57. Промінь OC ділить кут AOB на два кути. Знайдіть градусну міру кута BOC, якщо $\angle AOB = 60°$ і $\angle AOC = \frac{2}{3}\angle AOB$.

58. Промінь AB ділить кут MAK на два кути. Знайдіть градусну міру кута MAK, якщо $\angle MAB = 70°$, а кут BAK становить 60 % від кута MAB.

59. Кут між бісектрисою кута і продовженням однієї з його сторін за вершину кута дорівнює 142°. Знайдіть градусну міру цього кута.

60. Який кут утворює бісектриса кута 98° з продовженням однієї з його сторін за вершину кута?

61. 1) Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище.

$\angle MQB = 120°$. Між сторонами кута проходить промінь QP. Знайдіть кути PQB і MQP, якщо:	$\angle PQB$	$\angle MQP$
кут PQB у 4 рази менший від кута MQP	У	К
$\angle PQB : \angle MQP = 3 : 2$	Р	Ч
кут PQB на 20° більший за кут MQP	А	В

96°	72°	70°	50°	48°	24°	96°

2) Яких відомих українців із цим прізвищем ви знаєте? Інтернет допоможе дізнатися про тих, кого не пригадали.

62. 1) Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте назву столиці європейської держави.

Промінь AC проходить між сторонами кута MAN, який дорівнює 84°. Знайдіть кути MAC і CAN, якщо:	$\angle MAC$	$\angle CAN$
кут MAC більший за кут CAN на 14°	Р	А
кут MAC менший від кута CAN у 3 рази	В	Ш

21°	35°	49°	63°	35°	21°	35°

2) Дізнайтеся про відстань від Києва до цієї столиці та складіть задачу, пов'язану із зазначеною відстанню.

63. Розгорнутий $\angle AOB$ променями OK і OL поділено на три кути так, що $\angle AOK = 140°$, $\angle BOL = 100°$. Знайдіть градусну міру кута LOK.

64. Прямий $\angle COD$ променями OM і ON поділено на три кути так, що $\angle CON = 70°$, $\angle MOD = 80°$. Знайдіть градусну міру кута MON.

Життєва математика

65. Фермерська родина Нечипоруків посіяла огірки в теплиці 28 м 50 см завдовжки і 16 м завширшки.

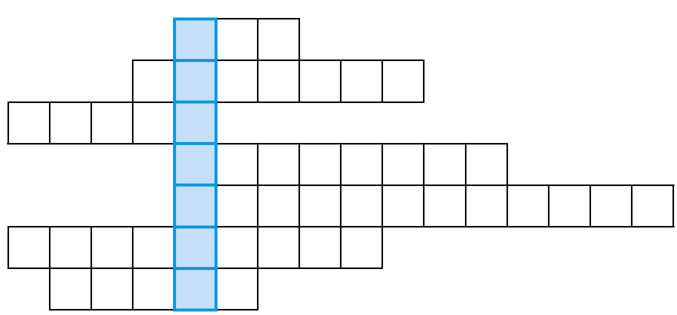
1) Скільки кілограмів огірків збере родина з теплиці, якщо з 1 м^2 збирають 30 кг огірків?

2) Який виторг отримають фермери, якщо продадуть огірки під час весняного сезонного підвищення цін на овочі за ціною 18 грн за кілограм?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

66. 1) Пригадайте назви геометричних фігур, які ви розглянули в цьому розділі, і фігур, які ви знаєте з попередніх класів. Запишіть їхні назви в рядках. Якщо назви фігур записано правильно, то у виділеному стовпчику можна прочитати прізвище видатного українського математика.

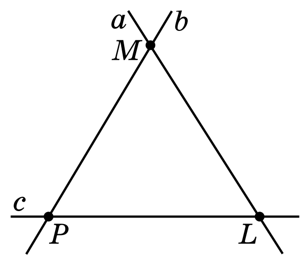
2) Знайдіть у літературі чи інтернеті відомості про життєвий і творчий шлях цього математика. Інформацію про цього вченого можна знайти також і на сторінках підручника.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

1 **67.** За малюнком укажіть:



1) точку перетину прямих a і b;
2) які точки належать прямій c;
3) чи належить точка M прямій PL;
4) як інакше можна назвати пряму b.

2 **68.** 1) Побудуйте промені OK, OM і ON так, щоб промінь OM був доповняльним для променя ON.

2) Побудуйте промені OA, OB і OC так, щоб серед побудованих променів не було жодної пари доповняльних.

3 **69.** Позначте точки A, B і C так, щоб записи AB і AC означали дві різні прямі.

70. Одна з двох прямих, що перетинаються, проходить через точку M, яка належить іншій прямій. Що можна сказати про точку M і точку перетину цих прямих?

4 **71.** Точки A і B належать прямій l. Пряма m відмінна від прямої l і проходить через точку A. Чи може точка B належати прямій m? Відповідь обґрунтуйте.

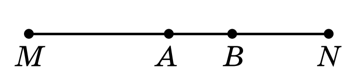
До § 2

1 **72.** 1) Позначте в зошиті точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, та знайдіть відстані між кожною парою точок.

2) Позначте в зошиті точки D, E і F, які лежать на одній прямій, та знайдіть відстані між кожною парою точок.

2 **73.** Накресліть відрізок $KL = 6$ см 8 мм. Позначте на ньому точку P так, що $KP = 43$ мм. Знайдіть довжину відрізка LP за допомогою обчислень.

74. Сумою яких двох відрізків є відрізок MN (див. мал.)? Розгляньте всі можливі випадки.



3 **75.** 1) Три прямі перетинають відрізок AB, причому жодна з точок перетину прямих і відрізка не збігається з кінцями відрізка. На скільки частин ці точки можуть поділити відрізок?

2) На скільки частин поділиться відрізок, якщо кількість прямих дорівнює n?

76. Точка C – середина відрізка AB, точка D – середина відрізка AC. Знайдіть:

1) AC, CB, AD і DB, якщо $AB = 20$ см;

2) AB, AC, AD і DB, якщо $BC = 12$ дм.

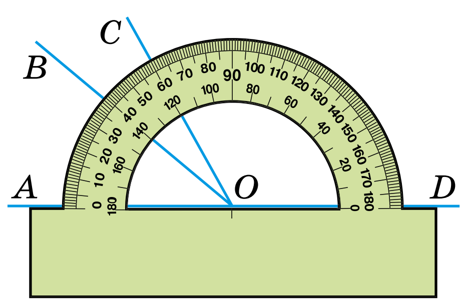
4 **77.** Точки M і N належать відрізку CD, $CD = 15$ см, $CM = 12$ см, $DN = 11$ см. Знайдіть довжину відрізка NM.

78. Точка P належить відрізку AB. На прямій AB позначте таку точку C, щоб $BC = \frac{AP}{2}$. Скільки розв'язків має задача?

* **79.** Точка K належить відрізку CD, довжина якого a см. Знайдіть відстань між серединами відрізків CK і KD.

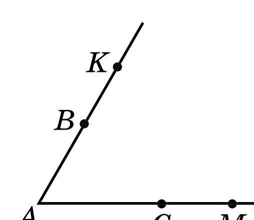
До § 3

1 **80.** Знайдіть градусні міри кутів, зображених на малюнку.



81. Два учні накреслили кути по 70°. Один з учнів сказав, що в нього кут більший, оскільки сторони його кута мають більшу довжину. Чи правий цей учень?

2 **82.** Використовуючи малюнок, укажіть усі можливі назви кута з вершиною A з даних: KAC, BAM, CAM, KMA, BAC, AKM, ABC, MAK, KAM, CAK.



83. Накресліть один гострий кут і один тупий. Побудуйте бісектриси цих кутів за допомогою транспортира.

3 **84.** 1) На який кут повертається хвилинна стрілка годинника протягом 15 хв; 7 хв; 23 хв?

2) На який кут повертається годинна стрілка годинника протягом 1 хв; 6 хв; 40 хв?

85. *OK* – бісектриса кута *AOB*, *OL* – бісектриса кута *KOB*. Знайдіть:

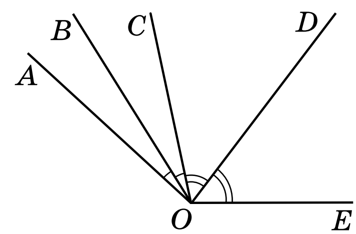
1) $\angle LOK$, якщо $\angle AOB = 120°$;

2) $\angle AOB$, якщо $\angle LOB = 37°$.

4 **86.** $\angle AOB = \angle BOC$, $\angle COD = \angle DOE$ (див. мал.). Знайдіть:

1) $\angle BOD$, якщо $\angle AOE = 140°$;

2) $\angle AOE$, якщо $\angle BOD = 73°$.



87. $\angle AOB = 168°$, промінь *OM* проходить між його сторонами. $\angle AOM : \angle MOB = 3 : 4$. Знайдіть ці кути.

Головне в розділі 1

ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ. ТОЧКА, ПРЯМА, ПРОМІНЬ

- ✓ Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.
- ✓ Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.
- ✓ З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
- ✓ ***Відрізок*** – частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками. Ці точки – ***кінці відрізка***.
- ✓ Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.
- ✓ Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.
- ✓ Два відрізки ***рівні між собою***, якщо рівні їхні довжини.
- ✓ ***Кут*** – це геометрична фігура, яка складається з двох променів, що виходять з однієї точки.
- ✓ Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.
- ✓ Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.
- ✓ Два кути ***рівні між собою***, якщо в них однакові градусні міри.
- ✓ ***Бісектриса кута*** – промінь, який виходить з його вершини і ділить кут навпіл.

Розділ 2

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** паралельні та перпендикулярні прямі;
- **дізнаєтеся**, що таке аксіома, теорема, означення, ознака, наслідок; суміжні та вертикальні кути; кут між двома прямими; кути, що утворилися при перетині двох прямих січною;
- **навчитеся** зображувати паралельні та перпендикулярні прямі за допомогою косинця та лінійки; застосовувати властивості суміжних і вертикальних кутів та кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, до розв’язування задач; доводити теореми.

§ 4. Аксіоми, теореми, означення

Аксіоми

Аксіоми геометрії – це твердження про основні властивості найпростіших геометричних фігур, прийняті як початкові положення.

У перекладі з грецької слово *аксіома* означає *прийняте положення*.

Нагадаємо деякі аксіоми, які ви знаєте.

I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.
II. Через будь-які дві точки можна провести пряму і **до того ж тільки одну.**
III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.
V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.
VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.
VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Теореми

Математичне твердження, справедливість якого встановлюється за допомогою міркувань, називають ***теоремою***, а саме міркування називають *доведенням теореми*.

Кожна теорема має ***умову*** (те, що дано) і ***висновок*** (те, що потрібно довести). Умову теореми прийнято записувати після слова «дано», а висновок – після слова «довести». Доводячи теорему, можна користуватися аксіомами, а також раніше доведеними теоремами. Жодні інші властивості геометричних фігур (навіть якщо вони здаються нам очевидними) використовувати не можна.

Означення

Твердження, у якому пояснюється зміст певного поняття (термін), називають ***означенням***. Ви вже знаєте деякі означення, наприклад означення відрізка, кута, бісектриси кута.

А ще раніше...

Давньогрецький учений Евклід у своїй видатній праці «Начала» зібрав та узагальнив багаторічний науковий досвід. Головним здобутком Евкліда було те, що він запропонував і розвинув аксіоматичний підхід до побудови курсу геометрії. Цей підхід полягає в тому, що спочатку формулюються основні положення (аксіоми), а потім на їх основі за допомогою логічних міркувань доводять інші твердження (теореми). Такий підхід до побудови курсу геометрії використовують і досі, формулюючи деякі з аксіом Евкліда в більш сучасному вигляді.

«Начала» згодом було перекладено на більшість європейських мов. У 1880 р. видатний український математик Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко опублікував переклад «Начал», додавши пояснення інших питань геометрії.

Евклід
(ІІІ ст. до н. е.)

М. Є. Ващенко-Захарченко
(1825–1912)

Саму науку, викладену в «Началах», називають *евклідовою геометрією*.

Значний внесок у розвиток геометрії зробили й інші давньогрецькі вчені, зокрема *Архімед* (бл. 287–212 рр. до н. е.) та *Аполлоній* (ІІІ ст. до н. е.).

Аналіз системи аксіом, які запропонував Евклід, тривав не одне століття. Його на межі XIX і XX ст. завершив видатний німецький математик Давид Гільберт (1862–1943). Він створив повну і несуперечливу систему аксіом геометрії Евкліда.

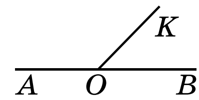
? Що таке аксіома? ○ Наведіть приклади аксіом. ○ Що таке теорема; доведення теореми? ○ Що таке означення?

§ 5. Суміжні кути

Суміжні кути

Два кути називають *суміжними*, якщо одна сторона в них є спільною, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

На малюнку 5.1 кути AOK і KOB – суміжні, сторона OK у них – спільна, а OA і OB є доповняльними променями.



Мал. 5.1

Властивості суміжних кутів

Теорема (властивість суміжних кутів).
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Доведення. Нехай $\angle AOK$ і $\angle KOB$ – суміжні (мал. 5.1). Оскільки промені OA і OB утворюють розгорнутий кут, то $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB = 180°$. Отже, сума суміжних кутів дорівнює 180°. Теорему доведено. ■

Твердження, які випливають безпосередньо з аксіом чи теорем, називають ***наслідками***. Розглянемо наслідки з доведеної теореми.

Наслідок 1. **Кут, суміжний з прямим кутом, – прямий.**
Наслідок 2. **Кут, суміжний з гострим кутом, – тупий; кут, суміжний з тупим кутом, – гострий.**
Наслідок 3. **Кути, суміжні до рівних кутів, є рівними.**

Приклад. Знайти градусну міру кожного із суміжних кутів, якщо один з них на 56° більший за інший.

Розв'язання. Для зручності записів позначимо менший з даних кутів – $\angle 1$, а більший – $\angle 2$.

1) Нехай $\angle 1 = x°$, тоді $\angle 2 = x° + 56°$.

2) Оскільки $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (за властивістю суміжних кутів), маємо рівняння: $x + x + 56 = 180$, звідки $x = 62°$.

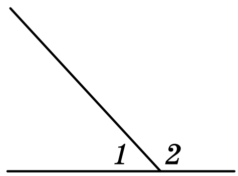
3) Отже, один із шуканих кутів дорівнює 62°, а інший – $62° + 56° = 118°$.

Відповідь: 62°; 118°.

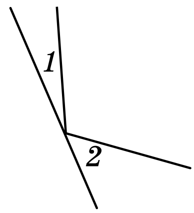
Які кути називають суміжними? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість суміжних кутів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

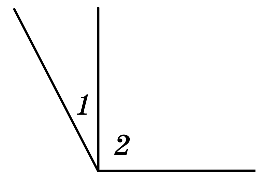
1 **88.** (*Усно.*) На яких з малюнків 5.2–5.5 кути *1* і *2* є суміжними?



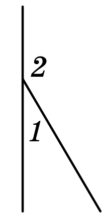
Мал. 5.2



Мал. 5.3



Мал. 5.4



Мал. 5.5

89. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:
1) $42°$ і $148°$; 2) $90°$ і $90°$; 3) $166°$ і $14°$; 4) $23°$ і $156°$?

90. Чи можуть два суміжних кути дорівнювати:
1) $13°$ і $167°$; 2) $5°$ і $165°$; 3) $11°$ і $179°$; 4) $91°$ і $89°$?

91. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) $15°$; 2) $113°$.

92. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) $127°$; 2) $39°$.

2

93. Накресліть за допомогою транспортира $\angle MON = 50°$. Побудуйте суміжний з ним кут за умови, що ON – їхня спільна сторона. Обчисліть його градусну міру.

94. Накресліть за допомогою транспортира $\angle APB = 115°$. Побудуйте суміжний з ним кут за умови, що PA – їхня спільна сторона. Обчисліть його градусну міру.

95. Промінь, що проходить між сторонами кута, ділить його на кути, що дорівнюють $15°$ і $72°$. Знайдіть градусну міру кута, суміжного з даним.

96. Бісектриса кута M утворює з його стороною кут, що дорівнює $36°$. Знайдіть градусну міру кута, який суміжний з кутом M.

97. Накресліть два суміжних кути так, щоб їхня спільна сторона була вертикальною, а градусні міри – неоднаковими.

98. Накресліть два суміжних кути різної градусної міри так, щоб їхня спільна сторона була горизонтальною.

99. Якщо суміжні кути рівні, то вони прямі. Доведіть це твердження.

100. Кути, суміжні до кутів A і B, рівні між собою. Доведіть, що $\angle A = \angle B$.

3

101. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:
1) на $18°$ менший від іншого; 2) становить $\frac{3}{7}$ від іншого.

102. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них:
1) утричі більший за інший;
2) становить 25 % від іншого.

103. Дано гострий кут M і тупий кут N, градусні міри яких відносяться як 2 : 5. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює 140°.

104. Дано тупий кут A і гострий кут B, градусні міри яких відносяться як 4 : 3. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює 80°.

4 **105.** Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

106. Два кути відносяться як 1 : 2, а суміжні з ними – як 7 : 5. Знайдіть ці кути.

107. Один з двох даних кутів на 20° більший за інший, а суміжні з ними – відносяться як 5 : 6. Знайдіть дані кути.

* **108.** Один із суміжних кутів удвічі більший за різницю цих кутів. Знайдіть ці кути.

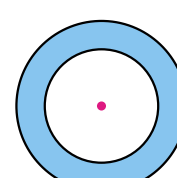
Вправи для повторення

109. Накресліть кут, градусна міра якого дорівнює:
1) 27°; 2) 119°.

110. Точки A, B і C лежать на одній прямій, AB = 2,7 см, BC = 3,6 см. Чи може відстань між точками A і C дорівнювати:
1) 0,8 см; 2) 0,9 см; 3) 1 см;
4) 6,1 см; 5) 6,3 см; 6) 6,5 см?

Життєва математика

111. Будівельникам для встановлення башти потрібно залити фундамент у формі кільця. Радіус зовнішнього кола цього фундаменту має дорівнювати 15 м, а внутрішнього – 10 м. Визначте площу земельної ділянки під фундаментом башти.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

112. **Анаграми.** У цій задачі потрібно розшифрувати кожний запис, переставивши букви в ньому так, щоб отримати відоме слово. Такі перестановки називають *анаграмами*. Наприклад, розв'язати анаграму ВДАКТАР – означає знайти слово, складене із цих букв, – це КВАДРАТ.

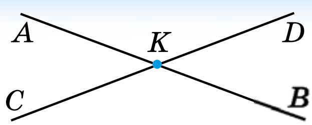
Розв'яжіть анаграми:

1) ТУК; 2) АРЯМП;
3) КЛЕІВД; 4) МОРТЕІЯГЕ.

§ 6. Вертикальні кути. Кут між двома прямими, що перетинаються

Вертикальні кути

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін іншого.



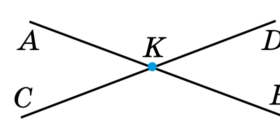
Прямі AB і CD перетинаються в точці K.

Утворилися дві пари вертикальних кутів:
$\angle AKC$ і $\angle DKB$ – вертикальні;
$\angle AKD$ і $\angle CKB$ – вертикальні.

Теорема (властивість вертикальних кутів).
Вертикальні кути рівні між собою.

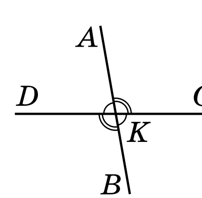
Доведення. Нехай кути AKC і DKB – вертикальні (див. мал.).
1) Оскільки кути AKC і AKD суміжні, то $\angle AKC + \angle AKD = 180°$.
2) Також суміжні кути AKD і DKB, тому $\angle AKD + \angle DKB = 180°$.
3) Маємо: $\angle AKC = 180° - \angle AKD$ і $\angle DKB = 180° - \angle AKD$.

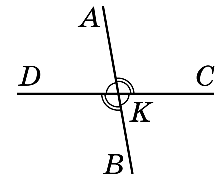
Праві частини цих рівностей рівні, тому рівними є і ліві їхні частини. Отже, $\angle AKC = \angle DKB$. Теорему доведено. ■



Приклад. Два із чотирьох нерозгорнутих кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як 4 : 5. Знайти градусну міру кожного з кутів, що утворилися.

Розв'язання. Кожні два кути, які утворилися в результаті перетину двох прямих, є або суміжними, або вертикальними (див. мал.). Оскільки вертикальні кути рівні: $\angle AKD = \angle CKB$, $\angle AKC = \angle BKD$, то в задачі йдеться про суміжні кути. Наприклад, $\angle AKD$ і $\angle AKC$.





1) За умовою $\angle AKD : \angle AKC = 4 : 5$, тому можемо ввести позначення: $\angle AKD = 4x$, $\angle AKC = 5x$.
2) Оскільки $\angle AKD + \angle AKC = 180°$, маємо рівняння: $4x + 5x = 180°$, звідки $x = 20°$.
3) Тоді $\angle AKD = 4 \cdot 20° = 80°$, $\angle AKC = 5 \cdot 20° = 100°$.
Далі: $\angle CKB = \angle AKD = 80°$, $\angle BKD = \angle AKC = 100°$.
Відповідь: 80°, 100°, 80°, 100°.

Кут між прямими

Кутом між прямими, що перетинаються, **називають менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.**

Кут між прямими AB і DC з попередньої задачі дорівнює 80°.

! Кут між прямими, що перетинаються, не може перевищувати 90°.

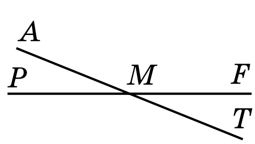
? Які кути називають вертикальними? ○ Яку властивість мають вертикальні кути? ○ Який кут називають кутом між двома прямими?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

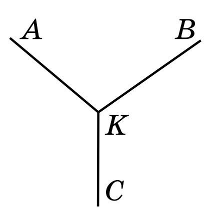
1 **113.** (*Усно.*) Назвіть пари вертикальних кутів на малюнку 6.1.

114. (*Усно.*) Чи є на малюнку 6.2 вертикальні кути?

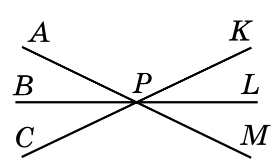
115. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 15°; 2) 129°. Знайдіть другий кут.



Мал. 6.1



Мал. 6.2



Мал. 6.3

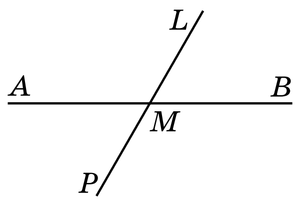
116. Один з вертикальних кутів дорівнює: 1) 42°; 2) 139°. Знайдіть другий кут.

2 **117.** На малюнку 6.3 прямі AM, BL і CK перетинаються в точці P. Знайдіть усі пари вертикальних кутів.

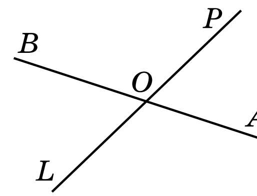
118. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 40°. Знайдіть інші кути.

119. На малюнку 6.4 $\angle AML = 120°$. Знайдіть $\angle AMP$, $\angle PMB$ і $\angle BML$.

120. (*Усно.*) Учениця накреслила дві прямі, що перетинаються, та, вимірявши транспортиром один з кутів, які при цьому утворилися, отримала 130°. Чи може вона стверджувати, що кут між прямими дорівнює 130°? Відповідь поясніть.



Мал. 6.4



Мал. 6.5

121. Прямі AB і PL перетинаються в точці O (мал. 6.5). $\angle POB = 118°$. Знайдіть кут між прямими AB і PL.

122. Накресліть дві прямі, що перетинаються, та знайдіть за допомогою транспортира кут між ними.

123. Накресліть $\angle MON$, що дорівнює 110°. Побудуйте доповняльні промені OL і OK до його сторін OM і ON відповідно. Обчисліть градусні міри трьох нерозгорнутих кутів, що утворилися, і порівняйте з результатами вимірювання.

124. Накресліть $\angle AOB$, що дорівнює 30°. Побудуйте доповняльні промені OP і OD до його сторін OA і OB відповідно. Обчисліть градусні міри трьох нерозгорнутих кутів, що утворилися, і порівняйте з результатами вимірювання.

125. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:

1) усі кути рівні між собою;

2) сума двох з них дорівнює 178°.

126. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:

1) сума двох з них дорівнює 16°;

2) три із чотирьох кутів рівні між собою.

3

127. Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо:

1) різниця двох з утворених кутів дорівнює 18°;

2) сума трьох з утворених кутів дорівнює 293°;

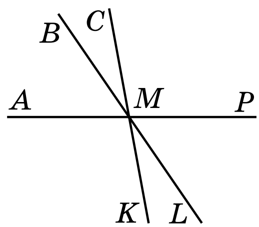
3) один із кутів становить $\frac{4}{5}$ від іншого.

128. Знайдіть кут між прямими, що перетинаються, якщо:
1) один з кутів, що утворилися, удвічі менший від іншого;
2) один з кутів становить 20 % від іншого.

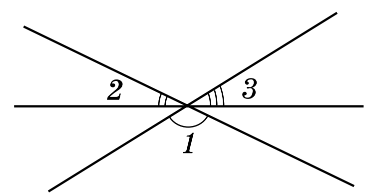
129. Прямі AP, BL і CK перетинаються в точці M (мал. 6.6), $\angle BMC = 20°$, $\angle LMP = 60°$. Знайдіть $\angle AMK$.

130. Прямі AP, BL і CK перетинаються в точці M (мал. 6.6), $\angle CMP = 105°$, $\angle KML = 25°$. Знайдіть $\angle AMB$.

131. На малюнку 6.7 зображено три прямі, що перетинаються в одній точці. Знайдіть суму кутів *1*, *2* і *3*.



Мал. 6.6



Мал. 6.7

132. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів є доповняльними променями.

Вправи для повторення

133. На прямій послідовно позначено 10 точок так, що відстань між будь-якими двома сусідніми точками дорівнює 2 см. Знайдіть відстань між двома крайніми точками.

134. Відомо, що $\angle ABC = 70°$, а $\angle CBD = 20°$. Чи може градусна міра кута ABD дорівнювати:
1) 40°; 2) 50°; 3) 60°; 4) 80°; 5) 90°; 6) 100°?

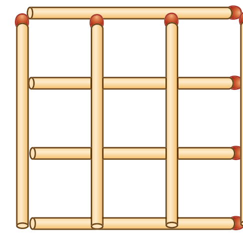
Життєва математика

135. Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги у класній кімнаті має бути не менше ніж 0,2. Чи дотримано цих норм у класній кімнаті, довжина якої 14 м, а ширина становить 35 % від довжини, якщо в кімнаті три вікна розміром 2 × 1,8 м?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

136. Накресліть прямокутник $ABCD$ та запишіть усі пари перпендикулярних прямих, які утворилися.

Цікаві задачі – поміркуй одначе



137. Фігуру на малюнку складено з восьми сірників.

1) Скільки квадратів при цьому утворилося?

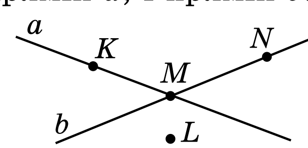
2) Як прибрати два сірники так, щоб залишилося лише три квадрати?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1 (§§1–6)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Яка з точок на малюнку належить і прямій a, і прямій b?

А. K **Б.** L **В.** M **Г.** N



2. Який із запропонованих кутів є тупим?

А. $\angle M = 129°$ **Б.** $\angle T = 90°$ **В.** $\angle N = 180°$ **Г.** $\angle L = 78°$

3. Пара суміжних кутів може дорівнювати...

А. 18° і 172° **Б.** 27° і 153° **В.** 25° і 145° **Г.** 47° і 134°

2 **4.** Промінь OP проходить між сторонами кута AOB. Знайдіть градусну міру кута AOB, якщо $\angle AOP = 20°$, $\angle POB = 50°$.

А. 30° **Б.** 70° **В.** 110° **Г.** неможливо визначити

5. Точка L належить відрізку AB. Знайдіть AL, якщо $LB = 5$ см, $AB = 8$ см.

А. 13 см **Б.** 9 см **В.** 4 см **Г.** 3 см

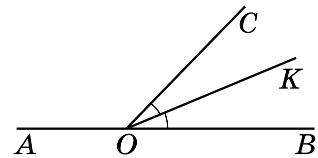
6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 160°. Знайдіть кут між прямими.

А. 160° **Б.** 100° **В.** 80° **Г.** 20°

3 **7.** Відомо, що $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AC = 3$ см. Укажіть взаємне розміщення точок A, B і C.

А. точка A лежить між точками B і C
Б. точка B лежить між точками A і C
В. точка C лежить між точками B і A
Г. жодна з точок не лежить між двома іншими

8. Промінь OK є бісектрисою кута COB, $\angle COB = 70°$ (див. мал.). Знайдіть $\angle AOK$.



А. 110° **Б.** 135°

В. 145° **Г.** 155°

9. Один із суміжних кутів удвічі менший від другого. Знайдіть більший із цих кутів.

А. 60° **Б.** 80°

В. 100° **Г.** 120°

10. На площині позначено п'ять точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки різних прямих, кожна з яких проходить через деякі дві з даних точок, можна провести?

А. 5 **Б.** 8

В. 10 **Г.** 15

11. Розгорнутий $\angle MON$ поділено променями OA і OB на три кути. $\angle MOA = 120°$, $\angle NOB = 110°$. Знайдіть градусну міру кута AOB.

А. 50° **Б.** 60°

В. 70° **Г.** 80°

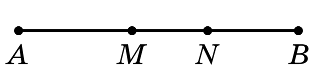
12. Дано два кути, градусні міри яких відносяться як 1 : 2. Різниця кутів, суміжних з ними, дорівнює 70°. Знайдіть більший з даних кутів.

А. 70° **Б.** 90°

В. 110° **Г.** 140°

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

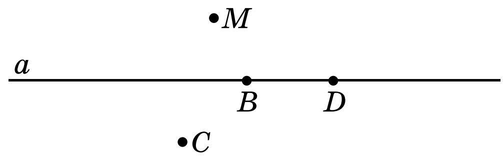
13. На відрізку AB завдовжки 74 см позначено точки M і N (див. мал.). Довжини відрізків AM і MN відносяться як 3 : 2, а відрізок NB на 4 см довший за відрізок MN. Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).



Відрізки	*Довжини відрізків*
1. AM	**А.** 20 см
2. MN	**Б.** 24 см
3. NB	**В.** 28 см
	Г. 30 см

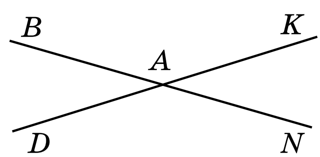
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–6

1. Назвіть точки, що належать прямій a, та точки, що їй не належать (див. мал.). Зробіть відповідні записи.



2. Який з даних кутів гострий, тупий, прямий, розгорнутий:
1) $\angle A = 92°$; 2) $\angle B = 180°$;
3) $\angle C = 90°$; 4) $\angle D = 31°$?

3. За малюнком назвіть пари вертикальних кутів.



4. Точка C належить відрізку MN. Знайдіть довжину відрізка CM, якщо MN = 7,2 см, CN = 3,4 см.

5. За допомогою транспортира накресліть кут, градусна міра якого дорівнює 70°, та проведіть його бісектрису.

6. Прямі AB і CD перетинаються в точці O, $\angle AOC = 132°$. Знайдіть кут між прямими AB і CD.

7. Точки M і N належать відрізку AB, довжина якого дорівнює 30 см. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо AM = 20 см, BN = 16 см.

8. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них на 12° менший від другого.

9. Точки A, B і K лежать на одній прямій. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо AK = 9,3 см, KB = 3,7 см. Скільки розв'язків має задача?

Додаткові вправи

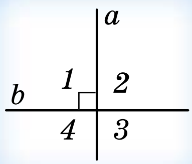
10. Який кут утворює бісектриса кута 48° з променем, що є доповняльним до однієї з його сторін?

11. Два кути відносяться як 1 : 3, а суміжні з ними – як 7 : 3. Знайдіть дані кути.

§ 7. Перпендикулярні прямі. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої

Перпендикулярні прямі

Нехай при перетині двох прямих a і b один з кутів, що утворилися, є прямим, наприклад $\angle 1 = 90°$.

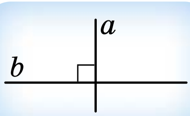


$\angle 1$ і $\angle 3$ – вертикальні
$\angle 1$ і $\angle 2$ – суміжні
$\angle 2$ і $\angle 4$ – вертикальні

$\angle 3 = \angle 1 = 90°$
$\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 90° = 90°$
$\angle 4 = \angle 2 = 90°$

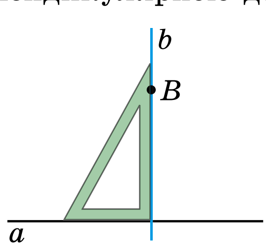
Якщо один із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 90°, то решта кутів також прямі. Про такі прямі кажуть, що вони перетинаються під прямим кутом, або що вони перпендикулярні.

Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

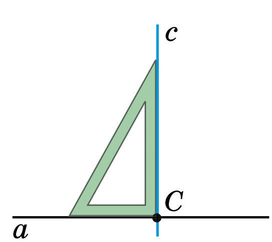


Записують: $a \perp b$
Читають так:
«Пряма a перпендикулярна до прямої b».

Для побудови перпендикулярних прямих використовують креслярський косинець. На малюнку 7.1 через точку B, яка не належить прямій a, проведено пряму b, перпендикулярну до прямої a. На малюнку 7.2 точка C належить прямій a, і через неї перпендикулярно до прямої a проведено пряму c. В обох випадках побудовано єдину пряму, яка проходить через задану точку і є перпендикулярною до прямої a.



Мал. 7.1

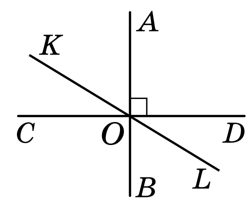


Мал. 7.2

Отже,

> через будь-яку точку площини проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.

Приклад. Прямі AB, CD і KL перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (див. мал.). Знайти $\angle AOK$, якщо $\angle COL = 160°$.



Розв'язання. 1) Оскільки $AB \perp CD$, то $\angle COB = 90°$.

2) $\angle BOL = \angle COL - \angle COB = 160° - 90° = 70°$.

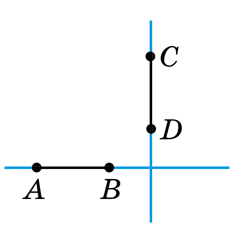
3) $\angle AOK = \angle BOL$ (як вертикальні), тому $\angle AOK = 70°$.

Відповідь: 70°.

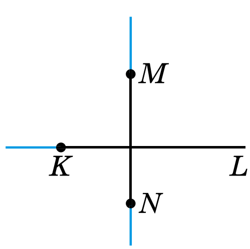
Перпендикулярні відрізки та промені

***Відрізки* або *промені* називають *перпендикулярними*, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.**

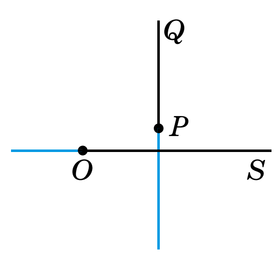
Наприклад, на малюнку 7.3 відрізок AB перпендикулярний до відрізка CD, на малюнку 7.4 промінь KL перпендикулярний до відрізка MN, а на малюнку 7.5 промінь PQ перпендикулярний до променя OS. Для запису перпендикулярності відрізків і променів також використовують знак $\perp$.



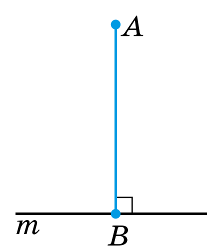
Мал. 7.3



Мал. 7.4



Мал. 7.5



Мал. 7.6

Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої

***Перпендикуляром до прямої*, проведеним з даної точки, називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого — дана точка, а другий — точка перетину прямих. Довжину цього відрізка називають *відстанню від точки до прямої*.**

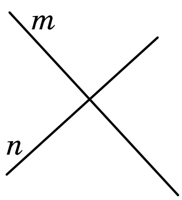
На малюнку 7.6 з точки A проведено перпендикуляр AB до прямої m. Точка B – ***основа перпендикуляра***, а довжина відрізка AB – відстань від точки A до прямої m.

Які прямі називають перпендикулярними? ○ Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної прямої? ○ Що називають перпендикуляром до прямої, проведеним з даної точки? ○ Що називають відстанню від точки до прямої?

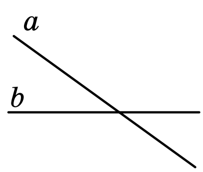
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

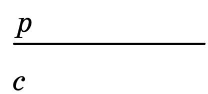
138. На яких з малюнків 7.7–7.10 зображено перпендикулярні прямі? За потреби використайте косинець. Виконайте відповідні записи.



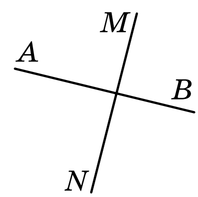
Мал. 7.7



Мал. 7.8



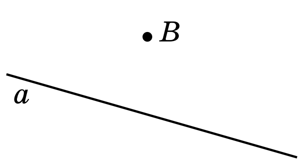
Мал. 7.9



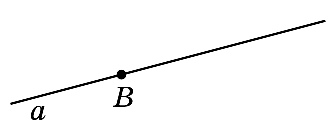
Мал. 7.10

139. Накресліть пряму c та позначте точку A, що їй належить, і точку B, що їй не належить. Проведіть за допомогою косинця прямі через точки A і B так, щоб вони були перпендикулярними до прямої c.

140. Відтворіть малюнки 7.11 і 7.12 у зошиті та для кожного випадку за допомогою косинця проведіть пряму b, що проходить через точку B перпендикулярно до прямої a.



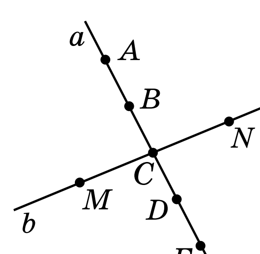
Мал. 7.11



Мал. 7.12

141. На малюнку 7.13 прямі a і b перпендикулярні. Чи перпендикулярні:

1) відрізки AB і MN;
2) промінь EA і відрізок CM;
3) відрізки AB і DE;
4) промені CN і CE?



Мал. 7.13

142. На малюнку 7.13 прямі a і b перпендикулярні. Чи перпендикулярні:

1) відрізки DE і CN; 2) промені CM і CA;
3) промінь CE і відрізок CA; 4) відрізки BD і MN?

2

143. Накресліть пряму a, позначте точку A, що розміщена на відстані 2,5 см від прямої a, та точку B, що розміщена на відстані 4 см від прямої a.

144. Проведіть пряму m, позначте точку P, що розміщена на відстані 3 см від прямої m, та точку K, що розміщена на відстані 1,5 см від прямої m.

145. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб вони були перпендикулярними та не перетиналися.

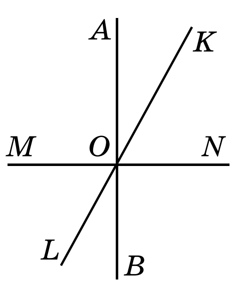
146. Накресліть промені MN і KL так, щоб вони були перпендикулярними та перетиналися.

147. Прямі AB, KL і MN перетинаються в точці O (мал. 7.14). Чи є перпендикулярними прямі AB і MN, якщо:

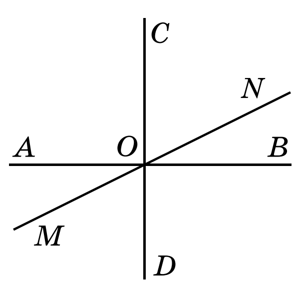
1) $\angle AOK = 25°$, $\angle KON = 66°$; 2) $\angle LON = 118°$, $\angle LOB = 28°$?

148. Прямі AB, KL і MN перетинаються в точці O (мал. 7.14). Чи є перпендикулярними прямі AB і MN, якщо:

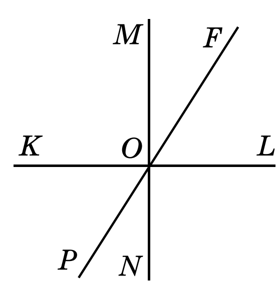
1) $\angle MOK = 122°$, $\angle AOK = 31°$; 2) $\angle MOL = 59°$, $\angle LOB = 31°$?



Мал. 7.14



Мал. 7.15



Мал. 7.16

3

149. (*Усно.*) Чи є правильним означення: «Перпендикуляр до прямої – це будь-який відрізок, перпендикулярний до даної прямої»? Чому?

150. Прямі AB, CD і MN перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 7.15). Знайдіть:

1) $\angle MOD$, якщо $\angle NOB = 25°$; 2) $\angle CON$, якщо $\angle MOB = 150°$.

151. Прямі KL, MN і PF перетинаються в точці O, причому $KL \perp MN$ (мал. 7.16). Знайдіть:

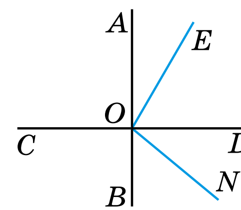
1) $\angle KOP$, якщо $\angle NOF = 140°$; 2) $\angle KOF$, якщо $\angle PON = 37°$.

152. Кути ABC і CBM прямі. Доведіть, що точки A, B і M лежать на одній прямій.

153. Два суміжних кути, що утворилися в результаті перетину двох прямих, рівні між собою. Доведіть, що це перпендикулярні прямі.

154. $AB \perp CD$ (мал. 7.17), $\angle EON = 110°$. Знайдіть $\angle CON$, якщо $\angle AOE = 20°$.

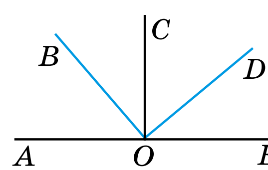
155. $AB \perp CD$ (мал. 7.17), $\angle CON = 135°$, $\angle AOE = 25°$. Знайдіть $\angle EON$.



Мал. 7.17

4 **156.** На малюнку 7.18 $\angle AOB = \angle COD$, $\angle BOC = \angle DOE$. Доведіть, що $OC \perp AE$ і $BO \perp OD$.

157. Доведіть, що промінь, проведений через вершину кута перпендикулярно до його бісектриси, є бісектрисою кута, суміжного з даним.



Мал. 7.18

158. Промені OK і OL є бісектрисами кутів AOB і BOC відповідно, причому $OK \perp OL$. Доведіть, що кути AOB і BOC – суміжні.

Вправи для повторення

159. На прямій послідовно позначено точки M, N і K. Знайдіть:

1) MK, якщо MN = 3 см 2 мм, NK = 4,1 см;

2) MN, якщо MK = 7,8 см, NK = 2 см 5 мм.

160. Знайдіть суміжні кути, різниця яких дорівнює 36°.

Життєва математика

161. Рулон шпалер має 50 см завширшки і 10 м завдовжки. Потрібно обклеїти стіни в кімнаті, довжина якої 4,5 м, ширина – 3 м, а висота – 2,5 м. Загальна площа вікна і дверей становить 3,5 м^2.

1) Скільки рулонів потрібно купити?

2) Скільки коробок клею знадобиться, якщо для того, щоб поклеїти 4 рулони шпалер, витрачається одна коробка?

3) Скільки коштуватимуть матеріали, якщо рулон шпалер коштує 240 грн, а коробка клею – 85 грн?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

162. Накресліть квадрат $ABCD$ та запишіть усі пари паралельних прямих, які утворилися.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

163. Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а довжина кожної з його сторін є цілим числом сантиметрів. Чи може площа прямокутника дорівнювати:

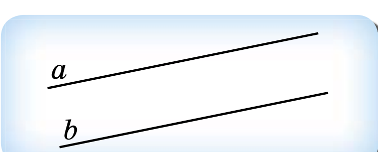
1) 256 см^2; 2) 220 см^2; 3) 64 см^2;
4) 60 см^2; 5) 55 см^2; 6) 54 см^2?

§ 8. Паралельні прямі

Паралельні прямі. Основна властивість паралельних прямих

Дві прямі на площині можуть мати спільну точку (перетинатися) або не мати спільних точок (не перетинатися).

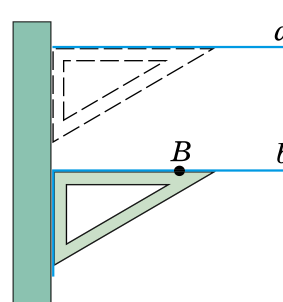
Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.



Записують: $a \parallel b$
Читають так: «Пряма a паралельна прямій b».

Довкола нас є багато прикладів паралельних прямих: прямолінійні ділянки шляху залізниці, горизонтальні чи вертикальні прямі зошита в клітинку, протилежні сторони рами тощо.

Для побудови паралельних прямих використовують креслярський косинець і лінійку. На малюнку 8.1 показано, як через точку B, яка не належить прямій a, проведено пряму b, паралельну прямій a.



Мал. 8.1

Здавна істинною вважають таку аксіому, що виражає *основну властивість паралельних прямих*.

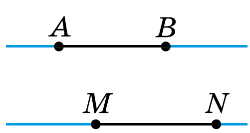
VIII. Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Цю аксіому називають *аксіомою паралельності прямих*.

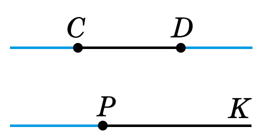
Паралельні відрізки та промені

***Відрізки** або **промені** називають **паралельними**, якщо вони лежать на паралельних прямих.*

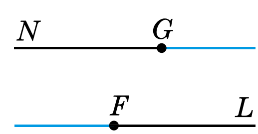
На малюнку 8.2 відрізок AB паралельний відрізку MN, на малюнку 8.3 відрізок CD паралельний променю PK, а на малюнку 8.4 промінь GN паралельний променю FL. Для запису паралельності відрізків і променів також використовують знак $\|$.



Мал. 8.2



Мал. 8.3



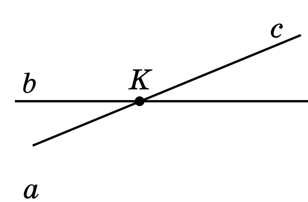
Мал. 8.4

Доведення від супротивного

Ми вже доводили деякі теореми та розв'язували задачі на доведення. Розглянемо задачу, в якій застосуємо ще один важливий спосіб доведення геометричних тверджень.

Приклад. Довести, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму.

Доведення. Нехай a і b – паралельні прямі і пряма c перетинає пряму b в точці K (див. мал.).



1) Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a, тобто $c \parallel a$.

2) Отже, через точку K проходять дві прямі c і b, які обидві паралельні прямій a. Це суперечить аксіомі паралельності прямих.

3) Отже, наше припущення є хибним, значить, правильним є те, що пряма c перетинає пряму a. Твердження доведено. ■

Зауважимо, що спосіб міркування, яким ми довели твердження попередньої задачі, називають *доведенням від супротивного*. Щоб довести, що прямі a і c перетинаються, ми припустили протилежне, тобто що a і c не перетинаються. У процесі міркувань, виходячи із цього припущення, ми прийшли до протиріччя з аксіомою паралельності прямих. Це означає, що наше припущення було хибним, отже, правильним є протилежне до нього припущення, тобто що пряма c перетинає пряму a.

Суть доведення від супротивного полягає в тому, що на початку доведення припускається істинність твердження, протилежного тому, що потрібно довести. *Доведення* (міркування) на основі цього припущення приводить до висновку, який суперечить або умові теореми (задачі), або деякому з істинних тверджень (аксіомі, теоремі тощо), а це означатиме, що припущення, протилежне тому, яке потрібно було довести, є хибним. Отже, істинним є те, що вимагалося довести.

А ще раніше...

У «Началах» Евклід деякі з аксіом називав *постулатами*. Так, зокрема, з п'ятого постулату Евкліда, який ще називають *аксіомою паралельності Евкліда*, фактично випливає, що через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Протягом понад двох тисячоліть учені намагалися довести п'ятий постулат Евкліда. На початку XIX ст. три видатних учених – М. І. Лобачевський, К. Ф. Гаусс (1777–1855) та Я. Больяї (1802–1860) – незалежно один від одного дійшли висновку, що довести п'ятий постулат Евкліда неможливо, він є початковим положенням, а тому є аксіомою.

К.Ф. Гаусс (1777–1855)

М. І. Лобачевський пішов далі і, замінивши аксіому паралельності на таку: «Через точку, що не лежить на даній прямій, проходять щонайменше дві прямі, що лежать з даною прямою в одній площині і не перетинають її», – побудував нову геометрію – неевклідову. Її стали називати «геометрією Лобачевського».

Які прямі називають паралельними? ○ Які інструменти використовують для побудови паралельних прямих? ○ Сформулюйте аксіому паралельності прямих. ○ Поясніть, у чому полягає спосіб доведення від супротивного.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

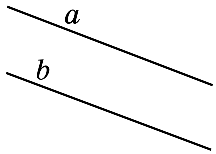
1

164. Запишіть з використанням символів:

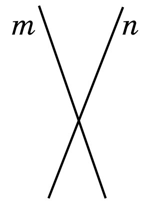
1) пряма a паралельна прямій m;

2) пряма CD паралельна прямій PK.

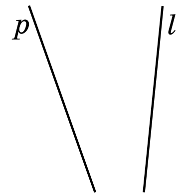
165. На яких з малюнків 8.5–8.8 зображено паралельні прямі?



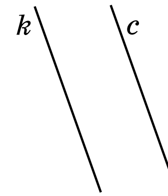
Мал. 8.5



Мал. 8.6



Мал. 8.7

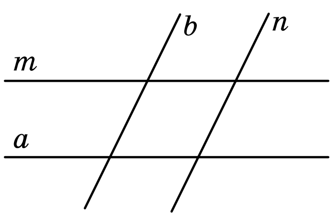


Мал. 8.8

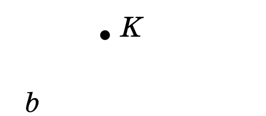
166. Укажіть пари паралельних прямих на малюнку 8.9.

167. 1) Дано пряму b і точку K, що їй не належить (мал. 8.10). Скільки можна провести через точку K прямих, паралельних прямій b?

2) Скільки взагалі можна провести прямих, паралельних прямій b?



Мал. 8.9



Мал. 8.10

2

168. Проведіть пряму l і позначте точку A, що їй не належить. За допомогою косинця і лінійки через точку A проведіть пряму, паралельну прямій l.

169. Позначте точку P і проведіть пряму a, що не проходить через цю точку. За допомогою косинця і лінійки через точку P проведіть пряму, паралельну прямій a.

170. Накресліть відрізки AB і CD та промінь KL так, щоб відрізок AB був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка CD.

171. Накресліть промені MN і KL та відрізок AB так, щоб промінь MN був паралельний променю KL і перпендикулярний до відрізка AB.

3

172. 1) Накресліть $\angle ABC = 120°$ та позначте точку K, що лежить у внутрішній області цього кута.

2) Через точку K за допомогою косинця і лінійки проведіть пряму m, паралельну променю BA, та пряму n, паралельну променю BC.

3) Використовуючи транспортир, знайдіть кут між прямими m і n.

4) Зробіть висновки.

173. 1) Накресліть $\angle MNL$, який дорівнює 50°, і позначте точку C, що належить внутрішній області цього кута.

2) Через точку C за допомогою косинця і лінійки проведіть пряму a, паралельну променю NM, і пряму b, паралельну променю NL.

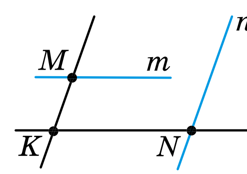
3) Використовуючи транспортир, знайдіть кут між прямими a і b.

4) Зробіть висновки.

174. Прямі a і b перетинаються. Пряма m паралельна прямій a. Доведіть, що прямі m і b перетинаються.

175. Прямі a і b паралельні. Пряма l не перетинає пряму a. Доведіть, що пряма l не перетинає пряму b.

4 **176.** Прямі KM і KN (мал. 8.11) перетинаються. Через точку M проведено пряму m, паралельну прямій KN, а через точку N проведено пряму n, паралельну прямій KM. Доведіть, що прямі m і n перетинаються.



Мал. 8.11

177. Прямі a і b – паралельні, прямі b і c також паралельні. Пряма l перетинає пряму a. Доведіть, що пряма l перетинає прямі b і c.

Вправи для повторення

178. 1) Позначте на прямій m точки A і B та точку C, яка не належить прямій m.

2) Виміряйте відстані AB, AC і BC та порівняйте AB з $AC + BC$.

3) Зробіть висновки.

179. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, становить 25 % від іншого. Знайдіть кут між прямими.

Життєва математика

180. Дитячий майданчик, що має форму прямокутника 6,5 м завдовжки і 3,5 м завширшки, потрібно вкрити плиткою, що має форму квадрата, довжина сторони якого 50 см. Скільки грошей буде витрачено на це, якщо одна плитка коштує 52 грн, а вартість додаткових матеріалів та укладання становить 35 % від вартості плитки?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

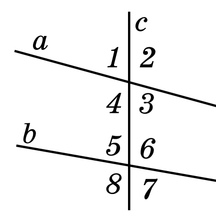
181. Чи можна квадрат, довжина сторони якого дорівнює 2017 клітинок, розрізати на дві рівні фігури так, щоб лінії розрізів проходили по сторонах клітинок?

§ 9. Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих

Кути, утворені при перетині прямих січною

Пряму c називають ***січною*** для прямих a і b, якщо вона перетинає їх у двох точках (мал. 9.1).

При перетині прямих a і b січною c утворилося вісім кутів, позначених на малюнку 9.1. Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:



Мал. 9.1

внутрішні односторонні кути: *4* і *5*; *3* і *6*;
внутрішні різносторонні кути: *4* і *6*; *3* і *5*;
відповідні кути: *1* і *5*; *2* і *6*; *3* і *7*; *4* і *8*.

Приклад 1. На малюнку 9.1 $\angle 2 + \angle 6 = 190°$. Знайти: 1) $\angle 4 + \angle 8$; 2) $\angle 1 + \angle 7$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\angle 4 = \angle 2$ (як вертикальні) і $\angle 8 = \angle 6$ (аналогічно), то $\angle 4 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 6 = 190°$.

2) Кути *1* і *2* – суміжні, тому $\angle 1 = 180° - \angle 2$. Аналогічно $\angle 7 = 180° - \angle 6$. Тоді $\angle 1 + \angle 7 = (180° - \angle 2) + (180° - \angle 6) = 360° - (\angle 2 + \angle 6) = 360° - 190° = 170°$.

Відповідь: 1) 190°; 2) 170°.

Ознака в геометрії

Якщо в задачі потрібно з'ясувати, чи паралельні прямі, то, виходячи з означення, це зробити неможливо, оскільки для цього прямі потрібно продовжити до нескінченності. Проте встановити, прямі паралельні чи ні, можна, використавши спеціальні теореми, які називають ознаками.

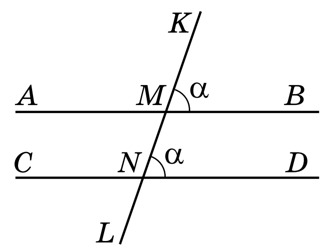
Ознака (у геометрії) – це теорема, яка вказує умови, виконання яких дає змогу стверджувати про певні властивості фігур, належність їх до певного класу тощо.

Ознака паралельності прямих

Розглянемо *ознаки* паралельності прямих.

Т Теорема (ознака паралельності прямих). **Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.**

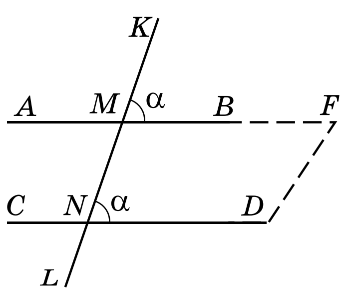
Доведення. Нехай при перетині прямих AB і CD січною KL утворилися рівні між собою відповідні кути $\angle KMB = \angle MND = \alpha$ (мал. 9.2).



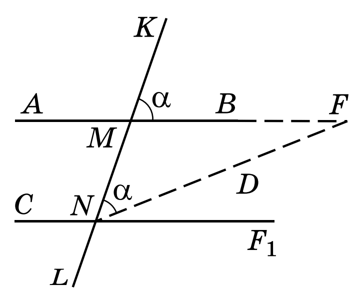
Мал. 9.2

Доведемо теорему методом від супротивного.

Припустимо, що дані прямі AB і CD не паралельні, а перетинаються в деякій точці F (мал. 9.3). Не змінюючи міри кута KMB, перенесемо його так, щоб вершина кута – точка M – збіглася з точкою N, промінь MK збігся з променем NM, а промінь MB зайняв положення променя NF_1 (мал. 9.4). Тоді $\angle MNF_1 = \angle KMF = \alpha$. Оскільки промінь NF_1 не збігається з променем NF, бо $F \notin NF_1$, то $\angle MNF_1 \neq \angle MNF$. Але ж було встановлено, що $\angle MNF = \alpha$ і $\angle MNF_1 = \alpha$.



Мал. 9.3



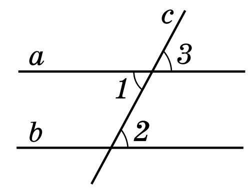
Мал. 9.4

Прийшли до протиріччя, бо наше припущення про те, що прямі AB і CD не паралельні, було хибним. А отже, прямі AB і CD паралельні, що й потрібно було довести. ■

Наслідки з ознаки паралельності прямих

Н Наслідок 1. **Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні між собою, то прямі паралельні.**

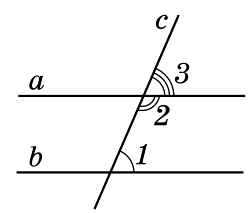
Доведення. Нехай при перетині прямих a і b січною c внутрішні різносторонні кути виявилися рівними, наприклад $\angle 1 = \angle 2$ (див. мал.).



Але кути 1 і 3 – вертикальні, тому $\angle 1 = \angle 3$. Отже, $\angle 2 = \angle 3$. Кути 2 і 3 – відповідні, тому за ознакою паралельності прямих маємо $a \parallel b$. ■

Наслідок 2. Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.

Доведення. Нехай при перетині прямих a і b січною c сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, наприклад $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (див. мал.). Кути 2 і 3 – суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180°$.

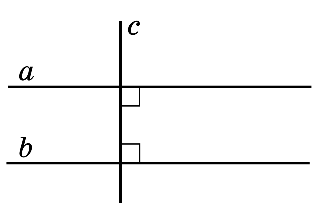


Із цих двох рівностей випливає, що $\angle 1 = \angle 3$. Ці кути є відповідними, а тому прямі a і b – паралельні за ознакою паралельності прямих. ■

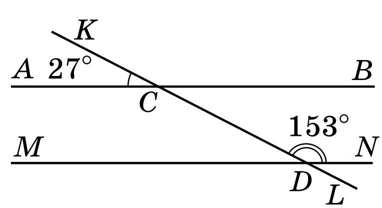
Наслідок 3. Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Доведення. На малюнку 9.5: $a \perp c$ і $b \perp c$. Враховуючи наслідок 2, маємо $a \parallel b$. ■

Зауважимо, що наслідки 1–3 можна також розглядати як ознаки паралельності прямих.



Мал. 9.5



Мал. 9.6

Приклад 2. Чи паралельні прямі AB і MN на малюнку 9.6?

Розв'язання. 1) $\angle BCD = \angle ACK$ (як вертикальні). Отже, $\angle BCD = 27°$.

2) Оскільки $27° + 153° = 180°$, то сума внутрішніх односторонніх кутів BCD і CDN дорівнює 180°. Тому, за наслідком 2, $AB \parallel MN$.

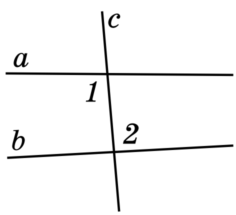
Відповідь: так.

Що таке січна? ○ За малюнком 9.1 назвіть пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів. ○ Сформулюйте та доведіть ознаку паралельності прямих і наслідки з неї.

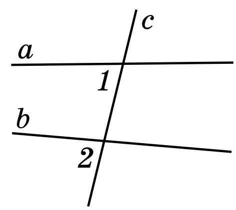
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

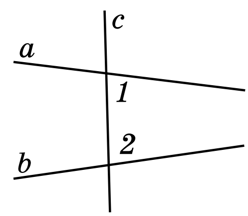
182. (*Усно.*) Як називають кути *1* і *2* на малюнках 9.7–9.9?



Мал. 9.7

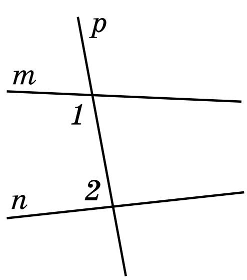


Мал. 9.8

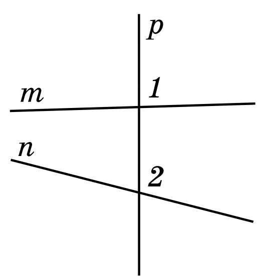


Мал. 9.9

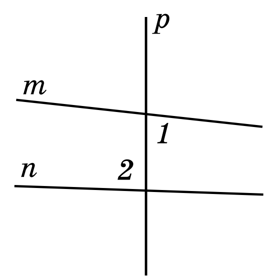
183. Запишіть, як називають кути *1* і *2* на малюнках 9.10–9.12.



Мал. 9.10

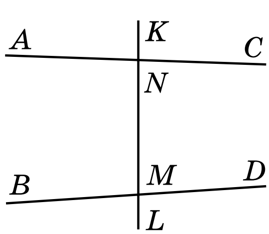


Мал. 9.11

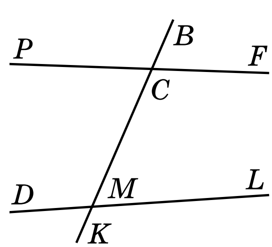


Мал. 9.12

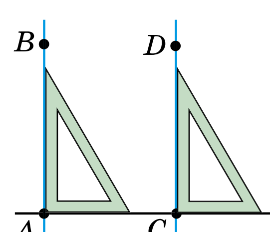
184. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів (мал. 9.13).



Мал. 9.13



Мал. 9.14



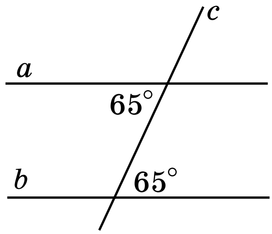
Мал. 9.15

185. Запишіть усі пари внутрішніх односторонніх кутів; внутрішніх різносторонніх кутів; відповідних кутів (мал. 9.14).

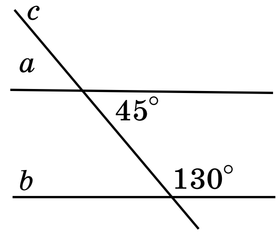
2

186. (*Усно.*) Чи паралельні прямі *AB* і *CD* на малюнку 9.15? Чому?

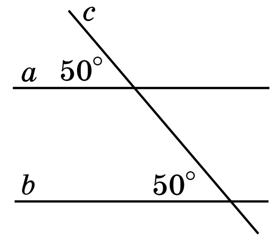
187. Якими є прямі a і b (паралельними чи такими, що перетинаються) на малюнках 9.16–9.21?



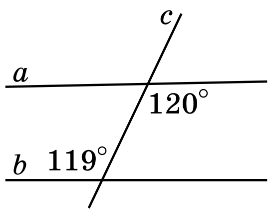
Мал. 9.16



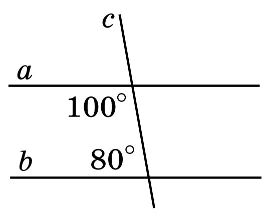
Мал. 9.17



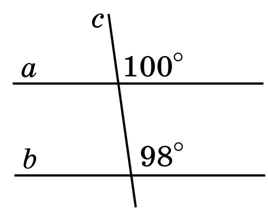
Мал. 9.18



Мал. 9.19



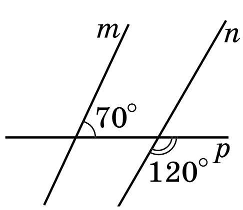
Мал. 9.20



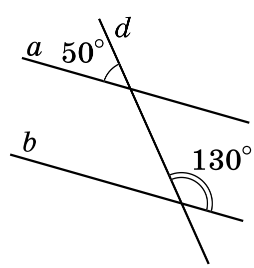
Мал. 9.21

188. На малюнку 9.22 позначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих m і n січною p. Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі m і n?

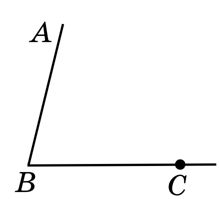
189. На малюнку 9.23 позначено міри двох кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною d. Обчисліть міри всіх інших кутів, що утворилися. Чи паралельні прямі a і b?



Мал. 9.22



Мал. 9.23



Мал. 9.24

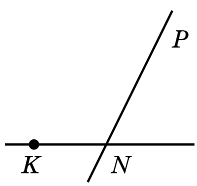
190. Доповніть малюнок 9.24: проведіть пряму CM так, щоб кути ABC і BCM були внутрішніми різносторонніми кутами для прямих AB і CM та січної BC. Як розмістяться точки A і M відносно прямої BC?

191. Доповніть малюнок 9.25: проведіть пряму KA так, щоб кути AKN і KNP були внутрішніми односторонніми кутами для прямих AK і PN та січної KN. Як розмістяться точки A і P відносно прямої KN?

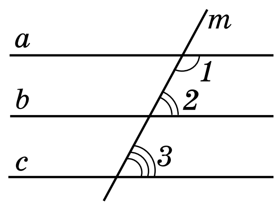
192. На малюнку 9.26 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 118°$, $\angle 2 = 62°$, $\angle 3 = 63°$.

193. На малюнку 9.26 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 121°$, $\angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 60°$.

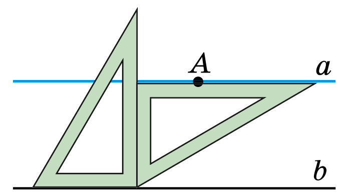
194. Через точку A за допомогою двох креслярських косинців провели пряму a (мал. 9.27). Чи паралельні прямі a і b? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 9.25



Мал. 9.26

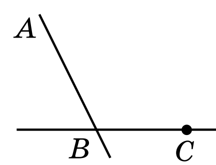


Мал. 9.27

195. 1) Виміряйте $\angle ABC$ (мал. 9.28) і накресліть його в зошиті.

2) Побудуйте $\angle PCK$, що дорівнює куту ABC і є йому відповідним.

3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їх паралельність.

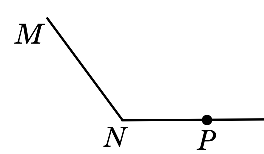


Мал. 9.28

196. 1) Виміряйте $\angle MNP$ (мал. 9.29) і накресліть його в зошиті.

2) Побудуйте $\angle APB$, що дорівнює куту MNP і є йому відповідним.

3) Назвіть паралельні прямі, які утворилися. Обґрунтуйте їх паралельність.

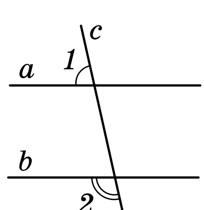


Мал. 9.29

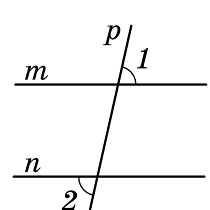
197. Пряма AB перетинає пряму CD у точці A, а пряму MN – у точці B, $\angle CAB = 90°$, $\angle ABN = 90°$. Чи паралельні прямі CD і MN?

198. На малюнку 9.30 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведіть, що $a \parallel b$.

199. На малюнку 9.31 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що прямі $m \parallel n$.



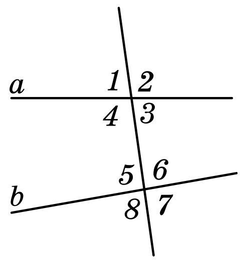
Мал. 9.30



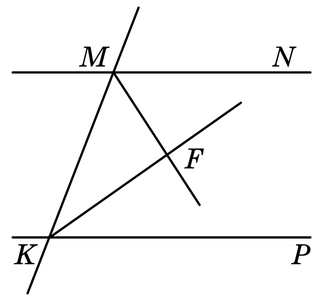
Мал. 9.31

200. На малюнку 9.32 $\angle 4 + \angle 5 = 190°$. Знайдіть:
1) $\angle 2 + \angle 7$; 2) $\angle 1 + \angle 8$; 3) $\angle 3 + \angle 6$.

201. На малюнку 9.32 $\angle 3 + \angle 6 = 160°$. Знайдіть:
1) $\angle 2 + \angle 7$; 2) $\angle 1 + \angle 8$; 3) $\angle 4 + \angle 5$.



Мал. 9.32



Мал. 9.33

202. $\angle ABC = 70°$, $\angle BCD = 100°$. Чи можуть прямі AB і CD бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

203. $\angle MNP = 60°$, $\angle NPK = 120°$. Чи можуть прямі MN і KP бути паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

204. Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими b і c. Чи можна стверджувати, що прямі a і c паралельні?

205. Пряма c є січною для прямих a і b. Чотири з восьми кутів, що утворилися, дорівнюють по 30°, а решта чотири – по 150°. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

206. MF – бісектриса кута KMN, KF – бісектриса кута MKP (мал. 9.33). $\angle MKF + \angle FMK = 90°$. Доведіть, що $MN \parallel KP$.

207. Прямі a і b перпендикулярні до прямої m. Пряма c перетинає пряму a. Чи перетинаються прямі b і c? Відповідь обґрунтуйте.

Вправи для повторення

208. 1) Накресліть $\angle ABC = 70°$ і позначте точку K, що належить променю BA.

2) Через точку K за допомогою косинця проведіть пряму m, перпендикулярну до променя BA, та пряму n, перпендикулярну до променя BC.

3) Користуючись транспортиром, знайдіть кут між прямими m і n.

209. Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC = 130°$. Знайдіть $\angle AOC$.

Життєва математика

210. *Задача-жарт.* Зріст Сергія 1 м 60 см. На скільки кілометрів верхівка голови Сергія пройшла б більше, ніж кінець його ноги, якби він мав змогу пройти земну кулю по її екватору?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

211. Чи можна трикутник розрізати на частини так, щоб утворилося три чотирикутники? Якщо так, то виконайте це.

§ 10. Властивість паралельних прямих. Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

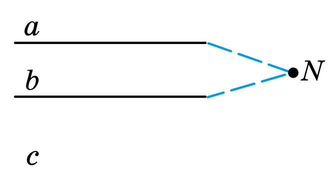
Властивості паралельних прямих

Розглянемо властивість паралельних прямих.

Теорема 1 (властивість паралельних прямих). Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні прямій c. Доведемо, що $a \parallel b$.

Застосуємо доведення від супротивного. Припустимо, що прямі a і b не паралельні, а перетинаються в деякій точці N (мал. 10.1). Отже, через точку N проходять дві прямі a і b, що паралельні прямій c. Це суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення є хибним. Тому $a \parallel b$. Теорему доведено. ■



Мал. 10.1

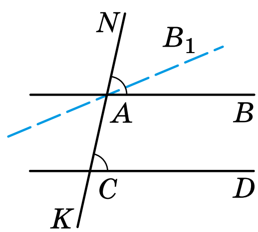
Властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною

Розглянемо властивості кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною.

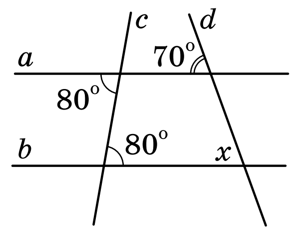
Теорема 2 (властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною). Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.

Доведення. Нехай паралельні прямі AB і CD перетинає січна NK (мал. 10.2). Доведемо, що $\angle NAB = \angle ACD$.

Припустимо, що $\angle NAB \neq \angle ACD$. Проведемо пряму AB_1 так, щоб виконувалася рівність $\angle NAB_1 = \angle ACD$. За ознакою паралельності прямих прямі AB_1 і CD паралельні. Але ж за умовою і $AB \parallel CD$. Прийшли до того, що через точку A проходять дві прямі AB і AB_1, паралельні прямій CD, що суперечить аксіомі паралельності прямих. Отже, наше припущення є хибним і тому відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, між собою рівні: $\angle NAB = \angle ACD$. Теорему доведено. ■



Мал. 10.2



Мал. 10.3

Приклад 1. Знайти невідомий кут x за малюнком 10.3.

Розв'язання. 1) Оскільки внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині січною c прямих a і b, рівні між собою (обидва по $80°$), то $a \parallel b$.

2) Відповідні кути, утворені при перетині січною d паралельних прямих a і b, рівні між собою. Тому $x = 70°$.

Відповідь: $70°$.

Пряма та обернена теорема в геометрії

Теорема про властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є *оберненою* до ознаки паралельності прямих.

Пояснимо, як це слід розуміти. Кожна теорема має умову і висновок. Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, то одержимо нове твердження (правильне або неправильне), умовою якого буде висновок цієї теореми, а висновком – її умова. Якщо одержане при цьому твердження є істинним, його називають *теоремою, оберненою до даної,* а цю теорему – *прямою.*

У теоремі, яка виражає ознаку паралельності прямих, умовою є перша частина твердження: «при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні» (це дано), а висновком – друга частина: «прямі паралельні» (це потрібно довести). Бачимо, що остання теорема, яку ми розглянули, і є оберненою до ознаки паралельності прямих. Умова цієї теореми: «прямі паралельні» (це дано), а висновок – «відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні між собою» (це потрібно довести).

Не для кожної теореми буде справджуватися й обернена теорема. Наприклад, для теореми про властивість вертикальних кутів не існує оберненої, оскільки твердження: «якщо два кути між собою рівні, то вони вертикальні» – неправильне.

Систематизуємо викладене вище в таблиці.

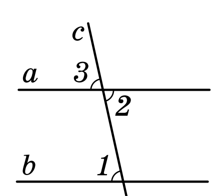
Частина твердження (теореми)	Ознака паралельності прямих (*пряма теорема*)	Властивість відповідних кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною (*обернена теорема*)
Умова	Відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні між собою	Прямі паралельні
Висновок	Прямі паралельні	Відповідні кути, утворені при перетині прямих січною, рівні між собою

Властивість внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

Розглянемо наслідок з теореми 2.

Наслідок 1 (властивість внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою.

Доведення. Нехай паралельні прямі a і b перетинає січна c (мал. 10.4). Доведемо, що внутрішні різносторонні кути, наприклад 1 і 2, рівні між собою.



Мал. 10.4

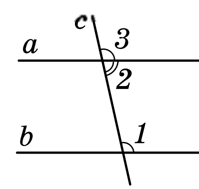
Оскільки $a \parallel b$, то відповідні кути 1 і 3 рівні між собою. Кути 2 і 3 між собою рівні, як вертикальні. З рівностей $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 3$ випливає, що $\angle 1 = \angle 2$. ■

Властивість внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною

Розглянемо ще один наслідок з теореми 2.

Н Наслідок 2 (властивість внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною). **Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180°.**

Доведення. Нехай паралельні прямі a і b перетинає січна c (мал. 10.5). Доведемо, що сума внутрішніх односторонніх кутів, наприклад 1 і 2, дорівнює 180°.



Мал. 10.5

Оскільки $a \parallel b$, то відповідні кути *1* і *3* рівні між собою. Кути *2* і *3* – суміжні, тому $\angle 3 + \angle 2 = 180°$, але ж $\angle 1 = \angle 3$. Тому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ■

Приклад 2. Знайти градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них становить $\frac{2}{3}$ від іншого.

Розв'язання. Нехай кути *1* і *2* (мал. 10.5) – внутрішні односторонні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих a і b січною c.

1) За властивістю цих кутів маємо, що $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

2) Нехай $\angle 1 = x°$, $\angle 2 = \frac{2}{3}x°$.

3) Маємо рівняння $x + \frac{2}{3}x = 180°$, звідки $x = 108°$.

4) Отже, $\angle 1 = 108°$; $\angle 2 = \frac{2}{3} \cdot 108° = 72°$.

Відповідь: 108°; 72°.

Властивості паралельних прямих

Теорему 2 та наслідки з неї також можна розглядати як *властивості паралельних прямих* і використовувати для розв'язування задач.

? Сформулюйте та доведіть властивість паралельних прямих. ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість відповідних кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, і наслідки з неї. ○ Поясніть, що таке теорема, обернена до даної.

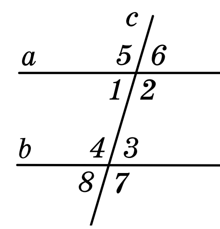
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

212. (*Усно.*) На малюнку 10.6 $a \parallel b$, c – січна.

1) Чи рівні між собою кути *5* і *4*; *2* і *7*?
2) Чи рівні між собою кути *1* і *3*?
3) Обчисліть суму кутів *1* і *4*.

213. На малюнку 10.6 прямі a і b паралельні, c – січна.

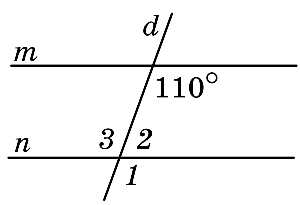
1) Чи рівні між собою кути *1* і *8*; *6* і *3*?
2) Чи рівні між собою кути *2* і *4*?
3) Обчисліть суму кутів *2* і *3*.



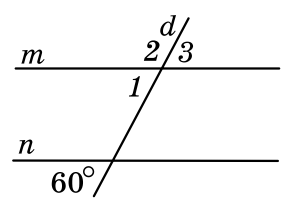
Мал. 10.6

214. $m \parallel n$, d – січна (мал. 10.7). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

215. $m \parallel n$, d – січна (мал. 10.8). Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.



Мал. 10.7



Мал. 10.8

216. Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 140°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

217. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50°. Знайдіть інші сім кутів.

218. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 37°. Чи може один з решти семи кутів дорівнювати:

1) 133°; 2) 143°; 3) 153°?

219. Дано паралельні прямі a і b та точку M, що не належить жодній з прямих. Через точку M паралельно прямій a проведено пряму m. Чи паралельні прямі b і m?

220. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх різносторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо їх сума дорівнює 240°.

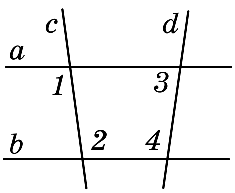
221. Сума двох відповідних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 108°. Знайдіть ці кути.

222. На малюнку 10.9 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

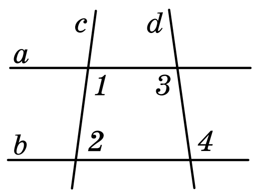
223. На малюнку 10.10 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

224. На малюнку 10.11 $\angle 1 = \angle 2$, $c \perp a$. Доведіть, що $c \perp b$.

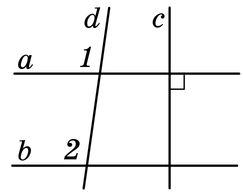
225. На малюнку 10.12 $a \perp d$, $b \perp d$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.



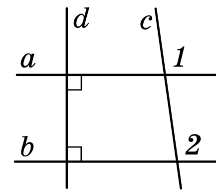
Мал. 10.9



Мал. 10.10



Мал. 10.11



Мал. 10.12

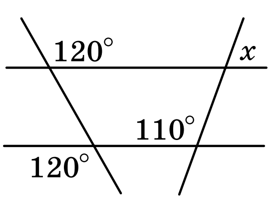
226. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

1) один з них на 16° більший за другий;
2) один з них утричі менший від другого;
3) їхні градусні міри відносяться як 5 : 7.

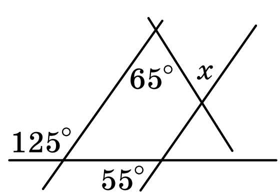
227. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

1) один з них у 4 рази більший за другий;
2) один з них на 8° менший від другого;
3) їхні градусні міри відносяться як 5 : 4.

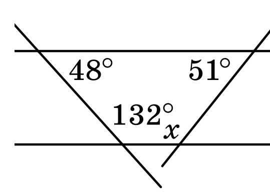
228. Знайдіть градусну міру кута x на кожному з малюнків 10.13–10.15.



Мал. 10.13

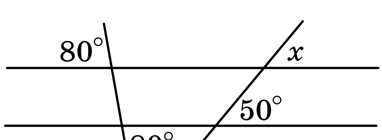


Мал. 10.14

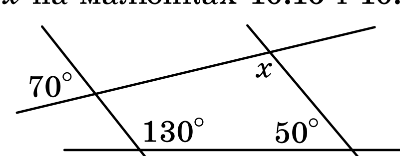


Мал. 10.15

229. Знайдіть градусну міру кута x на малюнках 10.16 і 10.17.



Мал. 10.16



Мал. 10.17

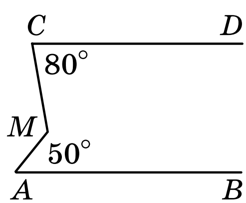
230. Прямі a і b не паралельні прямій m. Чи можна зробити висновок, що прямі a і b не паралельні між собою?

231. Сума градусних мір трьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 120°. Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

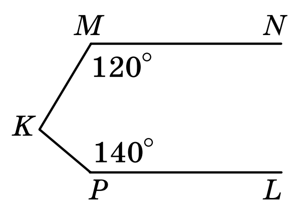
232. Сума градусних мір чотирьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 128°. Знайдіть градусні міри кожного з восьми кутів.

4 **233.** На малюнку 10.18 $AB \parallel CD$. Знайдіть $\angle CMA$.

234. На малюнку 10.19 $MN \parallel PL$. Знайдіть $\angle MKP$.



Мал. 10.18



Мал. 10.19

235. Доведіть, що бісектриси пари внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

236. Доведіть, що бісектриси пари відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

Вправи для повторення

237. Накресліть відрізок AB, промінь CD та пряму a так, щоб відрізок AB був перпендикулярним до променя CD, але не перетинав його, а промінь CD був паралельний прямій a.

238. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та дізнайтеся прізвище видатного українського письменника.

Точка C належить відрізку AB завдовжки 16 см. Знайдіть відрізки AC і BC, якщо:	AC	BC
AC більший за BC на 2 см	Н	А
AC більший за BC утричі	О	Ф
$AC : BC = 5 : 3$	К	Р

4 см	6 см	7 см	9 см	10 см	12 см

Життєва математика

239. Щоб засіяти 1 м^2 землі, потрібно 40 г насіння газонної трави. Кілограм такого насіння коштує 90 грн. Скільки коштів потрібно, щоб засіяти газонною травою клумбу у формі квадрата, сторона якого 20 м?

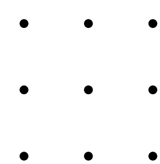
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

240. Накресліть $\triangle ABC$, у якого $AB = 3$ см, $AC = 4$ см. Виміряйте сторону BC цього трикутника та знайдіть його периметр.

241. Одна сторона трикутника дорівнює 8 см, друга – 7 см. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 20 см.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

242. Не відриваючи олівця від паперу, проведіть через дев’ять точок (див. мал.) чотири відрізки.

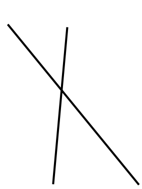


ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2 (§§7–10)

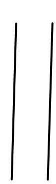
Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** На якому з малюнків 10.20–10.23 зображено перпендикулярні прямі?

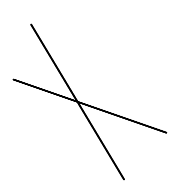
А. мал. 10.20 **Б.** мал. 10.21 **В.** мал. 10.22 **Г.** мал. 10.23



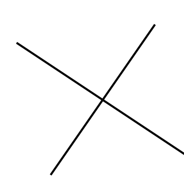
Мал. 10.20



Мал. 10.21



Мал. 10.22

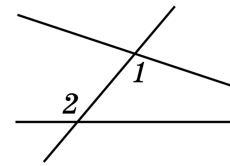


Мал. 10.23

2. Укажіть, на якому з малюнків 10.20–10.23 зображено паралельні прямі:

А. мал. 10.20 **Б.** мал. 10.21 **В.** мал. 10.22 **Г.** мал. 10.23

3. Як називають кути *1* і *2* на малюнку 10.24?



Мал. 10.24

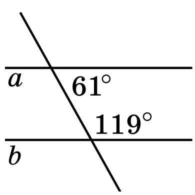
А. внутрішні односторонні
Б. відповідні
В. вертикальні
Г. внутрішні різносторонні

2 **4.** Укажіть, яке з наведених тверджень є правильним:

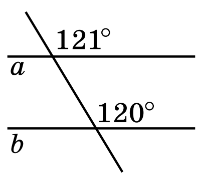
А. перпендикулярні відрізки завжди мають спільну точку
Б. перпендикулярні прямі завжди мають спільну точку
В. перпендикулярні промені завжди мають спільну точку
Г. перпендикулярні промінь і відрізок завжди мають спільну точку

5. На якому з малюнків 10.25–10.28 прямі *a* і *b* паралельні?

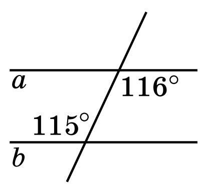
А. мал. 10.25 **Б.** мал. 10.26 **В.** мал. 10.27 **Г.** мал. 10.28



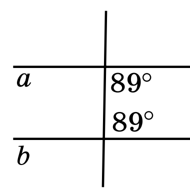
Мал. 10.25



Мал. 10.26



Мал. 10.27

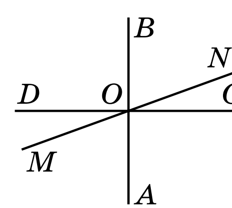


Мал. 10.28

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 35°. Якою може бути градусна міра одного з інших семи кутів?

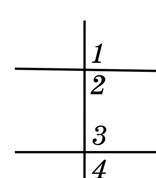
А. 50° **Б.** 105°
В. 145° **Г.** 55°

3 **7.** Прямі *AB*, *CD* і *MN* перетинаються в точці *O*, причому $AB \perp CD$ (див. мал.). $\angle MOD = 20°$. Знайдіть градусну міру кута *AON*.



А. 20° **Б.** 70°
В. 110° **Г.** 160°

8. На малюнку 10.29 $\angle 2 + \angle 3 = 175°$. Знайдіть $\angle 1 + \angle 4$.

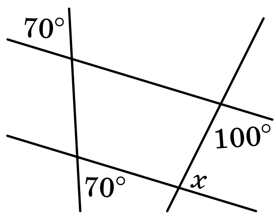


Мал. 10.29

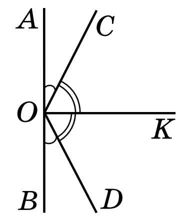
А. 195°
Б. 185°
В. 175°
Г. 165°

9. За малюнком 10.30 знайдіть градусну міру кута x.

А. 80° **Б.** 70° **В.** 100° **Г.** 110°



Мал. 10.30

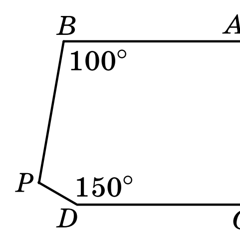


Мал. 10.31

4 **10.** На малюнку 10.31 точки A, O і B лежать на одній прямій, $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle COK = \angle DOK$. Знайдіть, якщо це можливо, градусну міру кута AOK.

А. знайти неможливо **Б.** 80° **В.** 90° **Г.** 100°

11. Прямі AB і CD паралельні (див. мал.). Тоді $\angle BPD = \dots$



А. 100° **Б.** 110° **В.** 130° **Г.** 150°

12. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB. OK – бісектриса кута AOC, OL – бісектриса кута COB. $OK \perp OL$. Визначте вид кута AOB.

А. гострий **Б.** тупий **В.** прямий **Г.** розгорнутий

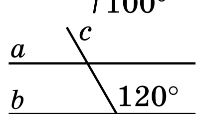
У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** На кожному малюнку прямі a і b – паралельні, c – січна. Установіть відповідність між малюнками (1–3) та градусною мірою кута між прямими a і c (А–Г).

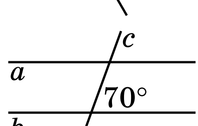
Малюнок

1.

2.



3.



Кут між прямими a і c

А. 60°

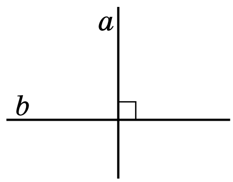
Б. 70°

В. 80°

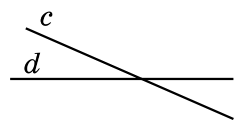
Г. 100°

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 7–10

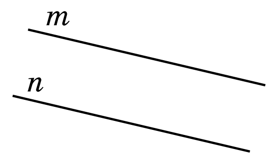
1 **1.** На якому з малюнків 10.32–10.34 зображено паралельні прямі, а на якому – перпендикулярні? Виконайте відповідні записи.



Мал. 10.32



Мал. 10.33



Мал. 10.34

2. Накресліть пряму a та позначте точку N, яка їй не належить. За допомогою косинця і лінійки через точку N проведіть:

1) пряму b, перпендикулярну до прямої a;

2) пряму c, перпендикулярну до прямої b.

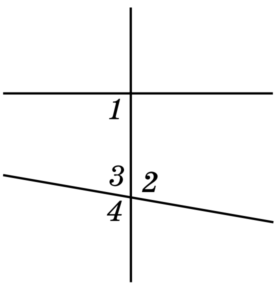
3. За малюнком 10.35 укажіть, як називають пару кутів:

1) 1 і 2; 2) 1 і 3; 3) 1 і 4?

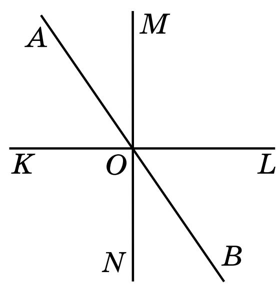
2 **4.** Прямі AB, KL і MN перетинаються в точці O (мал. 10.36). Чи перпендикулярні прямі KL і MN, якщо:

1) $\angle KOA = 70°$, $\angle AOM = 19°$;

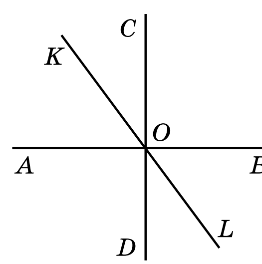
2) $\angle NOB = 21°$, $\angle KOB = 111°$?



Мал. 10.35



Мал. 10.36



Мал. 10.37

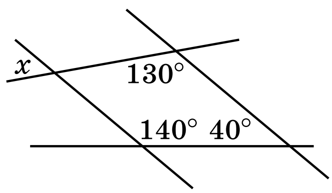
5. Накресліть промені AB і CD та відрізок MN так, щоб промінь AB був паралельний відрізку MN і перпендикулярний до променя CD.

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 78°. Знайдіть градусні міри решти семи кутів.

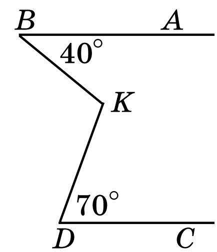
3 **7.** Прямі AB, CD і KL перетинаються в точці O, причому $AB \perp CD$ (мал. 10.37). Знайдіть $\angle AOK$, якщо $\angle DOL = 38°$.

8. За малюнком 10.38 знайдіть градусну міру кута x.

4 **9.** На малюнку 10.39 $AB \parallel CD$. Знайдіть $\angle BKD$.



Мал. 10.38



Мал. 10.39

Додаткові вправи

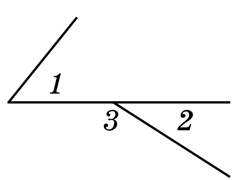
3 **10.** Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них у 4 рази більший за другий.

4 **11.** Пряма m є січною для прямих c і d. Чотири з восьми кутів, що утворилися, дорівнюють по 50°, а решта – по 130°. Чи можна стверджувати, що прямі c і d між собою паралельні?

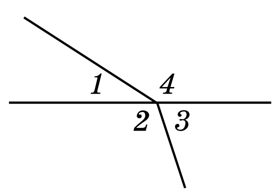
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 5

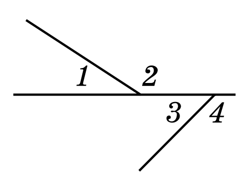
1 **243.** Серед кутів, які зображено на малюнках 1–3, укажіть ті, що є суміжними.



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

2 **244.** 1) Чи можна, використовуючи лише олівець та лінійку, побудувати кут, суміжний з даним?

2) Скільки таких кутів можна побудувати?

245. $\angle ABC$ менший, ніж $\angle MNP$. У якого з кутів суміжний кут більший? Відповідь обґрунтуйте.

3 **246.** Знайдіть суміжні кути, якщо їхні градусні міри відносяться як 3 : 7.

247. Один із суміжних кутів становить 20 % від іншого. Знайдіть ці кути.

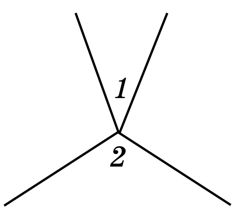
248. Один із суміжних кутів на 20 % менший від іншого. Знайдіть ці кути.

249. Бісектриса кута ABC утворює зі стороною кут, удвічі більший за кут, суміжний з кутом ABC. Знайдіть $\angle ABC$.

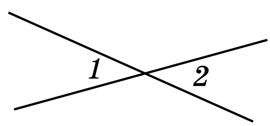
До § 6

250. Який предмет домашнього вжитку дає уявлення про вертикальні кути?

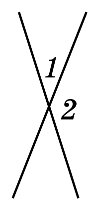
251. Чи є кути *1* і *2* вертикальними (мал. 4–8)?



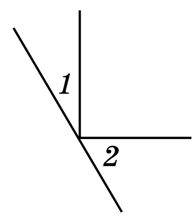
Мал. 4



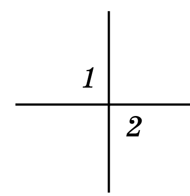
Мал. 5



Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8

252. Чи є правильними твердження:

1) якщо два кути рівні, то вони вертикальні;

2) якщо два кути зі спільною вершиною рівні, то вони вертикальні;

3) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна добудувати тільки один вертикальний кут;

4) для кожного кута, меншого від розгорнутого, можна добудувати тільки один суміжний кут?

253. При перетині двох прямих утворилося чотири кути. Чи можуть деякі два з них дорівнювати:

1) 5° і 175°; 2) 15° і 19°; 3) 27° і 154°; 4) 3° і 3°?

254. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, на 48° більший за інший. Знайдіть кут між прямими.

255. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює сумі двох суміжних з ним. Знайдіть цей кут.

256. Знайдіть градусну міру кожного із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо сума двох із цих кутів:

1) менша від суми двох інших у 4 рази;

2) більша за суму двох інших на 160°.

257. Знайдіть кут між прямими, які перетинаються, якщо один з кутів, що утворилися, у 8 разів менший від суми трьох інших кутів.

До § 7

258. Накресліть пряму a та позначте точку M, що їй не належить. За допомогою косинця проведіть з точки M перпендикуляр до прямої a. Виміряйте відстань від точки M до прямої a.

259. Накресліть гострий $\angle KAM$, позначте на стороні AK точку B. Побудуйте за допомогою косинця пряму, що проходить через точку B перпендикулярно до AK.

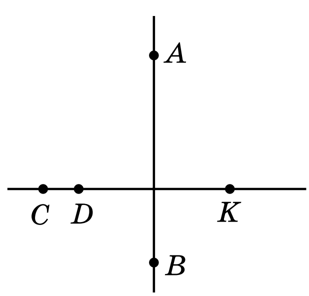
260. Накресліть промінь AB і відрізок KP так, щоб вони були перпендикулярними і не перетиналися.

261. Назвіть усі пари перпендикулярних між собою відрізків на малюнку 9. Виконайте відповідні записи.

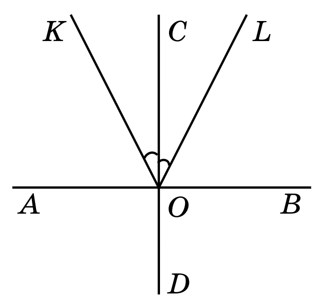
262. На малюнку 10: $AB \perp CD$, $\angle KOC = \angle COL$.

1) Чи правильно, що $\angle AOK = \angle LOB$, $\angle AOL = \angle KOB$?

2) Порівняйте $\angle KOB$ і $\angle AOK$.



Мал. 9



Мал. 10

263. 1) Чи можуть два гострих кути бути між собою рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші – перпендикулярні між собою?

2) Чи можуть два тупих кути бути між собою рівними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші – перпендикулярні між собою?

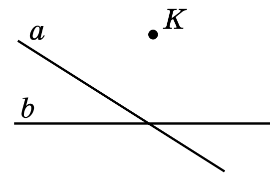
264. Як, використовуючи шаблон кута, градусна міра якого 6°, побудувати взаємно перпендикулярні прямі?

265. Доведіть, що коли бісектриси кутів ABC і CBD взаємно перпендикулярні, то точки A, B і D лежать на одній прямій.

До § 8

266. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб вони були паралельними між собою.

267. На малюнку 11 зображено дві прямі a і b, що перетинаються, та точку K, що не належить жодній з них. Проведіть через точку K прямі, паралельні прямим a і b.



Мал. 11

268. 1) Прямі a і b не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони між собою паралельні?

2) Відрізки AB і CD не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

3) Промені MN і KL не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

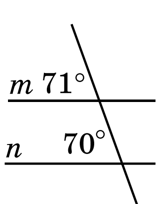
269. Дано пряму a і точку K, що їй не належить. Через точку K провели дві прямі b і c. Як можуть розміщуватися ці прямі відносно прямої a? Розгляньте всі випадки та виконайте до них малюнки.

270. Прямі a і b – паралельні, а прямі b і n – перетинаються. Пряма c паралельна прямій b. Доведіть, що пряма c перетинає пряму n і паралельна прямій a.

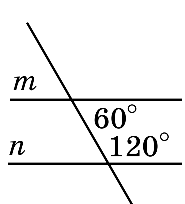
До § 9

271. Накресліть дві прямі та їхню січну. Пронумеруйте кути, що утворилися, числами від 1 до 8. Які із цих кутів будуть внутрішніми односторонніми, які – внутрішніми різносторонніми, а які – відповідними?

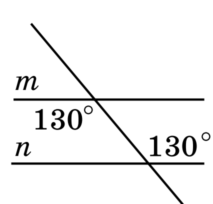
272. Чи є прямі m і n паралельними на малюнках 12–15?



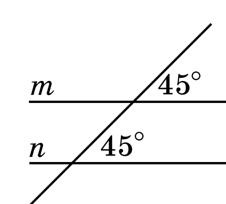
Мал. 12



Мал. 13



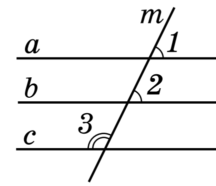
Мал. 14



Мал. 15

273. При перетині прямих a і b січною c утворилися два між собою рівні гострі кути. Чи можна стверджувати, що $a \parallel b$?

274. На малюнку 16: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Чи є прямі a і c паралельними між собою?



Мал. 16

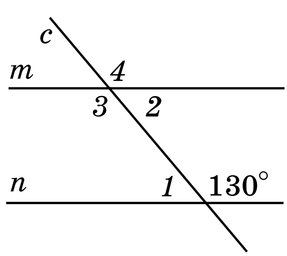
До § 10

275. На малюнку 17 прямі m і n – паралельні, c – січна. Знайдіть градусні міри кутів *1*, *2*, *3*, *4*.

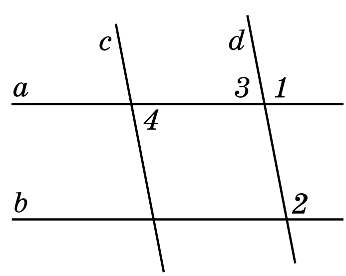
276. Дано: $a \parallel b$, $b \parallel c$, $c \parallel d$. Доведіть, що $a \parallel d$.

277. Знайдіть градусну міру кожного з двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них становить 80 % від другого.

278. $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 1 = 100°$ (мал. 18). Знайдіть градусні міри кутів *2*, *3*, *4*.



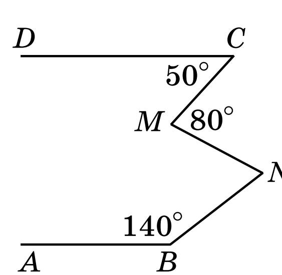
Мал. 17



Мал. 18

279. Один з внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 72°. Знайдіть кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів.

280. Прямі AB і CD паралельні (мал. 19). Знайдіть $\angle MNB$.



Мал. 19

Головне в розділі 2

✓ Два **кути суміжні**, якщо одна сторона в них є спільною, а дві інші сторони цих кутів є доповняльними променями.

ВЛАСТИВІСТЬ СУМІЖНИХ КУТІВ

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

✓ Два **кути вертикальні**, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін другого.

ВЛАСТИВІСТЬ ВЕРТИКАЛЬНИХ КУТІВ

Вертикальні кути рівні.

✓ **Кут між прямими, що перетинаються,** – менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.

✓ Дві **прямі перпендикулярні**, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

✓ Через будь-яку точку площини проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.

✓ **Перпендикуляр до прямої**, проведений з даної точки, – відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого – дана точка, а другий – точка перетину прямих. Довжина цього відрізка – **відстань від точки до прямої**.

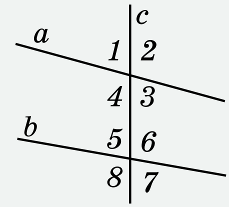
✓ Дві **прямі** на площині **паралельні**, якщо вони не перетинаються.

АКСІОМА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Через точку, що не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

КУТИ, УТВОРЕНІ ПРИ ПЕРЕТИНІ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ:

внутрішні односторонні кути: *4* і *5*; *3* і *6*;
внутрішні різносторонні кути: *4* і *6*; *3* і *5*;
відповідні кути: *1* і *5*; *2* і *6*; *3* і *7*; *4* і *8*.



ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

- ✓ Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні між собою, то прямі паралельні.
- ✓ Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні між собою, то прямі паралельні.
- ✓ Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.
- ✓ Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

ВЛАСТИВІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

- ✓ Відповідні кути, що утворилися при перетині паралельних прямих січною, між собою рівні.
- ✓ Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні одна одній.

ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ, УТВОРЕНИХ ПРИ ПЕРЕТИНІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

- ✓ Внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, між собою рівні.
- ✓ Сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, дорівнює 180°.

Михайло Кравчук – відомий у світі й незнаний в Україні

Вислів «Рукописи не горять!», на щастя, іноді справджується... У селі Саварка, що на Богуславщині, на горищі хатини, у якій у 20-ті роки XX ст. мешкали вчителі, через 80 років випадково знайшли мішок, наповнений паперами й книжками... Пожовклі зшитки зошитів виявилися конспектами вчителів, які працювали в Саварській школі на початку минулого століття. І серед них – рукописний підручник Михайла Кравчука!

96 аркушів густо списаного зошита, на першій сторінці якого напис: **«Геометрія для семирічних трудових шкіл, 1920 рік»**, – виявилися сторінками неопублікованого підручника генія української математики!

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) – найвизначніший український математик XX ст., всесвітньо відомий учений, педагог, громадський діяч, дійсний член Всеукраїнської академії наук, учений світової слави. Його ім'я добре відоме у світовій математичній науці, але широкому загалу не було відомо, що він – українець. Його наукові праці з різних галузей математики увічнилися в безцінній скарбниці науки. Творець першого у світі електронного цифрового комп'ютера – американський фізик Джон Вінсент Атанасов – під час розробки свого творіння щедро користався теоретичними напрацюваннями Михайла Кравчука. Так він засвідчив, що наш співвітчизник заслужено належить до співзасновників ЕОМ (електронно-обчислювальної машини). Теоретичні розробки М. Кравчука було використано й під час формування перших мереж телебачення у США та Японії.

М. П. Кравчук

Народився Михайло Кравчук у селі Човниця на Волині в родині землеміра та вчительки. Після закінчення чоловічої гімназії з 1910 по 1914 рік навчався на математичному відділенні фізико-математичного факультету Київського університету Св. Володимира (нині – Київський національний університет імені Тараса Шевченка). Викладачі одразу вирізнили його з-поміж інших за парадоксальність мислення. Академік Д. Граве, який створив алгебраїчну школу, давав молодому вченому чудові рекомендації, вважав його одним з найталановитіших своїх учнів і просив залишитися при університеті професорським стипендіатом для підготовки до наукової та викладацької роботи. Вільні від студіювання вечори Михайло проводив в Українському клубі, у Народному домі на Лук'янівці, де ставив свої вистави український театр під керівництвом М. Старицького.

Після отримання звання приват-доцента Михайло Кравчук працює як математик-науковець і як педагог. Викладає у двох новостворених українських гімназіях та Українському народному університеті, з 1918-го – співробітник Української академії наук. Кажуть, що в Кравчука була така красива й милозвучна українська мова, що на його математичні лекції із захопленням приходили й філологи – слухати неймовірну вимову викладача. Лекції відзначалися великим багатством і глибиною змісту, логікою і чіткістю викладу, широтою охоплення матеріалу, особливою красою та витонченістю викладу. Водночас найскладніші математичні положення Михайло Пилипович подавав дохідливо й зрозуміло, але не в спрощеній формі. На лекціях Кравчука ніколи не було вільних місць: слухати його приходили ще й біологи, хіміки, філософи... Він перший в Україні почав писати математичні праці українською мовою. Підкомісія математичної секції природничого відділу Інституту української наукової мови під головуванням Кравчука створила й перший тритомний математичний словник.

Михайло Пилипович підготував кілька підручників з математики українською мовою. У 1919 р. вийшов друком його курс лекцій з геометрії, який він прочитав в Українському народному університеті. У тому самому році опубліковано перший переклад українською мовою, який здійснив Кравчук, широко відомого підручника з геометрії Кисельова.

Економічна руйнація початку 20-х років XX ст. примусила науковця виїхати в село Саварка Богуславського району на Київщині, де він став директором школи. Тут М. Кравчук мав можливість реально втілити свої педагогічні задуми. Крім безпосередньо навчання, Кравчук приділяв велику увагу виявленню та вихованню обдарованих учнів. Він навчав математики **Архипа Люльку** (автора-конструктора першого у світі двоконтурного турбореактивного двигуна, творця літаків з надзвуковою швидкістю), а пізніше – **Сергія Корольова** (ученого-конструктора, основоположника радянської космонавтики), **Володимира Челомея** (провідного творця радянського «ядерного щита», конструктора ракетно-космічної та авіаційної техніки, розробника перших супутників).

М. Кравчука запрошують до роботи у Всеукраїнську академію педагогічних наук (ВУАПН), де він очолює комісію математичної статистики, обіймає посаду вченого секретаря президії Академії, завідує відділом математичної статистики Інституту математики ВУАПН. Водночас він – член управи Київського інституту народної освіти, декан факультету професійної освіти; активний громадський діяч – член секції наукових працівників міської ради, організатор першої в Україні **математичної олімпіади** для обдарованих школярів (1935 р.).

Добре володіючи п'ятьма мовами (французькою, німецькою, італійською, польською та російською), молодий учений листувався з колегами з різних країн. М. Кравчука було обрано членом математичних товариств Франції, Німеччини, Італії. Але в сумнозвісному 1937 р. в тодішній газеті «Комуніст» з'явилася наклепницька стаття «Академік Кравчук підтримує ворогів народу». Йому дорікали листуванням з львівськими вченими, обвинувачували в націоналізмі. У 1938 р. М. Кравчука заарештували, інкримінувавши йому «вбивчий» на той час набір контрреволюційних стереотипів: націоналіст, шпигун. Суд над Михайлом Кравчуком тривав усього 30 хвилин, але вирок – 20 років тюремного ув'язнення та 5 років заслання. В останньому слові на суді М. Кравчук просив дати йому можливість закінчити розпочату працю з математики.

Незважаючи на хворе серце та повністю підірване у в'язниці здоров'я, М. Кравчук і вдень і вночі невтомно працював на науковій ниві. Своєї реабілітації вчений не дочекався. Його було посмертно реабілітовано лише в 1956 р., а в 1992 р. поновлено в складі дійсних членів Академії наук України.

Його спадок налічує понад 180 наукових праць. Його пам'ять ушановують і нині.

У 1987 р. у с. Човниця, на батьківщині академіка, було встановлено його погруддя та відкрито музей М. Кравчука.

У 2003 р. на території Політехнічного інституту в Києві, вперше в Україні, відкрито пам'ятник Михайлові Кравчуку. «Моя любов – Україна і математика» – викарбувано на постаменті пам'ятника. Щороку в цьому навчальному закладі проводяться конференції імені академіка Кравчука, засновано стипендію М. Кравчука для кращих студентів.

У 2009 р. в Києві, на Харківському житловому масиві, одну з нових вулиць було названо на честь Михайла Кравчука.

Ім'я математика присвоєно Луцькій гімназії № 21, що міститься на вулиці Академіка Кравчука, де також до 110-річчя від дня народження було відкрито музей видатного вченого.

У 2012 р. Національний банк України ввів в обіг пам'ятну монету номіналом 2 гривні, присвячену М. П. Кравчуку.

Уже в XXI ст. ЮНЕСКО внесла ім'я М. П. Кравчука до переліку найвизначніших людей планети.

А чи зможете ви розв'язати геометричні задачі Київських міських олімпіад з математики, що пропонувалися пів століття тому?

1. (1950 р.) Розділіть прямокутник розміром 18×8 на дві частини так, щоб з них можна було утворити квадрат.

2. (1975 р.) У країні 1000 доріг з'єднують 200 міст, причому з кожного міста виходить хоча б одна дорога. Яку найбільшу кількість доріг можна одночасно закрити на ремонт, не порушуючи при цьому зв'язок між містами?

Відповідь: 801.

3. (1978 р.) Точки A, B, C розміщені так, що, незалежно від вибору точки M, відрізок AM коротший від одного з відрізків BM або CM. Доведіть, що точка M належить відрізку BC.

4. (1979 р.) Розмістіть 6 точок на площині так, щоб кожні 3 з них були вершинами рівнобедреного трикутника.

5. (1985 р.) Довільний трикутник розріжте на 3 частини так, щоб з них можна було скласти прямокутник.

6. (1987 р.) Чи можна квадрат розміром 6×6 розрізати на прямокутники розміром 1×4?

Розділ 3

ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви:

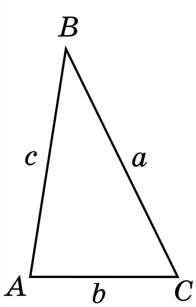
- **пригадаєте** поняття трикутника і його основних елементів та види трикутників;
- **дізнаєтеся** про висоту, медіану і бісектрису трикутника, нерівність трикутника та співвідношення між сторонами і кутами трикутника; суму кутів трикутника;
- **навчитеся** доводити рівність трикутників на основі ознак; застосовувати властивості рівнобедреного та прямокутного трикутників до розв’язування задач.

§ 11. Трикутник і його елементи

Трикутник

Позначимо три точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, і сполучимо їх відрізками (див. мал.).

Трикутником **називають фігуру, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.**



Точки A, B і C – *вершини трикутника*.
Відрізки AB, BC і CA – *сторони трикутника*.
Кути BAC, ABC і BCA – *кути трикутника*.

Трикутник ABC записують: $\triangle ABC$, та читають: «Трикутник ABC».
Назва трикутника складається з букв, якими позначають його вершини, і записувати їх можна у будь-якому порядку: $\triangle ACB$, $\triangle BCA$, $\triangle CAB$ тощо.

Якщо з вершини трикутника не проведено жодних інших ліній, окрім його сторін, то кути трикутника можна називати лише їхньою вершиною – однією буквою: $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$. Сторони трикутника також можна позначати малими буквами латинського алфавіту a, b і c відповідно до позначення протилежних їм вершин.

! Кожний трикутник має три вершини, три сторони і три кути, які ще називають *елементами трикутника*.

Периметр трикутника

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його ***периметром***. Периметр позначають буквою P, наприклад, $P_{\triangle ABC}$ – периметр трикутника ABC:

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + CA.$$

Приклад. Одна зі сторін трикутника на 7 см менша від другої і вдвічі менша від третьої. Знайти сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 47 см.

Розв'язання. 1) Нехай довжина найменшої сторони трикутника дорівнює x см, тоді довжина другої – $(x + 7)$ см, а третьої – $2x$ см.

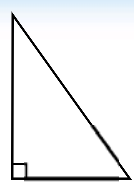
2) Оскільки $P_{\triangle} = 47$ см, маємо рівняння: $x + (x + 7) + 2x = 47$. Розв'язавши це рівняння, отримаємо $x = 10$ (см).

3) Отже, довжина однієї сторони трикутника дорівнює 10 см, другої – 17 см, третьої – 20 см.

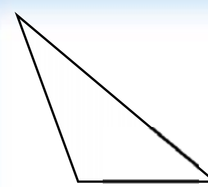
Відповідь: 10 см, 17 см, 20 см.

Класифікація трикутників за кутами

Гострокутний трикутник – трикутник, у якого всі кути гострі.



Прямокутний трикутник – трикутник, у якого один кут прямий.



Тупокутний трикутник – трикутник, у якого один кут тупий.

А ще раніше...

Трикутник вважався найпростішою замкненою прямолінійною фігурою. Властивості цієї фігури людство вивчало та використовувало в практичній діяльності з давніх-давен. Так, наприклад, у будівництві здавна використовують властивість жорсткості трикутника для укріплення різноманітних будівель, конструкцій тощо.

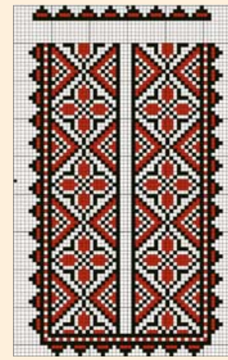
Зображення трикутників і задач, пов'язаних із трикутниками, дослідники знаходили в єгипетських папірусах, стародавніх індійських книгах, інших документах давнини.

У Давній Греції ще в VII ст. до н. е. були відомі деякі важливі факти, пов'язані з трикутником. Так, наприклад, Фалес довів, що трикутник можна однозначно задати стороною і двома прилеглими до неї кутами.

Найповніше вчення про трикутники виклав Евклід у першій книжці «Начал».

* * *

В Україні трикутник – один із десяти головних символів, які наші предки споконвіку вишивали на своїх сорочках.



У давніх віруваннях трикутник – це символ брами у вічне життя і єдності трьох світів: земного, підземного і небесного. Це й три рівні буття, тривимірність світу. А ще – це три стихії: вода, вогонь та повітря.

Трикутник вершиною догори – це чоловічий символ, знак вогню, духу, а вершиною донизу символізує жіноче начало, матерію. Трикутники, що торкаються вершинами один до одного, ніби «пісковий годинник», символізують Світ та Антисвіт. А місце їхнього дотику може бути своєрідним місцем переходу з одного світу до іншого.

Яку фігуру називають трикутником? ○ Що називають вершинами трикутника, сторонами трикутника, кутами трикутника? ○ Що називають периметром трикутника? ○ Які види трикутників розрізняють залежно від кутів?

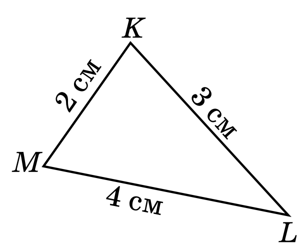
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

281. (*Усно.*) За малюнком 11.1 знайдіть периметр трикутника KLM.

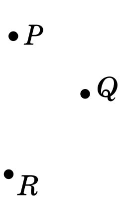
282. Накресліть $\triangle PKL$. Запишіть вершини, сторони та кути цього трикутника.

283. Накресліть трикутник і позначте його вершини буквами A, M і N. Назвіть сторони і кути цього трикутника. Виконайте відповідні записи.

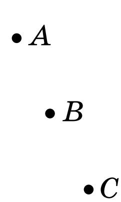


Мал. 11.1

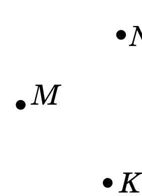
284. (*Усно.*) На якому з малюнків 11.2–11.4 три точки можуть бути вершинами трикутника, а на якому – ні?



Мал. 11.2



Мал. 11.3



Мал. 11.4

2

285. Знайдіть периметр трикутника зі сторонами 25 мм, 3,2 см, 0,4 дм.

286. Знайдіть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють 4,3 см, 29 мм, 0,3 дм.

287. Накресліть гострокутний $\triangle ABC$. Виміряйте його сторони та знайдіть його периметр.

288. Накресліть тупокутний трикутник, вершинами якого є точки P, L і K. Виміряйте сторони цього трикутника та знайдіть його периметр.

3 **289.** Одна сторона трикутника втричі менша від другої і на 7 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 32 см.

290. Одна сторона трикутника на 2 дм більша за другу і в 1,5 раза менша від третьої сторони. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 40 дм.

291. Використовуючи лінійку з поділками та транспортир, побудуйте $\triangle ABC$, у якого $\angle A = 60°$, $AB = 3$ см, $AC = 7$ см.

292. Побудуйте за допомогою лінійки з поділками та косинця $\triangle PKL$, у якого $\angle P = 90°$, $PK = 3$ см, $PL = 4$ см. Як називають такий трикутник? Виміряйте довжину сторони KL.

293. Знайдіть сторони трикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 4 і 6, а периметр трикутника дорівнює 52 дм.

294. Периметр трикутника дорівнює 72 см. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4.

4 **295.** Укажіть, скількома способами можна назвати трикутник з вершинами в точках M, N і K. Запишіть усі ці назви.

296. Сума першої і другої сторін трикутника дорівнює 11 см, другої і третьої – 14 см, а першої і третьої – 13 см. Знайдіть периметр трикутника.

Вправи для повторення

297. Накресліть відрізок AB завдовжки 2 см 7 мм. Накресліть відрізок PL, що дорівнює відрізку AB.

298. Який кут утворює бісектриса кута 78° з променем, що є доповняльним до однієї з його сторін?

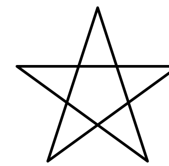
Життєва математика

299. Відомо, що 1 га лісу очищує за рік 18 млн м^3 повітря. Скільки м^3 повітря очистить за рік ліс площею:

1) 3 га; 2) 2 км^2?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

300. Скільки чотирикутників у п’ятикутній зірці?

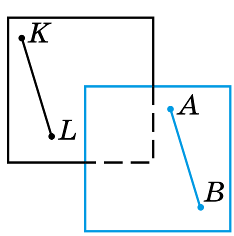


§ 12. Рівність геометричних фігур

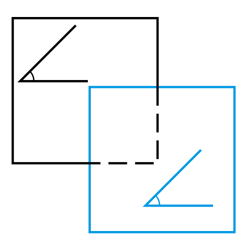
Загальне означення рівних фігур

Два відрізки називають *рівними між собою*, якщо вони мають однакову довжину;
два кути називають *рівними між собою*, якщо вони мають однакову градусну міру.

Розглянемо два рівних відрізки AB та KL, довжина кожного з яких по 2 см (мал. 12.1). Уявімо, наприклад, що відрізок AB накреслено на прозорій плівці. Переміщуючи плівку, відрізок AB можна сумістити з відрізком KL. Отже, рівні відрізки AB і KL можна *сумістити накладанням*.



Мал. 12.1



Мал. 12.2

Так само можна сумістити накладанням два рівних кути (мал. 12.2).

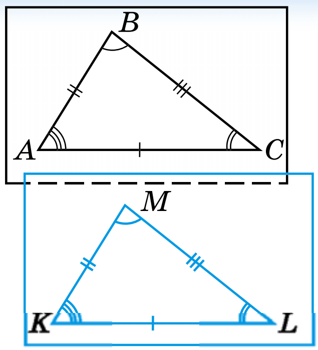
Таким чином, приходимо до загального означення рівних фігур:

геометричні фігури називають *рівними між собою*, якщо їх можна сумістити накладанням.

Зауважимо, що це означення не суперечить означенням рівних відрізків і рівних кутів, які ви вже знаєте.

Рівність трикутників

Тепер розглянемо питання рівності трикутників.



Трикутник ABC рівний трикутнику KML, бо кожен з них можна накласти на інший так, що вони збігатимуться.

Усі елементи трикутника ABC рівні елементам трикутника KML:

$$AC = KL,$$
$$AB = KM,$$
$$CB = LM,$$
$$\angle A = \angle K,$$
$$\angle B = \angle M,$$
$$\angle C = \angle L.$$

Записують:

$\triangle ABC = \triangle KML$.

Ті сторони і ті кути, які суміщаються при накладанні трикутників, будемо називати *відповідними сторонами* і *відповідними кутами*.

> **!** Має значення порядок запису вершин рівних між собою трикутників, який встановлюється рівністю відповідних кутів цих трикутників.

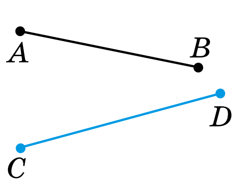
Запис $\triangle ABC = \triangle KLM$ означає, що $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $\angle C = \angle M$, а запис $\triangle ABC = \triangle LKM$ – інше: $\angle A = \angle L$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle M$.

? Які геометричні фігури називають рівними? **○** Рівність яких елементів трикутника можна встановити, виходячи з того, що $\triangle ABC = \triangle KLM$?

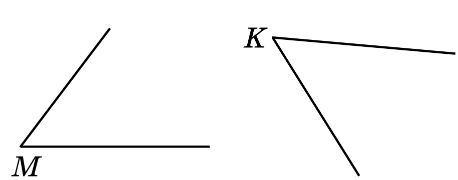
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **301.** 1) Виміряйте довжини відрізків AB і CD на малюнку 12.3 та встановіть, чи рівні вони.

2) Виміряйте кути M і K на малюнку 12.4 та встановіть, чи рівні вони.



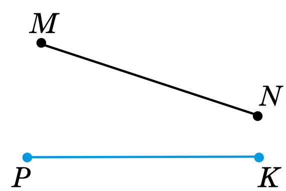
Мал. 12.3



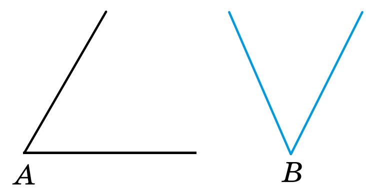
Мал. 12.4

302. 1) Виміряйте довжини відрізків MN і PK на малюнку 12.5 та встановіть, чи рівні вони.

2) Виміряйте кути A і B на малюнку 12.6 та встановіть, чи рівні вони.



Мал. 12.5



Мал. 12.6

303. (*Усно*.) 1) Чи можна сумістити накладанням відрізки AK і MF, якщо AK = 1,7 см, а MF = 17 мм?

2) Чи можна сумістити накладанням кути, градусні міри яких дорівнюють 27° і 31°?

304. Дано: $\triangle ABC = \triangle MPL$. Доповніть записи:

1) $\angle A = ...$; 2) $\angle B = ...$; 3) $\angle C = ...$.

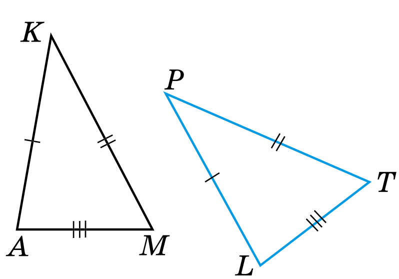
305. Дано: $\triangle MPT = \triangle DCK$. Доповніть записи:

1) $MP = ...$; 2) $PT = ...$; 3) $MT = ...$.

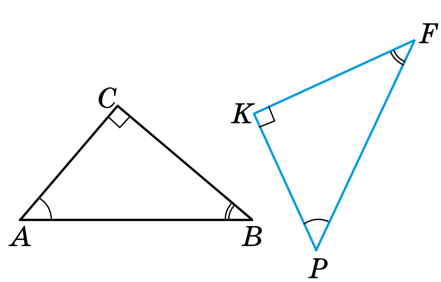
2

306. На малюнку 12.7 зображено рівні трикутники. Доповніть записи рівності трикутників:

1) $\triangle AKM = ...$; 2) $\triangle MAK = ...$.



Мал. 12.7



Мал. 12.8

307. На малюнку 12.8 зображено рівні трикутники. Доповніть записи рівності трикутників:

1) $\triangle ABC = ...$; 2) $\triangle CAB = ...$.

308. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle KLP$, AB = 6 см, LP = 8 см, AC = 10 см. Знайдіть невідомі сторони трикутників ABC і KLP.

309. Відомо, що $\triangle PMT = \triangle DCF$, $\angle P = 41°$, $\angle C = 92°$, $\angle T = 47°$. Знайдіть невідомі кути трикутників PMT і DCF.

3 **310.** 1) Периметри двох трикутників рівні. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

2) Периметр одного трикутника більший за периметр другого. Чи можуть ці трикутники бути рівними?

311. Відомо, що $\triangle ABC = \triangle CBA$. Чи є у трикутника ABC рівні сторони? Якщо так, назвіть їх.

312. Відомо, що $\triangle MNK = \triangle MKN$. Чи є у трикутника MNK рівні кути? Якщо так, назвіть їх.

4 **313.** Дано: $\triangle ABC = \triangle BCA$. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AB = 7$ см.

314. Дано: $\triangle PKL = \triangle KLP$. Знайдіть PK, якщо периметр трикутника PKL дорівнює 27 см.

Вправи для повторення

315. На прямій позначено вісім точок так, що відстань між кожними двома сусідніми точками – однакова. Відстань між крайніми точками дорівнює 112 см. Знайдіть відстань між двома сусідніми точками.

316. Розгорнутий кут поділили променями на три кути, один з яких удвічі менший від другого і втричі менший від третього. Знайдіть градусні міри цих трьох кутів.

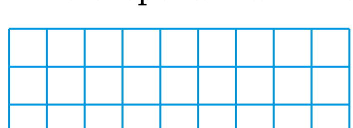
Життєва математика

317. 1) Скільки цегли і розчину потрібно для спорудження стіни 20 м завдовжки, 50 см завтовшки і 2,5 м заввишки, якщо на 1 м^3 кладки потрібно 400 цеглин, а витрати розчину становлять 20 % від обсягу кладки?

2) Скільки коштуватимуть матеріали, якщо вартість однієї цеглини дорівнює 4,2 грн, а 1 м^3 розчину – 1520 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

318. Розріжте прямокутник, одна сторона якого дорівнює 3 клітинки, а друга – 9 клітинок, на вісім квадратів так, щоб розрізи проходили по сторонах клітинок.



§ 13. Перша та друга ознаки рівності трикутників

Ознаки рівності трикутників

Рівність двох трикутників можна встановити, не накладаючи один трикутник на другий, а порівнюючи лише деякі їхні елементи. Це важливо для практики, наприклад, для встановлення рівності двох земельних ділянок трикутної форми, які не можна накласти одна на одну.

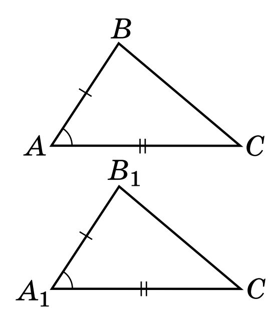
Під час розв'язування багатьох теоретичних і практичних задач зручно використовувати *ознаки рівності трикутників*.

Перша ознака рівності трикутників

Розглянемо *першу ознаку рівності трикутників*.

Т Теорема 1 (перша ознака рівності трикутників). **Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

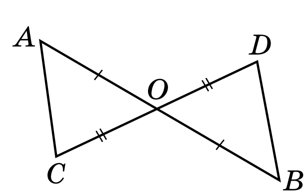
Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle A = \angle A_1$ (див. мал.).



Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то трикутник ABC можна накласти на трикутник $A_1B_1C_1$ так, що вершина A суміститься з вершиною A_1, сторона AB накладеться на промінь A_1B_1, а сторона AC – на промінь A_1C_1. Оскільки $AB = A_1B_1$ і $AC = A_1C_1$, то сумістяться точки B і B_1, C і C_1. У результаті три вершини трикутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$. Отже, після накладання трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ збігатимуться. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ■

Цю ознаку рівності трикутників ще називають *ознакою рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними*.

Приклад 1. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що точка O є серединою кожного з них. Довести, що $\triangle AOC = \triangle BOD$.

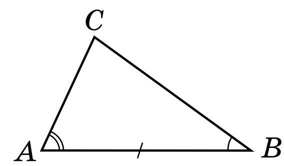


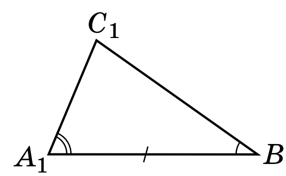
Доведення. Розглянемо малюнок. За умовою $AO = OB$ і $CO = OD$. Окрім того, $\angle AOC = \angle BOD$ (як вертикальні). Тому за першою ознакою рівності трикутників $\triangle AOC = \triangle BOD$. ■

Друга ознака рівності трикутників

Теорема 2 (друга ознака рівності трикутників). Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ (див. мал.).

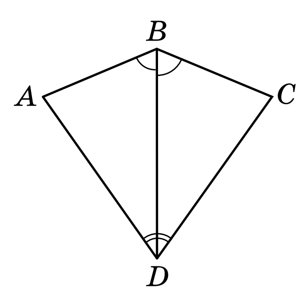




Оскільки $AB = A_1B_1$, то $\triangle ABC$ можна накласти на $\triangle A_1B_1C_1$ так, що вершина A збігатиметься з вершиною A_1, вершина B – з вершиною B_1, а вершини C і C_1 лежатимуть по один бік від прямої A_1B_1. Але $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$, тому при накладанні промінь AC накладеться на промінь A_1C_1, а промінь BC – на промінь B_1C_1. Тоді точка C – спільна точка променів AC і BC – збігатиметься з точкою C_1 – спільною точкою променів A_1C_1 і B_1C_1. Отже, три вершини трикутника ABC сумістяться з відповідними вершинами трикутника $A_1B_1C_1$; трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістилися. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Теорему доведено. ■

Цю ознаку рівності трикутників ще називають *ознакою рівності трикутників за стороною і двома прилеглими кутами.*

Приклад 2. Довести рівність кутів A і C (див. мал.), якщо $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$.



Доведення. 1) Сторона BD спільна для трикутників ABD і CBD. За умовою $\angle ADB = \angle CDB$ і $\angle ABD = \angle CBD$. Тому за другою ознакою рівності трикутників $\triangle ABD = \triangle CBD$.

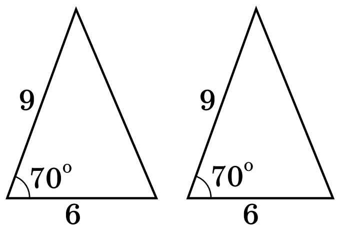
2) Рівними є всі відповідні елементи цих трикутників. Отже, $\angle A = \angle C$. ■

Сформулюйте та доведіть першу ознаку рівності трикутників. ○ Сформулюйте та доведіть другу ознаку рівності трикутників.

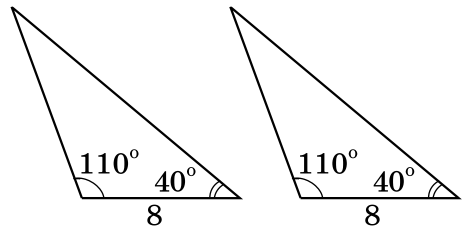
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

319. (*Усно.*) Трикутники на малюнках 13.1, 13.2 рівні між собою. За якою ознакою?

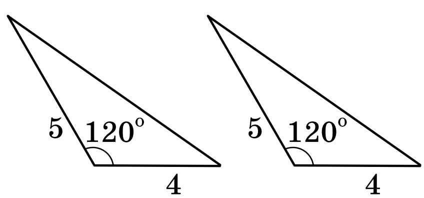


Мал. 13.1

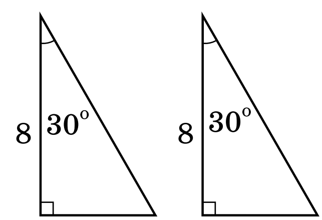


Мал. 13.2

320. Трикутники на малюнках 13.3, 13.4 рівні між собою. За якою ознакою?

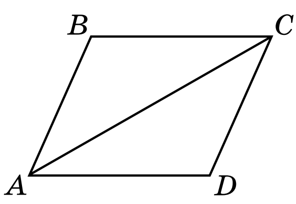


Мал. 13.3

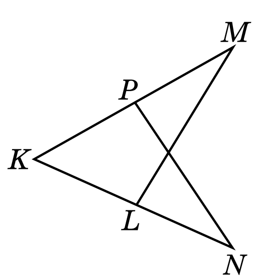


Мал. 13.4

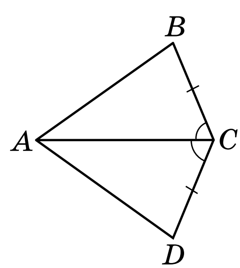
321. Назвіть спільний елемент трикутників ABC і CDA (мал. 13.5) та трикутників KML і KNP (мал. 13.6).



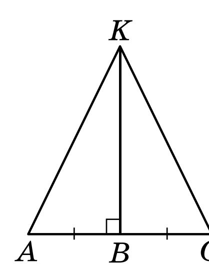
Мал. 13.5



Мал. 13.6



Мал. 13.7



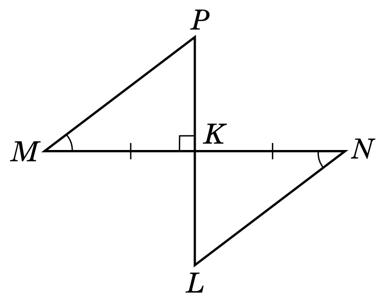
Мал. 13.8

2

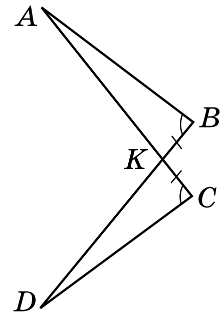
322. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle ADC$ (мал. 13.7), якщо $BC = CD$ і $\angle ACB = \angle ACD$.

323. Дано: $AB = BC$, $BK \perp AC$ (мал. 13.8).
Довести: $\triangle ABK = \triangle CBK$.

324. Дано: $MK = KN$, $\angle M = \angle N$, $PL \perp MN$ (мал. 13.9).
Довести: $\triangle MKP = \triangle NKL$.



Мал. 13.9

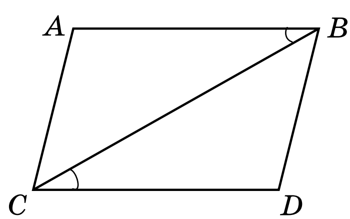


Мал. 13.10

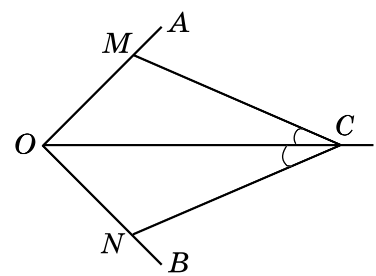
325. Доведіть, що $\triangle ABK = \triangle DCK$ (мал. 13.10), якщо $KB = KC$ і $\angle ABK = \angle DCK$.

326. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DCB$ (мал. 13.11), якщо $AB = CD$ і $\angle ABC = \angle BCD$.

327. Промінь OC є бісектрисою кута AOB (мал. 13.12), $\angle OCM = \angle OCN$. Доведіть, що $\triangle OMC = \triangle ONC$.



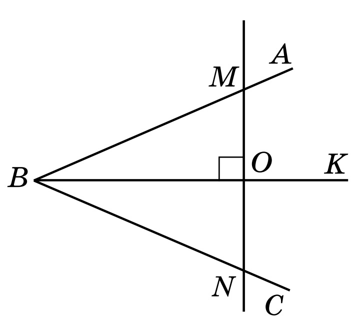
Мал. 13.11



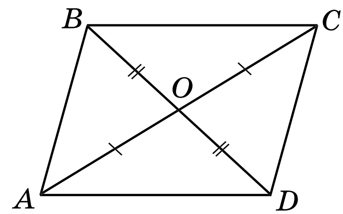
Мал. 13.12

3 **328.** Промінь BK є бісектрисою кута ABC (мал. 13.13), $MN \perp BK$. Доведіть, що $MO = ON$.

329. Дано: $AO = OC$, $BO = OD$ (мал. 13.14).
Довести: $AB = CD$, $BC = AD$.



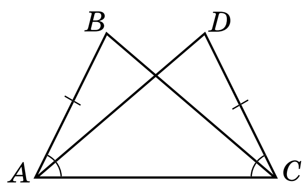
Мал. 13.13



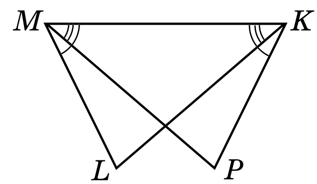
Мал. 13.14

330. Дано: $AB = CD$, $\angle BAC = \angle DCA$ (мал. 13.15).
Довести: $\triangle ABC = \triangle CDA$.

331. Доведіть рівність трикутників MKL і KMP, зображених на малюнку 13.16, якщо $\angle LMK = \angle PKM$ і $\angle LKM = \angle PMK$.

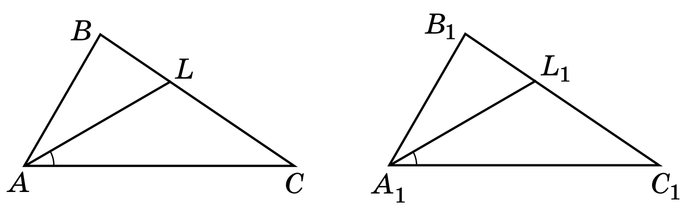


Мал. 13.15



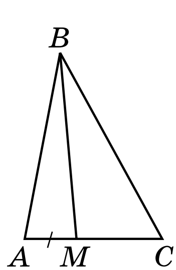
Мал. 13.16

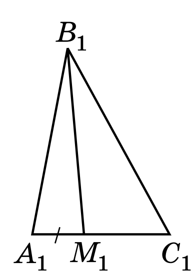
332. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах BC і B_1C_1 позначено відповідно точки L і L_1 такі, що $\angle LAC = \angle L_1A_1C_1$ (мал. 13.17). Доведіть, що $\triangle ALC = \triangle A_1L_1C_1$.



Мал. 13.17

333. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. На сторонах AC і A_1C_1 позначено відповідно точки M і M_1 такі, що $AM = A_1M_1$ (мал. 13.18). Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.



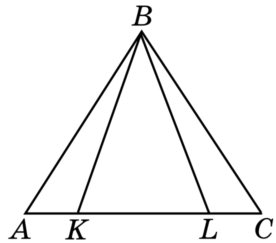
Мал. 13.18


334. Чи можна стверджувати, що коли дві сторони і кут одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою? Обґрунтуйте, подавши схематичні малюнки.

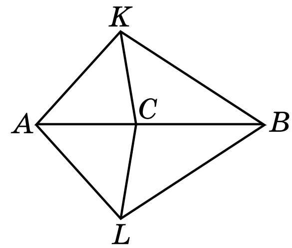
335. Чи можна стверджувати, що коли сторона і два кути одного трикутника дорівнюють стороні та двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою? Обґрунтуйте, подавши схематичні малюнки.

336. $\triangle ABK = \triangle CBL$ (мал. 13.19). Доведіть, що $\triangle ABL = \triangle CBK$.

337. $\triangle AKC = \triangle ALC$ (мал. 13.20). Доведіть, що $\triangle BKC = \triangle BLC$.



Мал. 13.19



Мал. 13.20

338. На бісектрисі кута A позначили точку B, а на його сторонах такі точки M і N, що $\angle ABM = \angle ABN$. Доведіть, що $MN \perp AB$.

Вправи для повторення

339. Одна зі сторін трикутника дорівнює 4 дм, що на 12 см менше від другої сторони й удвічі більше за третю. Знайдіть периметр трикутника.

340. Сума трьох з восьми кутів, що утворилися при перетині паралельних прямих a і b січною c, дорівнює $270°$. Чи перпендикулярні прямі a і c; b і c?

Життєва математика

341. Підлогу кімнати, що має форму прямокутника зі сторонами 3,5 м і 6 м, потрібно вкрити ламінатом з прямокутних дощечок зі сторонами 7 см і 40 см. Скільки потрібно таких дощечок?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

342. Знайдіть периметр трикутника, дві сторони якого дорівнюють по 6 см, а третя сторона – 8 см.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

343. Як з прямокутників, що мають розміри 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, ..., 1×100, скласти прямокутник, кожна сторона якого більша за 1?

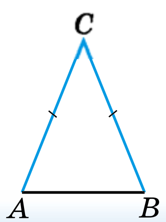
§ 14. Рівнобедрений трикутник

Класифікація трикутників за сторонами

Ви вже вмієте класифікувати трикутники за кутами. Розглянемо класифікацію трикутників залежно від їхніх сторін.

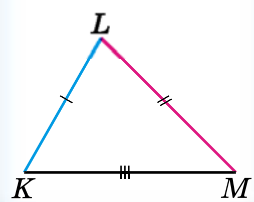
Трикутник, у якого дві сторони рівні, –

рівнобедрений трикутник



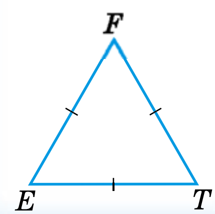
Трикутник, усі сторони якого різні завдовжки, –

різносторонній трикутник



Трикутник, усі сторони якого рівні, –

рівносторонній трикутник



Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а його третю сторону – *основою*.

У рівнобедреному трикутнику ABC: AB – основа, AC і BC – бічні сторони.

Властивість рівнобедреного трикутника

Розглянемо важливу властивість кутів рівнобедреного трикутника.

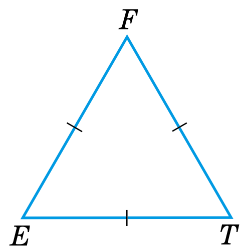
Т Теорема 1 (властивість кутів рівнобедреного трикутника). **У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.**

Доведення. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з основою AB (див. мал. вище). Доведемо, що в нього $\angle A = \angle B$.

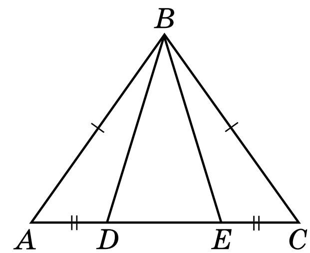
Оскільки $AC = BC$, $CB = CA$ і $\angle C$ – спільний для трикутників ACB і BCA, то $\triangle ACB = \triangle BCA$ (за першою ознакою). З рівності трикутників випливає, що $\angle A = \angle B$. Теорему доведено. ■

Н **Наслідок. У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.**

Доведення. Розглянемо рівносторонній $\triangle EFT$ (мал. 14.1), у якого $EF = FT = ET$. Оскільки $EF = FT$, то його можна вважати рівнобедреним з основою ET. Тому $\angle E = \angle T$. Аналогічно (вважаючи основою FT) маємо, що $\angle F = \angle T$. Отже, $\angle E = \angle T = \angle F$. ■



Мал. 14.1



Мал. 14.2

Приклад 1. На малюнку 14.2 $AB = BC$, $AD = EC$. Довести, що $\angle BDE = \angle BED$.

Доведення. 1) Оскільки $AB = BC$, то $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AC. Тому $\angle A = \angle C$.

2) $\triangle BAD = \triangle BCE$ (за першою ознакою). Тому $BD = BE$.

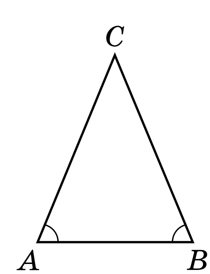
3) Отже, $\triangle BDE$ – рівнобедрений з основою DE. Тому $\angle BDE = \angle BED$, що й потрібно було довести. ■

Ознака рівнобедреного трикутника

Розглянемо ознаку рівнобедреного трикутника.

Т Теорема 2 (ознака рівнобедреного трикутника). **Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.**

Доведення. Нехай ABC – трикутник, у якого $\angle A = \angle B$ (див. мал.). Доведемо, що він рівнобедрений з основою AB.



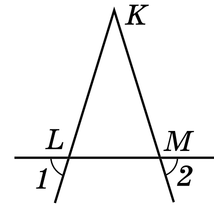
Оскільки $\angle A = \angle B$, $\angle B = \angle A$ і AB – спільна сторона для трикутників ACB і BCA, то $\triangle ACB = \triangle BCA$ (за другою ознакою). З рівності трикутників випливає, що $AC = BC$. Тому $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB. Теорему доведено. ■

Зауважимо, що розглянута теорема є оберненою до теореми про властивість кутів рівнобедреного трикутника.

Н **Наслідок. Якщо у трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.**

Доведення. Нехай $\triangle ABC$ такий, що $\angle A = \angle B = \angle C$. Оскільки $\angle A = \angle B$, то $AC = BC$. Оскільки $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$. Отже, $AC = BC = AB$, тобто $\triangle ABC$ – рівносторонній. ■

Приклад 2. Дано: $\angle 1 = \angle 2$ (див. мал.).



Довести: $\triangle KLM$ – рівнобедрений.

Доведення. 1) $\angle KLM = \angle 1$ (як вертикальні), $\angle KML = \angle 2$ (як вертикальні).

2) $\angle 1 = \angle 2$ (за умовою). Тому $\angle KLM = \angle KML$.

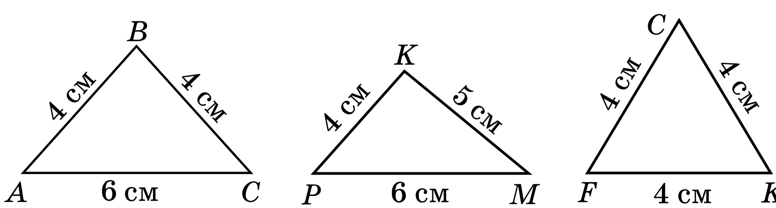
3) Отже, $\triangle KLM$ – рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника). ■

? Який трикутник називають рівнобедреним; різностороннім; рівностороннім? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість кутів рівнобедреного трикутника та наслідок з неї. ○ Сформулюйте та доведіть ознаку рівнобедреного трикутника та наслідок з неї.

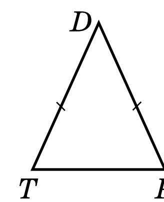
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

344. (*Усно.*) Який з трикутників, зображених на малюнку 14.3, є рівнобедреним, який – рівностороннім, а який – різностороннім? Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, зображеного на цьому малюнку.



Мал. 14.3



Мал. 14.4

345. Укажіть основу та бічні сторони трикутника DTP (мал. 14.4). Що можна сказати про кути T і P цього трикутника?

346. Один з кутів при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $70°$. Знайдіть другий кут при основі цього трикутника.

347. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 9 см, ще одна сторона – 6 см. Яка довжина третьої сторони?

348. $\triangle ABC$ – рівносторонній, $AB = 12$ см. Знайдіть його периметр.

349. Периметр рівностороннього трикутника ABC дорівнює 18 см. Знайдіть довжину сторони BC цього трикутника.

350. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 7 см, а основа на 2 см менша від бічної сторони.

351. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 8 см, а бічна сторона на 4 см більша за основу.

352. (*Усно.*) Чи може бути рівнобедреним трикутник, усі кути якого різні? Відповідь обґрунтуйте.

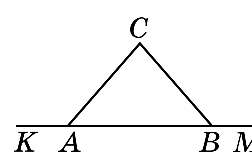
353. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а бічна сторона – 7 см. Знайдіть основу трикутника.

354. Периметр рівнобедреного трикутника AMN з основою MN дорівнює 18 дм. Знайдіть довжину основи MN, якщо $AM = 7$ дм.

355. Периметр рівнобедреного трикутника ACD з бічними сторонами AC і AD дорівнює 30 дм. Знайдіть довжину бічної сторони, якщо $CD = 12$ дм.

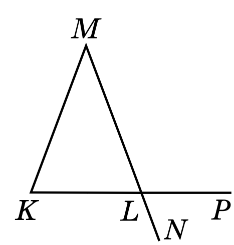
356. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 17 см, а основа – 5 см.

357. $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB (мал. 14.5). Доведіть, що $\angle KAC = \angle MBC$.



Мал. 14.5

358. $\triangle KLM$ – рівнобедрений з основою KL (мал. 14.6). Доведіть, що $\angle MKL = \angle PLN$.



Мал. 14.6

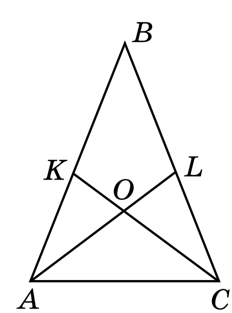
359. Чи правильні твердження:
1) будь-який рівносторонній трикутник є рівнобедреним;
2) будь-який рівнобедрений трикутник є рівностороннім?

360. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 14 см і він більший за суму двох бічних сторін на 6 см.

361. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр 44 см, а бічна сторона на 4 см більша за основу.

362. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 35 дм, а основа вдвічі менша від бічної сторони.

363. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки K і L так, що $AK = LC$ (мал. 14.7). Доведіть, що $AL = KC$.

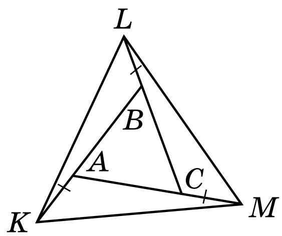


Мал. 14.7

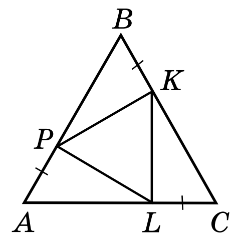
364. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки K і L так, що $\angle KCA = \angle LAC$ (мал. 14.7). Доведіть, що відрізки AK і CL рівні.

4 **365.** Сторони рівностороннього трикутника ABC продовжено на рівні відрізки AK, BL і CM (мал. 14.8). Доведіть, що $\triangle KLM$ – рівносторонній.

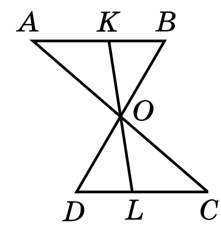
366. На сторонах рівностороннього трикутника ABC відкладено рівні відрізки AP, BK і CL (мал. 14.9). Доведіть, що $\triangle PKL$ – рівносторонній.



Мал. 14.8



Мал. 14.9



Мал. 14.10

Вправи для повторення

367. Доведіть, що з двох суміжних кутів хоча б один не більший за $90°$.

368. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O так, що $\triangle AOB = \triangle COD$ (мал. 14.10). Точка K належить відрізку AB, а точка L – відрізку DC, причому KL проходить через точку O. Доведіть, що $KO = OL$ і $KB = DL$.

369. На відрізку $AB = 48$ см позначено точку K так, що $5AK = 7BK$. Знайдіть довжини відрізків AK і BK.

Життєва математика

370. Одне дерево очищає за рік зону у формі прямокутного паралелепіпеда 100 м завдовжки, 12 м завширшки, 10 м заввишки. Обчисліть, скільки кубічних метрів повітря очистять від автомобільних вихлопних газів 200 каштанів, посаджених уздовж дороги.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

371. Знайдіть по два розв'язки кожної з анаграм (одна з анаграм є геометричним терміном, який ви знаєте з попередніх класів): 1) НОСУК; 2) ТСОРЕК.

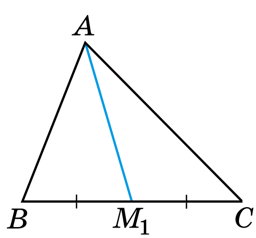
§ 15. Медіана, бісектриса і висота трикутника. Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника

У кожному трикутнику можна провести кілька відрізків, які мають спеціальні назви.

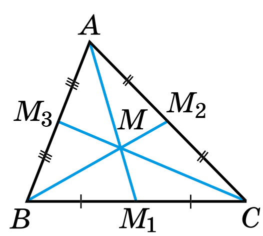
Медіана трикутника

Медіаною трикутника **називають відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.**

На малюнку 15.1 відрізок AM_1 – медіана трикутника ABC. Точку M_1 називають основою медіани AM_1. Будь-який трикутник має три медіани. На малюнку 15.2 відрізки AM_1, BM_2, CM_3 – медіани трикутника ABC. Медіани трикутника мають цікаву властивість.



Мал. 15.1



Мал. 15.2

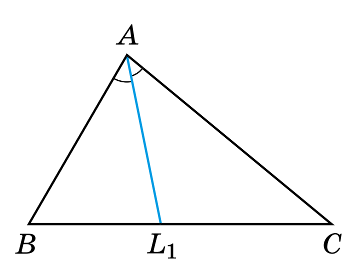
У будь-якому трикутнику медіани перетинаються в одній точці (її називають *центроїдом* трикутника) і діляться цією точкою у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.

На малюнку 15.2 точка M – центроїд трикутника ABC.
Цю властивість буде доведено у старших класах.

Бісектриса трикутника

Бісектрисою трикутника **називають відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.**

На малюнку 15.3 відрізок AL_1 – бісектриса трикутника ABC. Точку L_1 називають основою бісектриси AL_1.

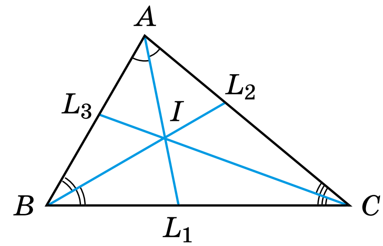


Мал. 15.3

Будь-який трикутник має три бісектриси. На малюнку 15.4 відрізки AL_1, BL_2, CL_3 – бісектриси трикутника ABC.

У § 23 доведемо, що *в будь-якому трикутнику бісектриси перетинаються в одній точці* (її називають ***інцентром***).

На малюнку 15.4 точка I – інцентр трикутника ABC.

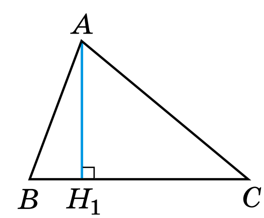


Мал. 15.4

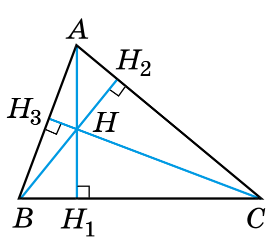
Висота трикутника

Висотою трикутника **називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.**

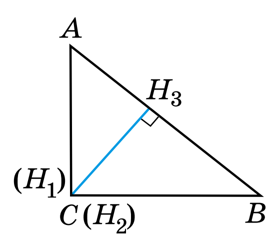
На малюнку 15.5 відрізок AH_1 – висота трикутника ABC. Точку H_1 називають основою висоти AH_1. Будь-який трикутник має три висоти. На малюнку 15.6 відрізки AH_1, BH_2, CH_3 – висоти гострокутного трикутника ABC, на малюнку 15.7 ці відрізки – висоти прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C, а на малюнку 15.8 ці відрізки – висоти тупокутного трикутника ABC з тупим кутом A.



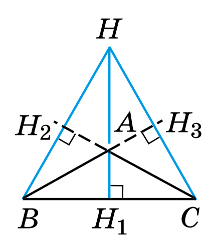
Мал. 15.5



Мал. 15.6



Мал. 15.7



Мал. 15.8

У старших класах буде доведено, що *в будь-якому трикутнику три висоти або їхні продовження перетинаються в одній точці* (її називають ***ортоцентром*** трикутника). На малюнках 15.6 і 15.8 точка H – ортоцентр трикутника ABC, на малюнку 15.7 ортоцентр трикутника збігається з точкою C – вершиною прямого кута трикутника ABC.

Властивість бісектриси рівнобедреного трикутника

Розглянемо ще одну важливу властивість рівнобедреного трикутника.

Теорема (властивість бісектриси рівнобедреного трикутника). У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

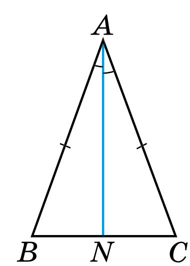
Доведення. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з основою BC, AN – його бісектриса (мал. 15.9). Доведемо, що AN є також медіаною і висотою.

1) Оскільки $AB = AC$, $\angle BAN = \angle CAN$ (за умовою), а відрізок AN є спільною стороною трикутників BAN і CAN, то $\triangle BAN = \triangle CAN$ (за першою ознакою).

2) Тому $BN = NC$. Отже, AN – медіана трикутника.

3) Також маємо $\angle BNA = \angle CNA$. Оскільки ці кути суміжні й рівні, то $\angle BNA = \angle CNA = 90°$. Отже, AN є також висотою.

Теорему доведено. ■



Мал. 15.9

Оскільки бісектриса, медіана і висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються, то справджуються такі наслідки з теореми.

Наслідок. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є висотою і бісектрисою.

Наслідок. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною і бісектрисою.

Приклад. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено бісектрису AN (мал. 15.9), $AN = 12$ см. Знайти периметр трикутника ANB, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см.

Розв'язання. 1) Оскільки $\triangle ABC$ – рівнобедрений, а AN – бісектриса, що проведена до основи цього трикутника, то AN є також і медіаною. Тому $BN = NC$.

2) Позначимо $P_{\triangle ABC}$ – периметр трикутника ABC, $P_{\triangle ANB}$ — периметр трикутника ANB, який потрібно знайти.

$P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BN + NC$.

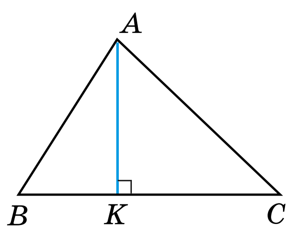
За умовою $AB = AC$, крім того $BN = NC$. Тому $P_{\triangle ABC} = AB + AB + BN + BN = 2(AB + BN)$. За умовою $P_{\triangle ABC} = 36$ (см). Тому $2(AB + BN) = 36$, $AB + BN = 18$ (см).
3) $P_{\triangle ANB} = AN + AB + BN = AN + (AB + BN) = 12 + 18 = 30$ (см).
Відповідь: 30 см.

Який відрізок називають медіаною трикутника? ○ Скільки медіан має трикутник? ○ Який відрізок називають бісектрисою трикутника? ○ Скільки бісектрис має трикутник? ○ Який відрізок називають висотою трикутника? ○ Скільки висот має трикутник? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість бісектриси рівнобедреного трикутника. Сформулюйте наслідки із цієї теореми.

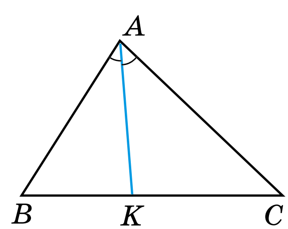
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

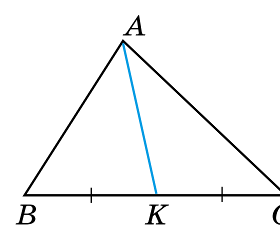
372. (*Усно.*) Як називають відрізок AK у трикутнику ABC (мал. 15.10–15.12)?



Мал. 15.10

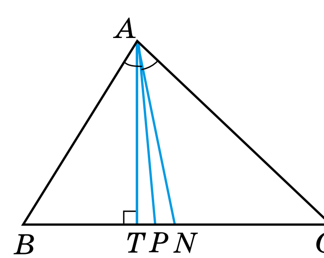


Мал. 15.11



Мал. 15.12

373. 1) Як у трикутнику ABC називають відрізок AT (мал. 15.13), якщо він є перпендикуляром до прямої BC?
2) Як у трикутнику ABC називають відрізок AN, якщо $BN = NC$?
3) Як у трикутнику ABC називають відрізок AP, якщо $\angle BAP = \angle PAC$?



Мал. 15.13

374. У трикутнику ABC відрізок AK – висота (мал. 15.10). Знайдіть градусні міри кутів BKA і CKA.

375. У трикутнику ABC відрізок AK – бісектриса (мал. 15.11), $\angle BAK = 40°$. Знайдіть градусну міру кута BAC.

376. У трикутнику ABC відрізок AK – медіана (мал. 15.12), $BC = 12$ см. Знайдіть довжини відрізків BK і KC.

2

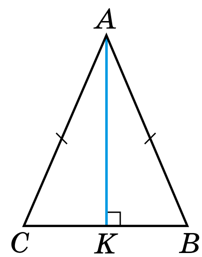
377. Накресліть трикутник. За допомогою лінійки з поділками проведіть його медіани.

378. Накресліть трикутник. За допомогою транспортира і лінійки проведіть його бісектриси.

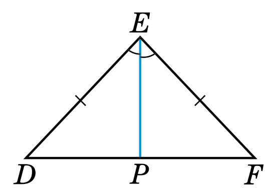
379. Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою креслярського косинця проведіть його висоти.

380. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою креслярського косинця проведіть його висоти.

381. На малюнку 15.14 відрізок AK – висота рівнобедреного трикутника ABC з основою BC. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.



Мал. 15.14



Мал. 15.15

382. На малюнку 15.15 відрізок EP – бісектриса рівнобедреного трикутника DEF з основою DF. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.

383. (*Усно.*) Чому не можна стверджувати, що три висоти трикутника завжди перетинаються в одній точці?

384. У трикутнику ABC $\angle B = \angle C$. Бісектриса, проведена до якої зі сторін, є одночасно і медіаною, і висотою?

3

385. (*Усно.*) Які елементи трикутника або їхні частини сумістяться, якщо його зігнути по:

1) бісектрисі; 2) висоті?

386. Доведіть, що коли бісектриса трикутника є його висотою, то трикутник – рівнобедрений.

387. Доведіть, що коли медіана трикутника є його висотою, то трикутник – рівнобедрений.

Примітка. Твердження задач 386 і 387 можна вважати ознаками рівнобедреного трикутника.

388. AD і A_1D_1 – відповідно бісектриси рівних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$.

389. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, – рівні.

390. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до бічних сторін, – рівні.

391. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту BD. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $BD = 10$ см, а периметр трикутника ABD дорівнює 40 см.

392. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено медіану CK. Знайдіть її довжину, якщо периметр трикутника ACK дорівнює 12 см, а периметр трикутника ABC – 16 см.

393. Доведіть, що коли медіана трикутника є його бісектрисою, то трикутник – рівнобедрений.

П р и м і т к а. Твердження задачі 393 можна вважати ознакою рівнобедреного трикутника.

Вправи для повторення

394. Два з восьми кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною c, дорівнюють 30° і 140°. Чи можуть прямі a і b бути паралельними?

395. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. На його стороні побудували рівнобедрений трикутник так, що сторона даного трикутника є основою рівнобедреного. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр 18 см.

396. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого – 69 см, а його основа складає 30 % від бічної сторони.

Життєва математика

397. Визначте суму грошей, яку потрібно сплатити за фарбування тренажерного залу, ширина, довжина і висота якого – 9,4 м, 6,5 м, 3,2 м. Фарбування одного квадратного метра коштує 25 грн. Вікна та двері складають 9 % від загальної площі стін. Округліть до десятків гривень.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

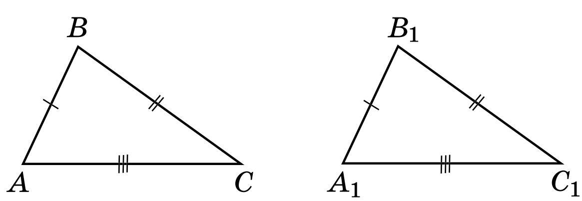
398. Олесь придбав акваріум у формі куба, що вміщує 125 л води. Він наповнив акваріум, не доливши до краю 6 см. Скільки літрів води Олесь налив у акваріум?

§ 16. Третя ознака рівності трикутників

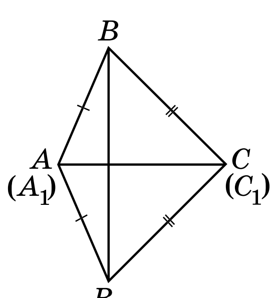
Ви вже знаєте дві ознаки рівності трикутників (за двома сторонами і кутом між ними та за стороною і двома прилеглими кутами). Розглянемо ще одну ознаку рівності трикутників – за трьома сторонами.

Теорема (третя ознака рівності трикутників).
Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.

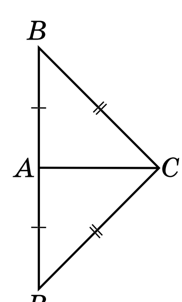
Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ – два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ (мал. 16.1). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Прикладемо трикутник $A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A, вершина C_1 – з вершиною C, а вершини B_1 і B були по різні боки від прямої AC. Можливі три випадки: промінь BB_1 проходить усередині кута ABC (мал. 16.2), промінь BB_1 збігається з однією зі сторін цього кута (мал. 16.3), промінь BB_1 проходить поза кутом ABC (мал. 16.4).



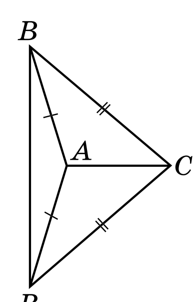
Мал. 16.1



Мал. 16.2



Мал. 16.3



Мал. 16.4

Розглянемо перший випадок (інші випадки розгляньте самостійно). Оскільки за умовою $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, то трикутники

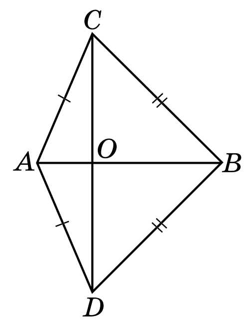
ABB_1 і CBB_1 – рівнобедрені з основою BB_1. Тоді $\angle ABB_1 = \angle AB_1B$ і $\angle CBB_1 = \angle CB_1B$. Тому $\angle ABC = \angle AB_1C$.

Отже, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Тому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за першою ознакою рівності трикутників).

Теорему доведено. ■

Приклад. Д а н о: $AC = AD$, $BC = BD$ (див. мал.).

Д о в е с т и: $CO = OD$.



Доведення. 1) Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$. $AC = AD$, $BC = BD$ (за умовою), AB – спільна сторона. Тоді $\triangle ABC = \triangle ABD$ (за третьою ознакою рівності трикутників).

2) $\angle CAB = \angle DAB$ (як відповідні кути рівних трикутників), а тому AB – бісектриса кута CAD.

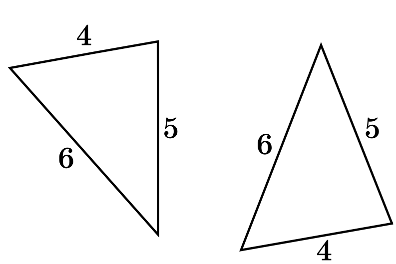
3) Тоді AO – бісектриса рівнобедреного трикутника ACD, проведена до основи, отже, за властивістю рівнобедреного трикутника AO є також і медіаною. Оскільки AO – медіана трикутника ACD, то $CO = OD$, що й потрібно було довести. ■

Сформулюйте та доведіть третю ознаку рівності трикутників.

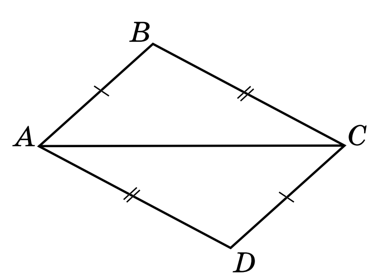
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **399.** (*Усно.*) Чи є трикутники, зображені на малюнку 16.5, рівними між собою? Якщо так, то за якою ознакою?

2 **400.** Доведіть рівність трикутників ABC і CDA, зображених на малюнку 16.6, якщо $AB = DC$ і $BC = AD$.



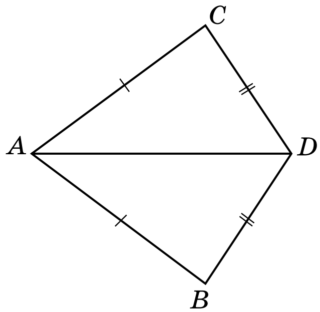
Мал. 16.5



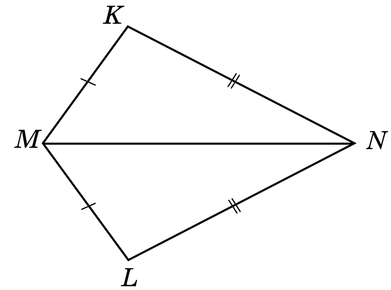
Мал. 16.6

401. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle ABD$ (мал. 16.7), якщо $AC = AB$ і $DC = DB$.

402. На малюнку 16.8 $MK = ML$, $KN = NL$. Доведіть, що $\angle K = \angle L$.



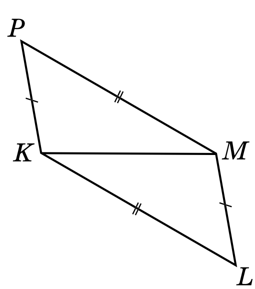
Мал. 16.7



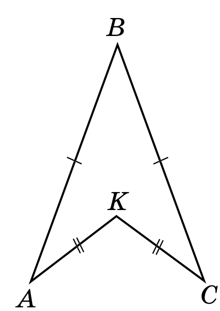
Мал. 16.8

403. На малюнку 16.9 $PK = ML$, $PM = KL$. Доведіть, що $\angle PKM = \angle LMK$.

404. На малюнку 16.10 $AB = BC$, $AK = KC$. Доведіть, що BK – бісектриса кута ABC.



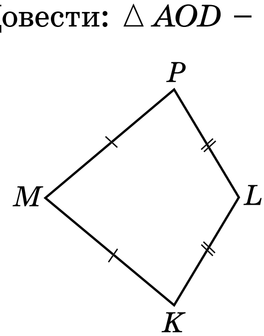
Мал. 16.9



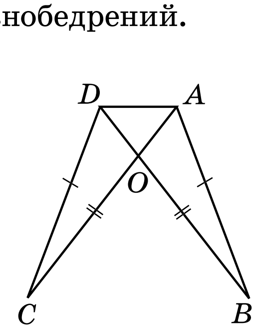
Мал. 16.10

405. На малюнку 16.11 $MP = MK$, $PL = KL$. Доведіть, що ML – бісектриса кута PMK.

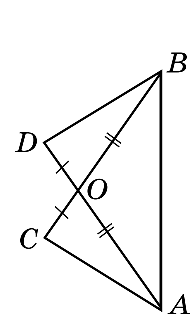
406. Дано: $AB = CD$, $AC = BD$ (мал. 16.12).
Довести: $\triangle AOD$ – рівнобедрений.



Мал. 16.11



Мал. 16.12



Мал. 16.13

407. Дано: $AO = OB$, $CO = OD$ (мал. 16.13).
Довести: $\triangle ABC = \triangle BAD$.

408. Про трикутники ABC і MNP відомо, що $AB \neq MN$, $BC \neq NP$, $AC \neq MP$. Чи можуть бути рівними такі трикутники?

409. Трикутники ABC і MNP – рівнобедрені. Відомо, що $AB = MN = 6$ см, а $BC = NP = 8$ см. Чи можна стверджувати, що ці трикутники рівні?

4 **410.** Усередині рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$) взято точку K так, що $BK = KC$. Доведіть, що пряма AK перпендикулярна до BC.

411. Усередині рівнобедреного трикутника DMN ($DM = DN$) взято точку P так, що $MP = PN$. Доведіть, що пряма DP ділить навпіл сторону MN.

Вправи для повторення

412. Як, використовуючи шаблон кута, градусна міра якого $10°$, побудувати перпендикулярні прямі?

413. Промінь AK проходить між сторонами кута BAC, $\angle BAC = 126°$. Відомо, що $4\angle BAK = 5\angle KAC$. Знайдіть градусні міри кутів BAK і KAC.

Життєва математика

414. *Практичне завдання.* Інженери полюбляють трикутник за жорсткість форми: якщо сторони, що утворюють його, з'єднати у вершинах, то форму трикутника неможливо змінити, на відміну від інших геометричних фігур. Властивість жорсткості трикутника широко використовують на практиці. Так, щоб закріпити стовп у вертикальному положенні, до нього ставлять підпорку. Наведіть інші приклади використання цієї властивості, підготуйте презентацію (доповідь або реферат) на цю тему та продемонструйте її класу.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

415. Накресліть трикутники ABC та KLM. Знайдіть суму кутів кожного трикутника.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

416. Накресліть прямокутник розміром 4×6 клітинок. Покажіть, як «замостити» (покрити без накладань і вільних клітинок) його куточками, кожний з яких складається з трьох клітинок, так, щоб жодні два з них не утворювали прямокутника.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3 (§§11–16)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Дано $\triangle KLM$, у якого $KM = 4$ см, $ML = 7$ см, $KL = 10$ см. Знайдіть його периметр.

А. 20 см **Б.** 21 см **В.** 22 см **Г.** 23 см

2. $\triangle PTK$ – різносторонній, $\triangle ABC = \triangle PTK$. Тоді буде правильною рівність $\angle B = ...$

А. $\angle P$ **Б.** $\angle T$

В. $\angle K$ **Г.** жодному з кутів трикутника PTK

3. Дано $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$, де $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тоді...

А. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за першою ознакою)

Б. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за другою ознакою)

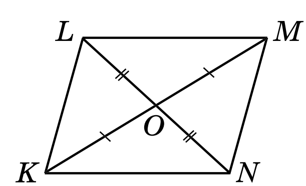
В. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за третьою ознакою)

Г. не можна встановити рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$

2 **4.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а його основа – 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

А. 12 см **Б.** 10 см **В.** 8 см **Г.** 6 см

5. На малюнку $LO = ON$, $KO = OM$, $\angle KOL \neq \angle LOM$. Укажіть правильну рівність.



А. $\triangle KOL = \triangle LOM$ **Б.** $\triangle KOL = \triangle OMN$

В. $\triangle KOL = \triangle MON$ **Г.** $\triangle KOL = \triangle NOM$

6. AM, BN і CL – медіани трикутника ABC. Яка з них є ще й бісектрисою і висотою трикутника, якщо $\angle A = \angle B$, а $\angle B \neq \angle C$?

А. AM **Б.** BN **В.** CL **Г.** жодна

3 **7.** Одна зі сторін трикутника вдвічі менша від другої і на 2 см менша від третьої. Знайдіть найбільшу сторону трикутника, якщо його периметр дорівнює 22 см.

А. 5 см **Б.** 7 см **В.** 9 см **Г.** 10 см

8. Відомо, що $\triangle KLM = \triangle MLK$. Знайдіть периметр трикутника KLM, якщо $KL = 6$ см, $KM = 5$ см.

А. 17 см **Б.** 16 см **В.** 18 см **Г.** знайти неможливо

9. BK – висота трикутника ABC, $AB = BC$. Укажіть неправильне твердження.

А. $\angle ABC = \angle BKA$ **Б.** $\angle BAC = \angle BCA$

В. $\triangle BAK = \triangle BCK$ **Г.** $\angle ABK = \angle CBK$

4 **10.** Дано: $\triangle ABC = \triangle BCA$, $AB = 5$ см. Знайти: BC, CA.

А. $BC = 6$ см, $CA = 7$ см **Б.** $BC = 4$ см, $CA = 3$ см

В. $BC = 4$ см, $CA = 4$ см **Г.** $BC = 5$ см, $CA = 5$ см

11. AB – основа рівнобедреного трикутника ABC, CK – його бісектриса. Знайдіть довжину цієї бісектриси, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см, а периметр трикутника ACK дорівнює 30 см.

А. 6 см **Б.** 8 см

В. 10 см **Г.** 12 см

12. У трикутнику ABC $AB = AC$. Точка M така, що $BM = MC$. Укажіть неправильне твердження.

А. $\angle MBC = \angle MCB$ **Б.** $\angle MBA > \angle MCA$

В. $\angle BMA = \angle CMA$ **Г.** $\angle BAM = \angle CAM$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

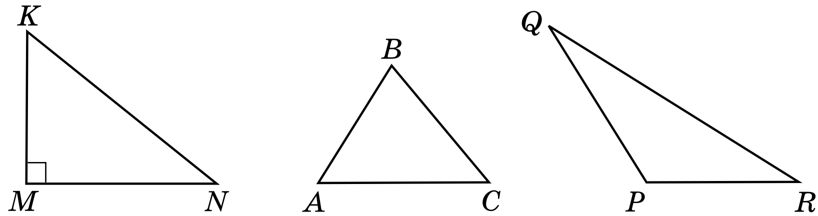
3 **13.** Периметр трикутника ABC дорівнює 37 см, $AB : BC = 2 : 3$, $AC - AB = 2$ см. Установіть відповідність між сторонами трикутника (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Сторони трикутника	*Довжини сторін трикутника*
	А. 10 см
1. AB	**Б.** 12 см
2. BC	**В.** 15 см
3. CA	**Г.** 16 см

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 11–16

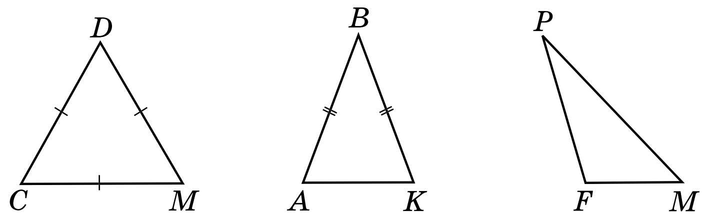
1 **1.** Накресліть $\triangle MNK$. Запишіть назви його вершин, сторін та кутів.

2. Який із зображених на малюнку 16.14 трикутників є гострокутний, який – прямокутний, а який – тупокутний?



Мал. 16.14

3. Який із зображених на малюнку 16.15 трикутників є рівнобедрений, який – рівносторонній, а який – різносторонній?

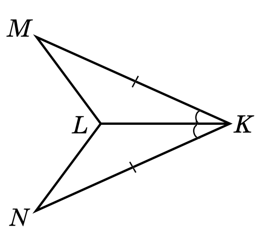


Мал. 16.15

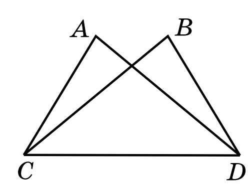
2 **4.** $\triangle ABC = \triangle KMF$. Відомо, що $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $KF = 7$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутників ABC і KMF.

5. На малюнку 16.16 $MK = KN$, $\angle LKM = \angle LKN$. Доведіть, що $\triangle MKL = \triangle NKL$.

6. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника з основою 12 см завдовжки, бічна сторона якого на 3 см більша за основу.



Мал. 16.16



Мал. 16.17

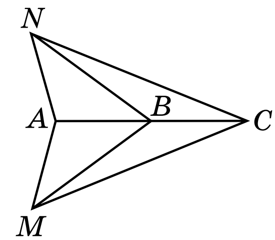
3 **7.** На малюнку 16.17 $AC = BD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\angle BCD = \angle ADC$.

8. Одна сторона трикутника вдвічі менша від другої і на 3 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 23 см.

4 **9.** У рівнобедреному трикутнику KML з основою KL проведено медіану MP. Знайдіть периметр трикутника KML, якщо $MP = 8$ дм, а периметр трикутника MKP дорівнює 24 дм.

Додаткові вправи

10. На малюнку $\triangle ANB = \triangle AMB$. Доведіть, що $NC = MC$.



11. Відомо, що $\triangle MKL = \triangle KLM$. Знайдіть периметр трикутника MKL, якщо він на 10 см більший за сторону MK.

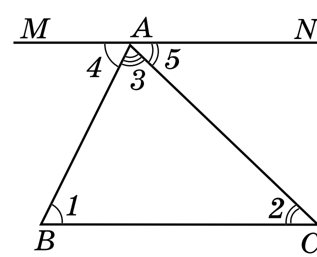
§ 17. Сума кутів трикутника

Розглянемо одну з найважливіших теорем геометрії.

Теорема (про суму кутів трикутника). Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Доведення. Розглянемо трикутник ABC і доведемо, що $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

1) Проведемо через вершину A пряму MN паралельно прямій BC (див. мал.). Позначимо $\angle B = \angle 1$, $\angle C = \angle 2$, $\angle BAC = \angle 3$, $\angle MAB = \angle 4$, $\angle NAC = \angle 5$.



Кути *1* і *4* – внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих BC і MN січною AB, а кути *2* і *5* – внутрішні різносторонні кути при перетині тих самих прямих січною AC. Тому $\angle 1 = \angle 4$ і $\angle 2 = \angle 5$.

2) $\angle MAN$ – розгорнутий, тому: $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$.

Оскільки $\angle 4 = \angle 1$, $\angle 5 = \angle 2$, то $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = \angle 3 + \angle 1 + \angle 2 = 180°$, тобто $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, що й потрібно було довести. ■

Наслідок. У будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі; трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут.

Доведення. Припустимо, що в трикутнику лише один кут є гострим. Тоді сума двох інших кутів, що не є гострими, не менша від 180°. А отже, у сумі з гострим перевищить 180°, що суперечить доведеній теоремі. Прийшли до протиріччя, бо наше припущення є неправильним. Отже, у кожного трикутника принаймні два кути гострі, а тому трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут. ■

Враховуючи цей наслідок, можна сказати, що гострокутний трикутник має три гострих кути; прямокутний трикутник має один прямий і два гострих кути; тупокутний трикутник має один тупий і два гострих кути.

Приклад 1. Визначити вид трикутника, якщо два його кути дорівнюють: 1) $40°$ і $30°$; 2) $54°$ і $36°$; 3) $80°$ і $60°$.

Розв'язання. Якщо у трикутнику ABC задано, наприклад, кути A і B, то кут C можна знайти так: $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. Знайдемо у кожній задачі третій кут, позначивши його $\angle C$, і визначимо вид трикутника.

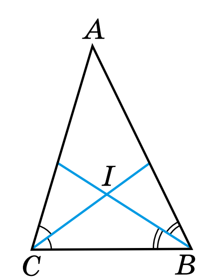
1) $\angle C = 180° - (40° + 30°) = 110°$; трикутник тупокутний, оскільки має тупий кут.

2) $\angle C = 180° - (54° + 36°) = 90°$; трикутник прямокутний, оскільки має прямий кут.

3) $\angle C = 180° - (80° + 60°) = 40°$; усі кути трикутника гострі, тому трикутник – гострокутний.

Відповідь: 1) тупокутний; 2) прямокутний; 3) гострокутний.

Приклад 2. Бісектриси кутів B і C трикутника ABC перетинаються в точці I. Довести, що $\angle BIC = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$.



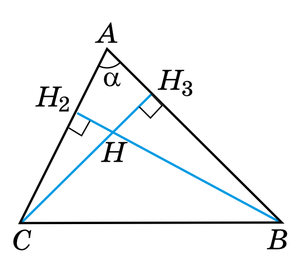
Доведення. 1) $\angle ICB = \dfrac{\angle ACB}{2}$, $\angle IBC = \dfrac{\angle ABC}{2}$ (див. мал.).

2) Тоді $\angle BIC = 180° - (\angle ICB + \angle IBC) =$

$$= 180° - \left(\frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle ABC}{2}\right) = 180° - \frac{\angle ACB + \angle ABC}{2} =$$

$$= 180° - \frac{180° - \angle A}{2} = 180° - 90° + \frac{\angle A}{2} = 90° + \frac{\angle A}{2}$$ (скористалися тим, що сума кутів кожного з трикутників BCI і ABC дорівнює $180°$), що й потрібно було довести. ■

Приклад 3. Висоти BH_2 і CH_3 гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H, $\angle A = \alpha$ (див. мал.). Знайти $\angle BHC$.



Розв'язання. Розглянемо трикутник H_2BC.

1) $\angle H_2BC = 180° - (90° + \angle ACB) =$

$= 90° - \angle ACB$. У $\triangle H_3CB$: $\angle H_3CB = 180° - (90° + \angle ABC) =$
$= 90° - \angle ABC$.

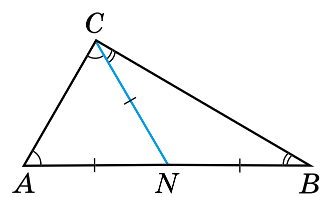
2) Тоді у $\triangle HCB$: $\angle BHC = 180° - (\angle HBC + \angle HCB) = 180° -$
$- (90° - \angle ACB + 90° - \angle ABC) = \angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle A =$
$= 180° - \alpha$. Отже, $\angle BHC = 180° - \alpha$.

Відповідь: $180° - \alpha$.

Приклад 4. Медіана CN трикутника ABC дорівнює половині сторони AB. Довести, що в трикутнику ABC $\angle C = 90°$.

Доведення (див. мал.). 1) Оскільки $CN = \dfrac{AB}{2}$ і N – середина відрізка AB, то $CN = AN = BN$.

2) Отже, трикутники ANC і CNB – рівнобедрені. Тому $\angle A = \angle ACN$, $\angle B = \angle BCN$. Таким чином, $\angle C = \angle A + \angle B$.



3) Але ж $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Тому $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. Отже, $\angle C = 180° - \angle C$. Звідки $\angle C = 90°$.

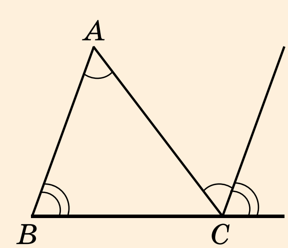
4) $\triangle ABC$ – прямокутний з прямим кутом C, що й потрібно було довести. ■

А ще раніше...

Властивість про суму кутів трикутника експериментальним шляхом було встановлено в Давньому Єгипті, проте відомості про різні способи доведення цієї теореми належать до більш пізніх часів.

Доведення, яке ми розглянули вище, є в коментарях Прокла до «Начал» Евкліда. Він же стверджував, що це доведення було відоме ще учням школи Піфагора (піфагорійцям) у V ст. до н. е.

А сам Евклід у першій книжці «Начал» запропонував доведення теореми про суму кутів трикутника у спосіб, який можна побачити на малюнку (виконайте це доведення самостійно).



Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів трикутника. ○ Сформулюйте та доведіть наслідок із цієї теореми.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **417.** (*Усно.*) Дано $\triangle PLK$. Знайдіть значення суми $\angle P + \angle L + \angle K$.

418. Чи існує трикутник з кутами:
1) 30°, 60° і 70°; 2) 70°, 40° і 70°?

419. Чи існує трикутник з кутами:
1) 50°, 70° і 80°; 2) 30°, 60° і 90°?

420. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють:
1) 43° і 54°; 2) 9° і 93°; 3) 83° і 89°.

421. Знайдіть третій кут трикутника, якщо перший і другий кути дорівнюють:
1) 15° і 38°; 2) 28° і 105°; 3) 7° і 91°.

422. (*Усно.*) Закінчіть речення:
1) якщо один з кутів трикутника тупий, то інші... ;
2) якщо один з кутів трикутника прямий, то інші... .

423. Сума двох кутів трикутника дорівнює 126°. Знайдіть третій кут трикутника.

424. У трикутнику ABC $\angle A + \angle B = 58°$. Знайдіть $\angle C$.

425. Один з кутів трикутника дорівнює 62°. Знайдіть суму градусних мір двох інших кутів.

426. Доведіть, що кожний з кутів рівностороннього трикутника дорівнює 60°.

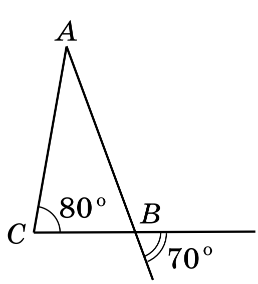
427. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть кут при вершині.

428. Знайдіть кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює 45°.

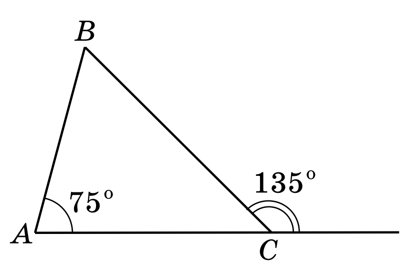
429. Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 80°.

430. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Знайдіть кути при основі.

431. Знайдіть невідомі кути трикутника ABC на малюнках 17.1, 17.2.



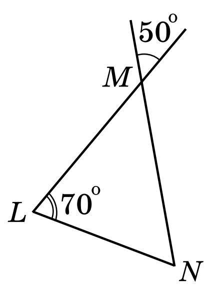
Мал. 17.1



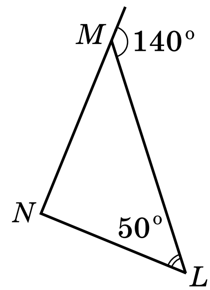
Мал. 17.2

432. Знайдіть невідомі кути трикутника MNL на малюнках 17.3, 17.4.

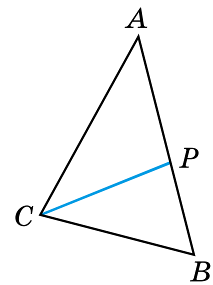
433. У трикутнику ABC проведено бісектрису CP (мал. 17.5). Знайдіть $\angle PCB$, якщо $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$.



Мал. 17.3



Мал. 17.4



Мал. 17.5

434. У трикутнику ABC проведено бісектрису CP (мал. 17.5). Знайдіть $\angle A$, якщо $\angle B = 65°$, $\angle ACP = 40°$.

435. Знайдіть кути трикутника MNL, якщо $\angle M + \angle N = 120°$, $\angle M + \angle L = 140°$.

436. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle A + \angle B = 100°$, $\angle A + \angle C = 130°$.

3 **437.** Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не менший від 60°.

438. Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не більший за 60°.

439. У трикутнику ABC $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$. Знайдіть ці кути.

440. Знайдіть градусні міри кутів трикутника, якщо вони відносяться як 2 : 3 : 5.

441. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі на 15° більший за кут при вершині.

442. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині на 24° більший за кут при основі.

443. Доведіть, що кути при основі рівнобедреного трикутника гострі.

444. Якщо один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то трикутник – рівносторонній. Доведіть це твердження. (Розгляньте два випадки.)

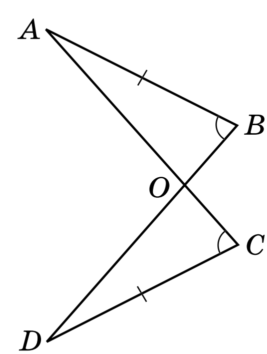
445. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище видатного українського вченого в галузі ракетобудування та космонавтики. Дізнайтеся з інтернету про його біографію та наукові досягнення.

У $\triangle ABC$: $\angle A = 80°$. Визначте градусні міри кутів B і C, якщо	$\angle B$	$\angle C$
кут B на 14° більший за кут C	О	Ь
кут B у 3 рази менший від кута C	Л	К
$\angle B : \angle C = 2 : 3$	В	Р

75°	57°	60°	57°	25°	43°	57°	40°

446. Один з кутів трикутника вдвічі більший за другий. Знайдіть ці кути, якщо третій кут дорівнює 36°.

447. На малюнку 17.6 $AB = DC$, $\angle B = \angle C$. Доведіть, що $\triangle AOB = \triangle DOC$.



Мал. 17.6

448. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

449. У трикутнику два кути дорівнюють 46° і 64°. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать бісектриси цих кутів.

450. У трикутнику два кути дорівнюють 70° і 80°. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать висоти цих кутів.

451. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює: 1) 12°; 2) 92°.

452. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює: 1) 28°; 2) 106°.

4

453. Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній перетинаються під прямим кутом.

454. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них удвічі більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?

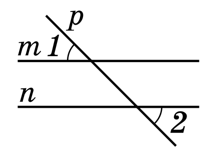
455. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них на 15° більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?

456. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 72°, а бісектриса кута при основі цього трикутника – 5 см. Знайдіть основу трикутника.

Вправи для повторення

457. Точка K лежить між точками P і L. Знайдіть PK, якщо $PL = 56$ мм, а $KL = 3$ см 4 мм.

458. Дано $\angle 1 = \angle 2$ (див. мал.). Доведіть, що $m \parallel n$.



459. $\angle AOB = 40°$, $\angle AOC = 60°$. Знайдіть $\angle BOC$. Скільки випадків слід розглянути?

460. Трикутники ABC і ABD – рівносторонні. Доведіть, що $AB \perp CD$.

Життєва математика

461. На центральну міську клумбу, що має форму прямокутника зі сторонами 20 м та 6 м, потрібно висадити цибулини тюльпанів з розрахунку 60 цибулин на 1 м^2.

1) Скільки цибулин потрібно заготувати для висаджування?

2) Тюльпани продають в упаковках по 3 цибулини. Ціна такої упаковки 28 грн. Магазин готовий зробити знижки міській адміністрації за гуртову покупку на 15 %. Скільки доведеться заплатити за тюльпани?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

462. Чи можна двома ударами сокири розрубати підкову (див. мал.) на 6 частин, не переміщуючи частин після першого удару? Якщо відповідь ствердна, укажіть, як це зробити.

§ 18. Зовнішній кут трикутника та його властивості. Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

Зовнішній кут трикутника

Зовнішнім кутом трикутника **називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.**

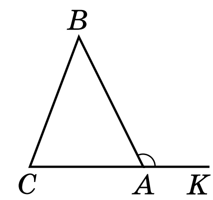
На малюнку 18.1 кут BAK – зовнішній кут трикутника ABC.

Щоб не плутати кут трикутника із зовнішнім кутом, його іноді називають *внутрішнім кутом*.

Т **Теорема 1** (**властивість зовнішнього кута трикутника**). **Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.**

Доведення. Нехай $\angle BAK$ – зовнішній кут трикутника ABC (мал. 18.1). Враховуючи властивість суміжних кутів, отримаємо $\angle BAK = 180° - \angle BAC$.

Водночас, врахувавши теорему про суму кутів трикутника, $\angle B + \angle C = 180° - \angle BAC$. Тому $\angle BAK = \angle B + \angle C$, що й потрібно було довести. ■



Мал. 18.1

Н **Наслідок. Зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут, не суміжний з ним.**

Приклад 1. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайти внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо вони відносяться як 3 : 5.

Розв'язання. Нехай $\angle BAK$ – зовнішній кут трикутника ABC (мал. 18.1), $\angle BAK = 120°$.

1) Оскільки $\angle B : \angle C = 3 : 5$, то можемо позначити $\angle B = 3x$, $\angle C = 5x$.

2) Оскільки $\angle BAK = \angle B + \angle C$ (за властивістю зовнішнього кута), маємо рівняння: $3x + 5x = 120°$, звідки $x = 15°$.

3) Тоді $\angle B = 3 \cdot 15° = 45°$, $\angle C = 5 \cdot 15° = 75°$.

Відповідь: 45°; 75°.

Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

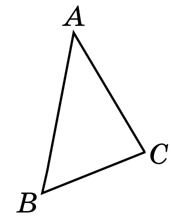
Розглянемо ще одну важливу властивість трикутника.

Т **Теорема 2** (**про співвідношення між сторонами і кутами трикутника**). **У трикутнику:**
1) проти більшої сторони лежить більший кут;
2) проти більшого кута лежить більша сторона.

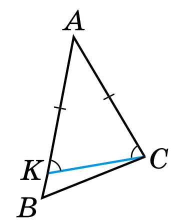
Доведення. 1) Нехай у трикутнику ABC $AB > AC$ (мал. 18.2). Доведемо, що $\angle C > \angle B$. Відкладемо на стороні AB відрізок AK, що дорівнює відрізку AC (мал. 18.3). Оскільки $AB > AC$, то точка K належить відрізку AB. Тому $\angle ACK$ є частиною кута ACB і $\angle ACK < \angle ACB$.

$\triangle AKC$ – рівнобедрений, тому $\angle AKC = \angle ACK$. Але $\angle AKC$ – зовнішній кут трикутника KBC. Тому $\angle AKC > \angle B$. Отже, і $\angle ACK > \angle B$, а тому $\angle ACB > \angle B$.

2) Нехай у трикутнику ABC $\angle C > \angle B$ (мал. 18.2). Доведемо, що $AB > AC$. Припустимо протилежне, тобто що $AB = AC$ або $AB < AC$. Якщо $AB = AC$, то $\triangle ABC$ – рівнобедрений, і тоді $\angle C = \angle B$. Це суперечить умові. Якщо припустити, що $AB < AC$, то за першою частиною теореми отримаємо, що $\angle C < \angle B$, і це також суперечить умові. Наше припущення неправильне. Отже, $AB > AC$, що й потрібно було довести. ■



Мал. 18.2



Мал. 18.3

Приклад 2. У трикутнику ABC: $\angle A = 57°$, $\angle B = 61°$. Яка зі сторін трикутника є найбільшою?

Розв'язання. У трикутнику більшою є та сторона, яка лежить проти більшого кута (мал. 18.2).

$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (57° + 61°) = 62°$.

2) Оскільки $\angle C > \angle A$ і $\angle C > \angle B$, то найбільшою є сторона, яка лежить проти кута C, тобто сторона AB.

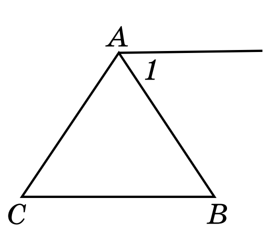
Відповідь: AB.

Що таке зовнішній кут трикутника? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість зовнішнього кута трикутника. ○ Сформулюйте наслідок із цієї теореми. ○ Сформулюйте теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

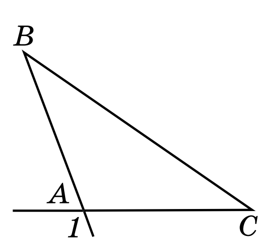
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

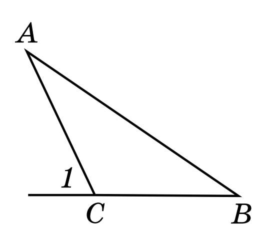
463. (*Усно.*) На яких з малюнків 18.4–18.6 кут *1* є зовнішнім кутом трикутника ABC?



Мал. 18.4



Мал. 18.5



Мал. 18.6

464. Накресліть $\triangle ABC$ та його зовнішній кут при вершині A.

465. Накресліть $\triangle DMN$ та його зовнішній кут при вершині D.

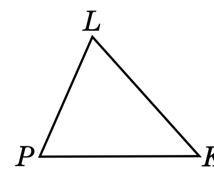
466. (*Усно*.) Укажіть суму внутрішнього кута трикутника і його зовнішнього кута при тій самій вершині.

467. Зовнішній кут при вершині C трикутника ABC дорівнює $65°$ (мал. 18.6). Знайдіть суму внутрішніх кутів A і B цього трикутника.

468. Сума внутрішніх кутів A і B трикутника ABC дорівнює $70°$ (мал. 18.6). Знайдіть зовнішній кут цього трикутника при вершині C.

469. (*Усно*.) У $\triangle PLK$ $PL < LK$ (мал. 18.7). Порівняйте кути P і K цього трикутника.

470. У $\triangle PLK$ $\angle L > \angle K$ (мал. 18.7). Порівняйте сторони PK і PL цього трикутника.



Мал. 18.7

471. Два кути трикутника дорівнюють $62°$ і $37°$. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при третій вершині.

472. У трикутнику ABC $\angle A = 43°$, $\angle B = 102°$. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при вершині C.

473. (*Усно*.) Скільки гострих кутів може бути серед зовнішніх кутів трикутника?

474. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $100°$. Знайдіть кут при основі трикутника.

475. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $55°$. Знайдіть зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами.

476. Зовнішній кут при вершині A трикутника ABC дорівнює $105°$. Знайдіть $\angle B$, якщо $\angle C = 45°$.

477. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює $120°$. Знайдіть внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, якщо другий внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнює $18°$.

478. Внутрішні кути трикутника дорівнюють $45°$ і $70°$. Знайдіть градусну міру зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній з його вершин.

479. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника відповідно дорівнюють $110°$ і $140°$. Знайдіть градусну міру кожного з трьох внутрішніх його кутів.

480. Розв'яжіть задачі, подані в таблиці, і прочитайте назву одного із символів нашої держави.

У трикутнику ABC зовнішній кут при вершині C дорівнює $140°$. Знайдіть внутрішні кути A і B цього трикутника, якщо	$\angle A$	$\angle B$
кут B на $30°$ більший за кут A	Р	А
кут A у 4 рази більший за кут B	О	П

28°	55°	85°	28°	112°	55°

481. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює $120°$. Знайдіть внутрішні кути, які не суміжні з ним, якщо:

1) один з них на $20°$ менший від другого;

2) один з них утричі менший від другого.

482. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює $118°$. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

483. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює $42°$. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

484. Доведіть, що сума зовнішніх кутів будь-якого трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює $360°$.

485. Зовнішні кути трикутника відносяться як $3 : 5 : 4$. Знайдіть відношення його внутрішніх кутів.

486. Внутрішні кути трикутника відносяться як $7 : 8 : 9$. Знайдіть відношення зовнішніх кутів трикутника, не знаходячи їхніх градусних мір.

487. Доведіть, що бісектриси зовнішнього і внутрішнього кутів трикутника при одній вершині перпендикулярні між собою.

Вправи для повторення

488. Промінь, що проходить між сторонами прямого кута, ділить його на два кути, різниця яких складає $\frac{1}{3}$ від їх суми. Знайдіть градусні міри цих кутів.

489. Відрізок AB, довжина якого 22,8 см, поділено на три частини. Відношення двох з них дорівнює 1 : 2, а третя – на 1,8 см довша за більшу з двох перших частин. Знайдіть довжини кожної з трьох частин відрізка.

Життєва математика

490. У розпорядженні дитячого садочка є дві ділянки. Одна з них має форму прямокутника, 32 м завдовжки і 18 м завширшки. Друга ділянка є квадратною, такої самої площі, що й перша. У садівника є 97 м паркану.

1) Яку з ділянок садівник зможе обгородити парканом?

2) Скільки метрів паркану ще потрібно докупити, щоб можна було обгородити парканом обидві ділянки?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

491. Накресліть $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. У скільки разів сторона BC цього трикутника менша від сторони AB?

492. Накресліть $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, та проведіть медіану CM цього трикутника. У скільки разів медіана CM менша від сторони AB?

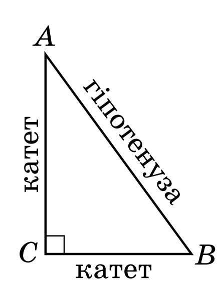
Цікаві задачі – поміркуй одначе

493. Розріжте деякий квадрат на два рівних між собою п'ятикутники.

§ 19. Прямокутні трикутники. Властивості та ознаки рівності прямокутних трикутників

Прямокутний трикутник

Трикутник **називають** ***прямокутним*****, якщо один з його кутів прямий.**



Мал. 19.1

На малюнку 19.1 зображено прямокутний трикутник ABC, у нього $\angle C = 90°$. Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають ***гіпотенузою***, а дві інші сторони – ***катетами***.

Властивості прямокутних трикутників

Розглянемо властивості прямокутних трикутників та їх застосування до розв'язування задач.

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Справді, сума кутів трикутника дорівнює 180°, прямий кут становить 90°. Тому сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює: $180° - 90° = 90°$.

Приклад 1. Знайти гострі кути прямокутного трикутника, якщо один з них становить $\frac{2}{7}$ від іншого.

Розв'язання. Розглянемо прямокутний трикутник ABC (мал. 19.1), у якого $\angle A = \frac{2}{7}\angle B$.

1) Позначимо $\angle B = x°$, тоді $\angle A = \frac{2}{7}x°$.

2) Використовуючи властивість, маємо $x + \frac{2}{7}x = 90°$, тоді $x = 70°$.

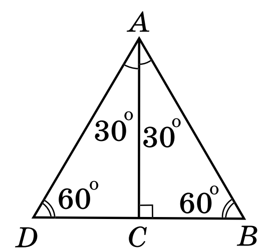
3) Отже, $\angle B = 70°$; $\angle A = \frac{2}{7} \cdot 70° = 20°$.

Відповідь: 20°; 70°.

2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який з його катетів.

Ця властивість є наслідком теореми про співвідношення між сторонами і кутами трикутника, оскільки прямий кут більший за гострий.

3. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.



Доведення. Розглянемо прямокутний $\triangle ABC$ з прямим кутом C і кутом A, що дорівнює 30° (див. мал.). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ADC, що йому дорівнює. Тоді $\angle B = \angle D = 90° - 30° = 60°$ і $\angle DAB = 30° + 30° = 60°$. Отже, $\triangle ABD$ – рівносторонній. Тому $DB = AB$. Оскільки $BC = \frac{1}{2}BD$, то $BC = \frac{1}{2}AB$, що й потрібно було довести. ■

Приклад 2. У трикутнику ABC: $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (мал. 19.1). Гіпотенуза трикутника на 5 см більша за менший катет. Знайти гіпотенузу трикутника.

Розв'язання. 1) Оскільки у прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом C маємо $\angle A = 30°$, то за властивістю $BC = \frac{1}{2}AB$.

2) $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 30° = 60°$; $\angle A < \angle B$, тому $BC < AC$. А отже, BC є меншим катетом трикутника ABC.

3) Позначимо $BC = x$ (см), тоді $AB = 2x$ (см).

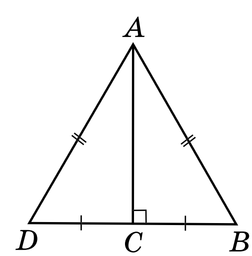
4) За умовою $2x - x = 5$; $x = 5$ (см).

5) Тоді $AB = 2 \cdot 5 = 10$ (см).

Відповідь: 10 см.

4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Доведення. Розглянемо прямокутний $\triangle ABC$, у якого катет BC дорівнює половині гіпотенузи AB (див. мал.). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ADC, що йому дорівнює. Оскільки $BC = \frac{1}{2}AB$, то $BD = AB = AD$. Маємо рівносторонній трикутник ABD, тому $\angle B = 60°$. У трикутнику ABC $\angle BAC = 90° - 60° = 30°$, що й потрібно було довести. ■



Ознаки рівності прямокутних трикутників

Розглянемо *ознаки рівності прямокутних трикутників*.

З першої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні між собою.

З другої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.

Якщо у двох прямокутних трикутників є одна пара рівних між собою гострих кутів, то й інша пара гострих кутів – також рівні між собою кути (це випливає з властивості 1 прямокутних трикутників). Тому маємо ще дві ознаки рівності прямокутних трикутників:

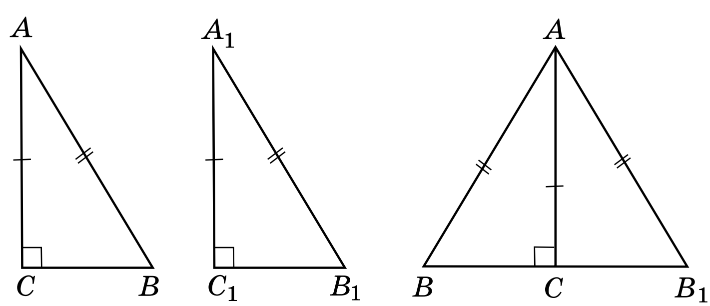
якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою;

якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.

Т Теорема (ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою).

Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники рівні між собою.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких кути C і C_1 – прямі і $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (див. мал.). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



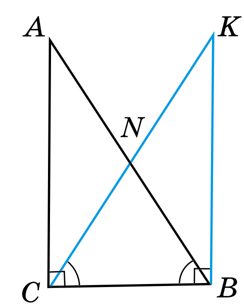
Прикладемо $\triangle ABC$ до $\triangle A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, а вершина C – з вершиною C_1 (мал. праворуч). Оскільки $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1 = 90°$, то $\angle BCB_1$ – розгорнутий, а тому точки B, C, B_1 лежать на одній прямій. $\triangle ABB_1$ – рівнобедрений, бо $AB = AB_1$. AC – його висота, проведена до основи. Звідси AC є також і медіаною, тому $BC = CB_1$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників. ■

Властивість медіани прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи

Розглянемо ще одну властивість прямокутного трикутника.

5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Доведення. Проведемо перпендикуляр BK до сторони BC так, щоб $BK = CA$ (див. мал.). Тоді $\triangle ABC$ і $\triangle KCB$ – прямокутні, BC – їхній спільний катет, $AC = BK$ (за побудовою). Тому $\triangle ABC = \triangle KCB$ (за двома катетами), тоді $\angle ABC = \angle KCB$. Отже, $\triangle NBC$ – рівнобедрений і $BN = CN$. Аналогічно можна довести, що $CN = AN$. Таким чином, $BN = CN = AN$. Тому CN – медіана і $CN = \frac{AB}{2}$, що й потрібно було довести. ■



Зауважимо, що з доведеної властивості можна зробити важливий висновок. Оскільки $CN = \frac{AB}{2}$ і $AN = BN = \frac{AB}{2}$, то $AN = BN = CN$.

Тобто

у прямокутному трикутнику середина гіпотенузи рівновіддалена від його вершин.

А ще раніше...

Про прямокутний трикутник згадується в папірусі Ахмеса. Деякі відомості про нього знали також вавилонські геометри. Ще тоді землеміри використовували ці властивості для визначення відстані на місцевості.

Термін «гіпотенуза» походить від грецького слова «іпотейнуза» і перекладається як «що тягнеться під чим-небудь», «та, що стягує». Походить це слово, найімовірніше, від давньоєгипетських арф, струни яких натягувалися на кінцях двох взаємно перпендикулярних підставок.

Термін «катет» походить від грецького слова «катетос», що перекладається як «схил», «перпендикуляр».

Евклід у своїх роботах для катетів використовував формулювання «сторони, що містять прямий кут», а для гіпотенузи – «сторона, що стягує прямий кут».

Який трикутник називають прямокутним? ○ Які назви мають сторони прямокутного трикутника? ○ Сформулюйте та доведіть властивості прямокутного трикутника. ○ Сформулюйте та доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.

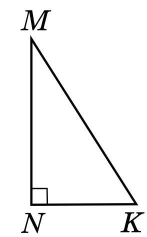
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

494. (*Усно.*) 1) Як називають трикутник, зображений на малюнку 19.2?

2) Назвіть гіпотенузу і катети цього трикутника.

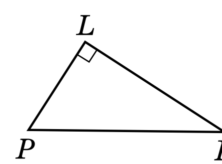
3) Яка зі сторін цього трикутника найдовша?



Мал. 19.2

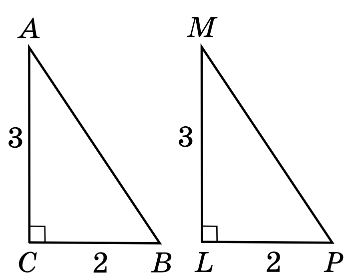
495. 1) Назвіть гіпотенузу і катети прямокутного трикутника PFL (мал. 19.3).

2) Яка сторона довша: PL чи PF; LF чи PF?

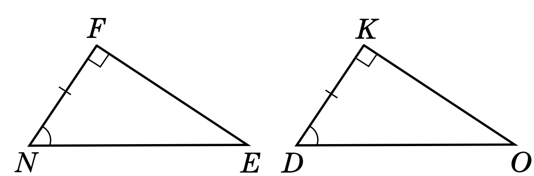


Мал. 19.3

496. За якими елементами прямокутні трикутники на малюнках 19.4 і 19.5 є рівними? Запишіть відповідні рівності.

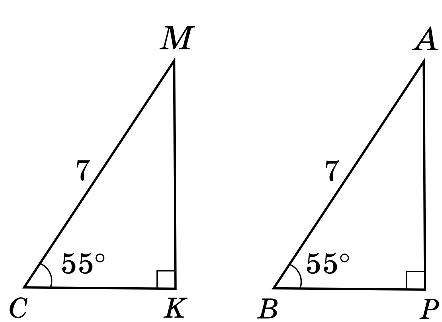


Мал. 19.4

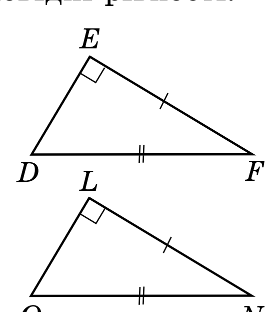


Мал. 19.5

497. За якими елементами є рівними прямокутні трикутники на малюнках 19.6 і 19.7? Запишіть відповідні рівності.



Мал. 19.6



Мал. 19.7

498. Знайдіть гострий кут прямокутного трикутника, якщо інший його гострий кут дорівнює: 1) 18°; 2) 87°.

499. Знайдіть гострий кут прямокутного трикутника, якщо інший його гострий кут дорівнює: 1) 75°; 2) 23°.

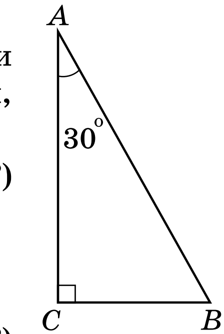
500. Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

501. У рівнобедреному трикутнику один з кутів при основі дорівнює 45°. Чи можна стверджувати, що цей трикутник прямокутний?

502. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 30°$ (мал. 19.8). Знайдіть:

1) BC, якщо $AB = 14$ см;

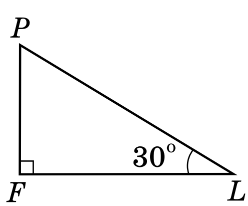
2) AB, якщо $BC = 5$ дм.



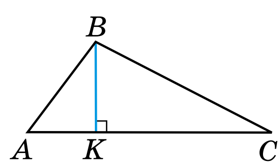
Мал. 19.8

503. У прямокутному трикутнику PFL ($\angle F = 90°$) $\angle L = 30°$ (мал. 19.9). Знайдіть:

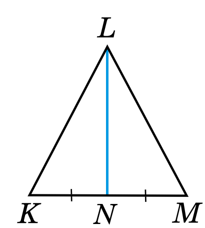
1) PF, якщо $PL = 12$ дм; 2) PL, якщо $PF = 4$ см.



Мал. 19.9



Мал. 19.10



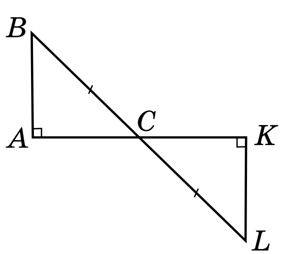
Мал. 19.11

504. На малюнку 19.10 BK – висота трикутника ABC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle ABK = 36°$, $\angle KBC = 64°$.

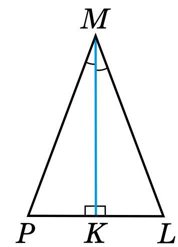
505. На малюнку 19.11 KLM – рівнобедрений трикутник з основою KM, LN – його медіана. Знайдіть кути трикутника KLM, якщо $\angle KLN = 31°$.

506. На малюнку 19.12 $AB \perp AC$, $KL \perp CK$, $BC = CL$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle KLC$.

507. На малюнку 19.13 $MK \perp PL$, $\angle PMK = \angle LMK$. Доведіть, що $\triangle MPK = \triangle MLK$.



Мал. 19.12



Мал. 19.13

508. Розв'яжіть задачі, подані в таблиці, та прочитайте прізвище. Хто з відомих українців має таке прізвище? За потреби використовуйте інтернет.

У трикутнику ABC кут C – прямий. Знайдіть градусні міри кутів A і B, якщо	$\angle A$	$\angle B$
кут A на $28°$ більший за кут B	Т	О
кут A у 5 разів менший від кута B	К	Н
$\angle A : \angle B = 2 : 3$	Е	С

15°	31°	54°	59°	36°	75°	15°	31°

509. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один з них у 4 рази більший за другий;
2) один з них на $16°$ менший від другого;
3) їхні градусні міри відносяться як $5 : 4$.

510. Знайдіть менший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута трикутника з гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює $26°$.

511. Знайдіть більший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута трикутника з гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює $68°$.

512. Доведіть, що точка, яка лежить у внутрішній області кута і рівновіддалена від його сторін, належить бісектрисі цього кута.

513. Кут між висотою прямокутного трикутника, проведеною до гіпотенузи, і одним з катетів дорівнює $32°$. Знайдіть гострі кути трикутника.

514. Один з кутів, утворених при перетині бісектрис прямого і гострого кутів трикутника, дорівнює $115°$. Знайдіть гострі кути цього трикутника.

515. Доведіть, що два рівнобедрених трикутники рівні, якщо відповідно рівні їхні бічні сторони і висоти, проведені до основ.

516. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює $60°$, а сума гіпотенузи і меншого катета – 30 см. Знайдіть довжину гіпотенузи та медіани, що проведена до неї.

517. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а бісектриса цього кута – 4 см. Знайдіть довжину катета, що лежить проти цього кута.

518. Різниця градусних мір двох зовнішніх кутів при вершинах гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 20°. Знайдіть гострі кути трикутника.

519. Знайдіть градусні міри гострих кутів прямокутного трикутника, якщо градусні міри їхніх зовнішніх кутів відносяться як 2 : 3.

Вправи для повторення

520. Доведіть, що коли медіана трикутника ділить його на два трикутники з однаковими периметрами, то хоча б два кути трикутника між собою рівні.

521. Один з кутів трикутника на 20° менший від другого і втричі менший від третього. Знайдіть кожний з кутів трикутника.

522. У рівнобедреному трикутнику основа більша за бічну сторону на 3 см, але менша від суми бічних сторін на 4 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

Життєва математика

523. 1 м^2 лінолеуму коштує 130 грн. Виміряйте розміри однієї з кімнат вашого будинку (квартири) та знайдіть площу цієї кімнати. Скільки потрібно заплатити за лінолеум для цієї кімнати?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

524. Накресліть довільний $\triangle ABC$, виміряйте довжини трьох його сторін. Порівняйте суму довжин кожної пари сторін із третьою стороною. Зробіть висновки.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

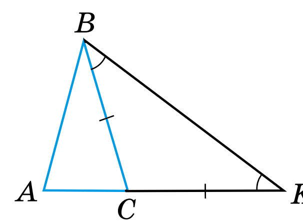
525. Позначте вісім точок і сполучіть їх відрізками так, щоб жодні два з них не перетиналися і з кожної точки виходило по чотири відрізки.

§ 20. Нерівність трикутника

Розглянемо важливу властивість сторін трикутника.

Теорема (нерівність трикутника).
Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Доведення. Розглянемо довільний $\triangle ABC$ і доведемо, що його сторона, наприклад AB, менша від суми двох інших сторін AC і CB.



1) Відкладемо на продовженні сторони AC відрізок CK, що дорівнює стороні BC (див. мал.). Тоді $\triangle BCK$ – рівнобедрений, і тому $\angle CBK = \angle CKB$.

2) $\angle ABK > \angle CBK$, тому $\angle ABK > \angle AKB$. Оскільки в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, то $AB < AK$. Але $AK = AC + CK = AC + BC$. Отже, $AB < AC + BC$.

Аналогічно можна довести, що $AC < AB + BC$, $BC < AB + AC$. Теорему доведено. ■

Наслідок. Кожна зі сторін трикутника більша за різницю двох інших його сторін.

Доведення. Запишемо нерівність трикутника для трикутника ABC: $AB < AC + BC$. Віднявши від обох її частин, наприклад, AC, матимемо: $AB - AC < BC$. Таку дію можна виконати, використовуючи властивості нерівностей, які розглядатимуться в курсі алгебри. Отже, $BC > AB - AC$. Аналогічно: $AC > BC - AB$, $AB > BC - AC$. ■

Оскільки, наприклад, $BC > AB - AC$ і $BC > AC - AB$, то, узагальнюючи, отримаємо $BC > |AB - AC|$.

З теореми про нерівність трикутника та наслідку з неї отримаємо важливе співвідношення між сторонами трикутника:

кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін, але більша за модуль їх різниці.

Наприклад, $|AB - AC| < BC < AB + AC$.

Приклад 1. Дві сторони трикутника дорівнюють 0,7 см і 1,7 см. Знайти довжину третьої сторони, якщо її довжина дорівнює цілому числу сантиметрів.

Розв'язання. Нехай невідома сторона трикутника дорівнює a см. Тоді $1{,}7 - 0{,}7 < a < 1{,}7 + 0{,}7$, тобто $1 < a < 2{,}4$. Оскільки a – ціле число, то $a = 2$ (см).

Відповідь: 2 см.

Приклад 2. Периметр рівнобедреного трикутника 60 см, а дві його сторони відносяться як 2 : 5. Знайти сторони трикутника.

Розв'язання. Позначимо сторони трикутника, відношення яких 2 : 5, як $2x$ см і $5x$ см. Оскільки невідомо, яка з них – основа, а яка – бічна сторона, розглянемо два випадки.

1. Основа дорівнює $5x$ см, а бічні сторони – по $2x$ см. Але тоді $2x + 2x < 5x$, що суперечить нерівності трикутника, тобто трикутника зі сторонами $2x$, $2x$ і $5x$ не існує.

2. Основа дорівнює $2x$ см, а бічні сторони – по $5x$ см. Для цього випадку нерівність трикутника виконується.

Отже, за умовою задачі маємо рівняння:

$$2x + 5x + 5x = 60,\ x = 5 \text{ (см)}.$$

Тоді $2 \cdot 5 = 10$ (см) – основа, $5 \cdot 5 = 25$ (см) – бічна сторона.

Відповідь: 10 см; 25 см; 25 см.

? Сформулюйте теорему про нерівність трикутника та наслідок з неї. ○ Якими співвідношеннями пов'язані між собою сторони трикутника?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

526. Чи існує трикутник зі сторонами:

1) 1 см, 2 см і 4 см; 2) 7 дм, 6 дм і 5 дм;
3) 3 см, 4 см і 7 см?

527. Чи існує трикутник зі сторонами:

1) 2 дм, 5 дм і 7 дм; 2) 2 см, 3 см і 6 см;
3) 5 дм, 2 дм і 4 дм?

2

528. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,8 см і 8,4 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

529. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 4,3 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

530. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам: 1) 2, 3, 4; 2) 7, 8, 15; 3) 5, 3, 7?

531. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам: 1) 5, 1, 4; 2) 5, 6, 7; 3) 8, 2, 11?

3 **532.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Чи може бічна сторона цього трикутника дорівнювати 3 см?

533. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 11 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

534. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,5 см і 1,2 см. Яким може бути периметр трикутника, якщо довжина третьої сторони дорівнює цілому числу сантиметрів?

535. Периметр трикутника дорівнює 30 см. Чи може одна з його сторін дорівнювати: 1) 14 см; 2) 15 см; 3) 16 см?

536. Периметр трикутника дорівнює 40 дм. Чи може одна з його сторін дорівнювати: 1) 21 дм; 2) 20 дм; 3) 19 дм?

4 **537.** Чи існує трикутник з периметром 20 см, одна сторона якого на 2 см більша за другу і на 4 см менша від третьої?

538. Чи існує трикутник з периметром 23 см, одна сторона якого на 6 см менша від другої і на 1 см більша за третю?

Вправи для повторення

539. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо кут A втричі менший від кута B і на 15° більший за кут C.

540. Доведіть, що два прямокутних трикутники між собою рівні, якщо висота, проведена до гіпотенузи, і катет одного трикутника дорівнюють відповідно висоті, проведеній до гіпотенузи, і катету другого трикутника.

Життєва математика

541. Циферблат морських компасів поділено на 32 рівні частини, які називають румбами. Скільки градусів становлять 4 румби?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

542. Накресліть коло із центром у точці O, радіус якого дорівнює 25 мм. Проведіть діаметр кола AB та позначте точку M, що належить колу.

1) Виміряйте довжину діаметра AB та порівняйте її з радіусом.
2) Виміряйте градусну міру кута AMB.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

543. Коник-стрибунець може переміщуватися вздовж даної прямої на 4 см або 6 см (у будь-який бік). Чи зможе він за кілька стрибків опинитися в точці, що міститься від початкової на відстані: 1) 2024 см; 2) 2025 см?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4 (§§17–20)

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Три кути трикутника можуть дорівнювати...

А. 20°, 20° і 150° **Б.** 30°, 100° і 40°
В. 50°, 60° і 70° **Г.** 60°, 60° і 61°

2. У $\triangle ABC$ $AB > AC$. Порівняйте $\angle B$ і $\angle C$ цього трикутника.

А. $\angle B < \angle C$ **Б.** $\angle B = \angle C$
В. $\angle B > \angle C$ **Г.** порівняти неможливо

3. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює 40°.

А. 30° **Б.** 40° **В.** 50° **Г.** 60°

2

4. Один з кутів трикутника дорівнює 72°. Знайдіть суму двох інших кутів трикутника.

А. 98° **Б.** 108° **В.** 118° **Г.** знайти неможливо

5. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 140°. Знайдіть кут при основі цього трикутника.

А. 40° **Б.** 50° **В.** 60° **Г.** 70°

6. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 4,2 см. Якому цілому числу сантиметрів НЕ може дорівнювати третя сторона трикутника?

А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 6 см **Г.** 8 см

3

7. Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 30° менший від другого, а гіпотенуза трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть менший з його катетів.

А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 5 см **Г.** 6 см

8. У трикутнику два кути дорівнюють 60° і 50°. Знайдіть кут між прямими, що містять бісектриси цих кутів.

А. 125° **Б.** 115° **В.** 65° **Г.** 55°

9. Периметр трикутника дорівнює 16 см. Якою НЕ може бути довжина однієї з його сторін?

А. 8 см **Б.** 7,5 см **В.** 7 см **Г.** 2 см

4 **10.** Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює основі цього трикутника. Знайдіть кут при основі цього трикутника.

А. 60° **Б.** 72° **В.** 84° **Г.** 96°

11. Зовнішні кути трикутника відносяться як 3 : 5 : 7. Знайдіть менший з внутрішніх кутів трикутника.

А. 12° **Б.** 24° **В.** 60° **Г.** інша відповідь

12. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 60°, а сума меншого катета і медіани, проведеної до гіпотенузи, дорівнює 10 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

А. 6 см **Б.** 8 см **В.** 10 см **Г.** 15 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 40°. Установіть відповідність між кутами (1–3) та їхніми градусними мірами (А–Г).

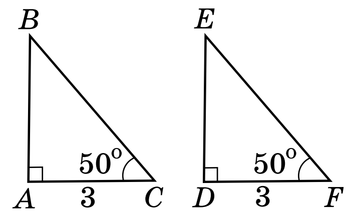
Кути	*Градусні міри*
1. Кут, що утворює висота трикутника, проведена до гіпотенузи, із більшим катетом.	**А.** 45°
2. Менший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута з гіпотенузою.	**Б.** 50°
3. Кут між прямими, що містять бісектриси прямого і меншого гострого кута трикутника.	**В.** 65°
	Г. 85°

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 17–20

1 **1.** Знайдіть третій кут трикутника, якщо два з його кутів дорівнюють 30° і 80°.

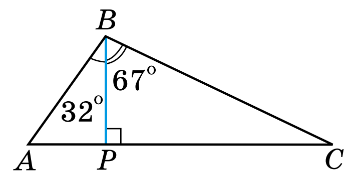
2. Накресліть $\triangle PLK$ та його зовнішній кут при вершині P.

3. За якими елементами рівні між собою прямокутні трикутники, зображені на малюнку? Запишіть відповідні рівності.



4. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 71°. Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

5. На малюнку BP – висота трикутника ABC, $\angle ABP = 32°$, $\angle PBC = 67°$. Знайдіть кути трикутника ABC.



6. Дві сторони трикутника дорівнюють 5,2 см і 6,3 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

7. Один з кутів трикутника вдвічі менший від другого і на 16° більший за третій. Знайдіть кути трикутника.

8. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 112°. Знайдіть внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо вони відносяться як 3 : 5.

9. У прямокутному трикутнику BCD $\angle C = 90°$, BM – бісектриса трикутника, $\angle CBD = 60°$. Знайдіть довжину катета CD, якщо $CM = 8$ см.

Додаткові вправи

10. Зовнішні кути трикутника відносяться як 4 : 5 : 6. Знайдіть відношення внутрішніх кутів трикутника.

11. Чи існує трикутник з периметром 23 см, одна сторона якого на 3 см більша за другу і на 5 см менша від третьої?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 11

544. Накресліть прямокутний $\triangle KLP$. Запишіть назви вершин, сторін та кутів цього трикутника.

545. Одна сторона трикутника дорівнює 18 см, друга сторона на 6 см більша за першу, а третя сторона вдвічі менша від другої. Знайдіть периметр трикутника.

546. За допомогою транспортира та лінійки з поділками накресліть $\triangle MLP$, у якого $ML = 5$ см, $\angle M = 40°$, $\angle L = 80°$.

547. Одна сторона трикутника вдвічі менша від другої, а третя – становить 80 % від другої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

548. Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо $AB + AC = 12$ см, $AC + CB = 15$ см, $AB + BC = 13$ см.

До § 12

549. 1) Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 7 см і 8 см. Знайдіть сторони рівного йому трикутника.
2) Кути трикутника дорівнюють 40°, 60° і 80°. Знайдіть кути рівного йому трикутника.

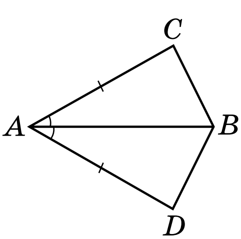
550. Чи можна сумістити накладанням вертикальні кути?

551. Чи можуть бути рівними трикутники, найбільші сторони яких не є рівними?

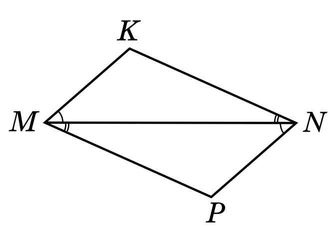
552. Дано: $\triangle ABC = \triangle ACB$, $AB = 7$ см, $BC = 4$ см. Знайти: P_{ABC}.

До § 13

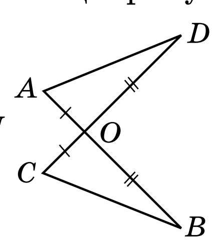
553. Назвіть спільний елемент трикутників, зображених на малюнках 1 та 2, і ознаку, за якою ці трикутники рівні.



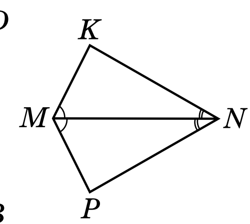
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

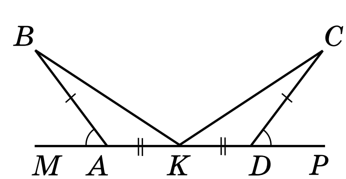


Мал. 4

554. Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle COB$ (мал. 3), якщо $AO = CO$, $DO = OB$.

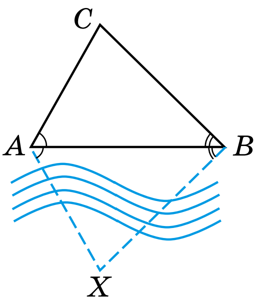
555. Доведіть, що $\triangle MKN = \triangle MPN$ (мал. 4), якщо $\angle KMN = \angle PMN$ і $\angle KNM = \angle PNM$.

556. На малюнку 5 $\angle MAB = \angle PDC$, $BA = CD$, $AK = KD$. Доведіть, що $BK = KC$.

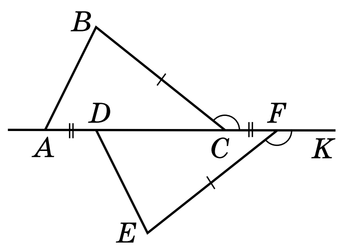


Мал. 5

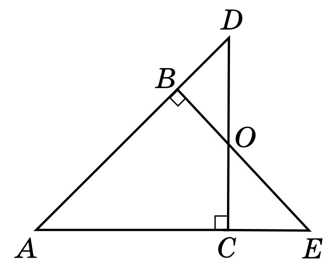
557. Щоб знайти відстань від пункту A до недосяжного пункту X (мал. 6), на березі позначають точки B і C так, щоб $\angle XAB = \angle CAB$ і $\angle XBA = \angle CBA$. Тоді $AX = AC$. Чому?



Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8

558. На малюнку 7 зображено фігуру, у якої $BC = EF$, $AD = CF$, $\angle BCF = \angle EFK$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.

559. На сторонах кута A позначено точки B і C так, що $AB = AC$. $DC \perp AE$, $BE \perp AD$ (мал. 8). Доведіть, що:

1) $BD = CE$;

2) AO – бісектриса кута A.

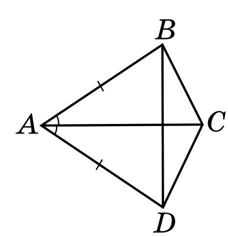
До § 14

560. AK – основа рівнобедреного трикутника AKP.

1) $AP = 5$ см. Знайдіть PK.

2) $\angle A = 70°$. Знайдіть $\angle K$.

561. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а бічна сторона – 4 см. Знайдіть периметр трикутника.



Мал. 9

562. На малюнку 9 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle CAD$. Доведіть, що $\triangle BCD$ – рівнобедрений.

563. Основа і прилеглий до неї кут одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі та прилеглому до неї куту іншого рівнобедреного трикутника. Чи будуть рівними між собою ці трикутники?

564. Основа та бічна сторона рівнобедреного трикутника відносяться як 3 : 4. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 88 см.

565. $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$ рівнобедрені зі спільною основою AB. Точки C і D лежать по різні боки від прямої AB. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle BCD$.

До § 15

1 **566.** Як називають у трикутнику:

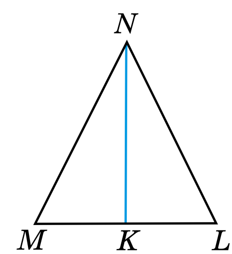
1) відрізок, що сполучає його вершину із серединою протилежної сторони;

2) перпендикуляр, проведений з його вершини до прямої, що містить протилежну сторону;

3) відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони?

567. Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 5 см. Знайдіть висоту цього трикутника, проведену до основи; медіану цього трикутника, проведену до основи.

2 **568.** На малюнку 10 відрізок NK – медіана рівнобедреного трикутника MNL з основою ML. Запишіть три пари рівних кутів і дві пари рівних відрізків, що є на цьому малюнку.

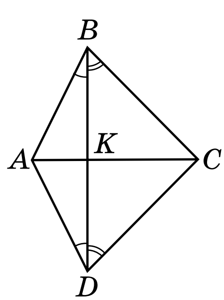


Мал. 10

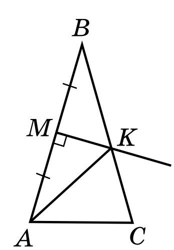
3 **569.** AM і A_1M_1 – відповідно медіани рівних між собою трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.

570. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику будь-яка точка проведеної до основи висоти рівновіддалена від кінців основи трикутника.

4 **571.** На малюнку 11 $\angle ABD = \angle ADB$, $\angle CBD = \angle CDB$. Доведіть, що $BD \perp AC$.



Мал. 11

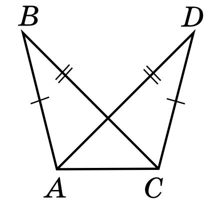


Мал. 12

572. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = a$ см. З точки M – середини AB – проведено перпендикуляр до AB, який перетинає BC в точці K (мал. 12). Знайдіть довжину сторони AC та периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника AKC дорівнює b см ($b > a$).

До § 16

2 **573.** Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 13), якщо $AB = CD$, $BC = AD$.



Мал. 13

3 **574.** Сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні іншого рівностороннього трикутника. Чи можна стверджувати, що трикутники рівні між собою?

4 **575.** Доведіть рівність трикутників за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з них.

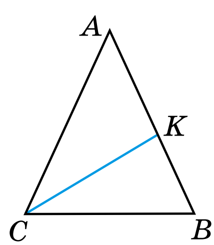
До § 17

1 **576.** Знайдіть кут C трикутника ABC, якщо:
1) $\angle A = 65°$, $\angle B = 29°$; 2) $\angle A = 37°$, $\angle B = 116°$.

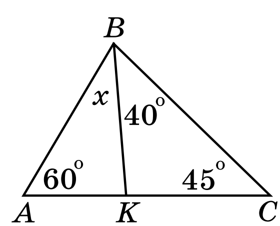
2 **577.** На малюнку 14 CK – бісектриса рівнобедреного трикутника ABC з основою CB. Знайдіть:
1) $\angle A$, якщо $\angle KCB = 32°$; 2) $\angle ACK$, якщо $\angle A = 56°$.

578. Визначте вид трикутника ABC за сторонами, якщо $\angle A = 76°$, $\angle B = 28°$.

579. За малюнком 15 знайдіть градусну міру кута x.



Мал. 14



Мал. 15

3 **580.** Один з кутів трикутника дорівнює 60°, а два інших відносяться як 2 : 3. Знайдіть ці кути.

581. Знайдіть кут між двома прямими, що містять медіани рівностороннього трикутника.

4 **582.** Бісектриса одного з кутів трикутника утворює з висотою, проведеною з тієї самої вершини, кут 16°, а менший з двох інших кутів трикутника дорівнює 50°. Знайдіть невідомі кути трикутника.

583. Знайдіть градусну міру кута трикутника, якщо він:

1) дорівнює $\frac{1}{5}$ від суми градусних мір двох інших кутів;

2) на 40° менший від суми двох інших кутів.

584. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено бісектрису AK. Знайдіть:

1) $\angle B$, якщо $\angle AKB = 60°$; 2) $\angle C$, якщо $\angle AKC = 111°$.

До § 18

1 **585.** Накресліть $\triangle MNK$ та по одному зовнішньому куту при кожній вершині цього трикутника.

2 **586.** Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 150°. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

587. Один з кутів трикутника дорівнює 80°. Чи може зовнішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнювати:

1) 102°; 2) 80°; 3) 75°?

3 **588.** Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють 115° і 137°. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при третій вершині.

589. Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник – рівнобедрений.

590. Два внутрішніх кути трикутника відносяться як 2 : 3, а зовнішній кут третього кута дорівнює 140°. Знайдіть кути трикутника.

4 **591.** Сума внутрішніх кутів рівнобедреного трикутника разом з одним із зовнішніх кутів дорівнює 260°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника.

592. Доведіть, що не існує трикутника, у якому зовнішні кути при кожній з вершин більші за 120°.

* **593.** Внутрішній кут трикутника дорівнює різниці зовнішніх кутів, не суміжних з ним. Доведіть, що трикутник – прямокутний.

До § 19

1 **594.** Укажіть умови, з яких випливає рівність двох прямокутних трикутників:

1) катет одного трикутника дорівнює катету другого трикутника;

2) катет і прилеглий до нього гострий кут одного трикутника дорівнює катету і прилеглому до нього гострому куту другого трикутника;

3) два гострих кути одного трикутника дорівнюють двом гострим кутам другого;

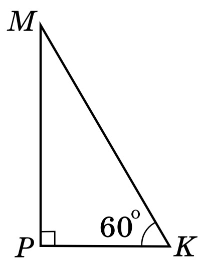
4) катет і гіпотенуза одного трикутника дорівнюють катету і гіпотенузі другого.

595. У прямокутному трикутнику MKP $\angle K = 60°$ (мал. 16). Знайдіть:

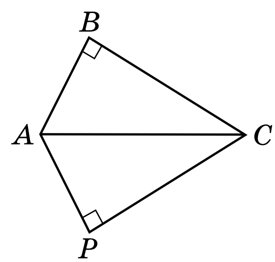
1) $\angle M$; 2) PK, якщо $MK = 24$ см;

3) MK, якщо $PK = 30$ мм.

596. На малюнку 17 $\angle B = \angle P = 90°$, CA – бісектриса кута C. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle APC$.



Мал. 16



Мал. 17

597. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 7 : 3.

598. З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведено бісектрису і висоту, кут між якими 15°. Знайдіть гострі кути трикутника.

599. У прямокутному трикутнику ABC $AC = BC$. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 5 см.

600. Знайдіть кут між бісектрисами гострих кутів прямокутного трикутника.

601. У прямокутному трикутнику катет 24 см завдовжки прилягає до кута 30°. Знайдіть бісектрису другого гострого кута трикутника.

602. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120°, а висота, проведена до бічної сторони, – a см. Знайдіть основу трикутника.

603. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 10 см і ділить прямий кут у відношенні 1 : 2. Знайдіть гіпотенузу та менший катет трикутника.

604. Доведіть, що в нерівнобедреному прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить кут між висотою і медіаною, проведеними з тієї самої вершини, навпіл.

До § 20

605. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 8 см. Чи може третя сторона трикутника дорівнювати:

1) 2 см; 2) 3 см; 3) 6 см;
4) 10 см; 5) 13 см; 6) 15 см?

606. Дві сторони трикутника дорівнюють 5,2 см і 8,7 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона і якому найбільшому?

607. На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено точки D і E, причому точка D – середина AB, $AE = 6$ см, $DE = 4$ см. Чи може довжина сторони AB дорівнювати 21 см?

608. Знайдіть сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють:

1) 4 см і 7 см; 2) 5 см і 2 см; 3) 12 см і 6 см.

609. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 51 см, а дві його сторони відносяться як 3 : 7. Знайдіть сторони трикутника.

Головне в розділі 3

✓ **Трикутник** – фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.

✓ Геометричні фігури – ***рівні між собою***, якщо їх можна сумістити накладанням.

Перша ознака рівності трикутників. **Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

Друга ознака рівності трикутників. **Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

Третя ознака рівності трикутників. **Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні між собою.**

✓ Трикутник **рівнобедрений**, якщо в нього дві сторони рівні.

✓ Трикутник, усі сторони якого мають різні довжини, – **різносторонній**.

✓ Трикутник **рівносторонній**, якщо в нього всі сторони рівні.

ВЛАСТИВІСТЬ КУТІВ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

ОЗНАКА РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

Якщо в трикутнику два кути між собою рівні, то він рівнобедрений.

✓ **Медіана** трикутника – відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

✓ **Бісектриса** трикутника – відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони.

✓ **Висота** трикутника – перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

✓ **Зовнішній кут трикутника** – кут, суміжний з кутом цього трикутника.

ВЛАСТИВІСТЬ ЗОВНІШНЬОГО КУТА ТРИКУТНИКА

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

У трикутнику:
1) проти більшої сторони лежить більший кут;
2) проти більшого кута лежить більша сторона.

✓ Сторона **прямокутного трикутника**, яка лежить проти прямого кута, – ***гіпотенуза***, а дві інші сторони – ***катети***.

ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.
2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який з його катетів.
3. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.
4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.
5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

- ✓ Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники рівні між собою.

НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Кожна зі сторін трикутника більша за різницю двох інших його сторін.

Розділ 4

КОЛО І КРУГ

У цьому розділі ви:

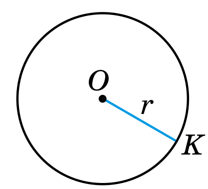
- **пригадаєте** поняття кола, круга та їхніх елементів;
- **ознайомитеся** з поняттями дотичної до кола, серединного перпендикуляра до відрізка, кола, описаного навколо трикутника, і кола, вписаного в трикутник, центрального та вписаного кута; поняттям геометричного місця точок;
- **навчитеся** застосовувати означення та властивості до розв'язування задач.

§ 21. Коло і круг

Коло та його елементи

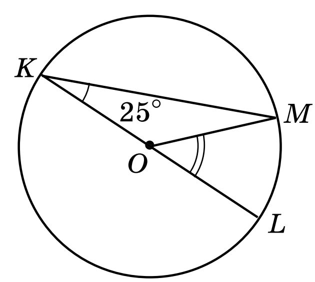
Колом **називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки.**

Цю точку називають *центром* кола. Відрізок, що сполучає центр з будь-якою точкою кола, називають ***радіусом***.



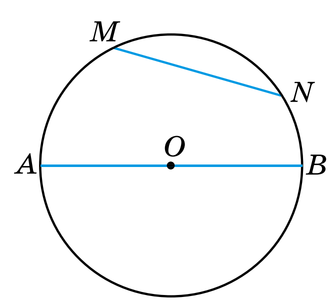
На малюнку зображено коло із центром у точці O і радіусом OK. З означення кола випливає, що всі радіуси одного й того самого кола мають однакову довжину. Радіус кола зазвичай позначають буквою r.

Приклад. Дано: O – центр кола, $\angle LKM = 25°$ (див. мал.).
Знайти: $\angle MOL$.



Розв'язання.
1) Оскільки точка O – центр кола, то $OK = OM$ (як радіуси). Тоді $\triangle KOM$ – рівнобедрений, отже, $\angle M = \angle K = 25°$.
2) $\angle MOL$ – зовнішній для $\triangle KOM$, тому за властивістю зовнішнього кута $\angle MOL = \angle K + \angle M = 2 \cdot 25° = 50°$.
Відповідь: $50°$.

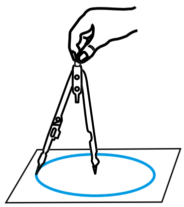
Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають ***хордою***. Хорду, що проходить через центр кола, називають ***діаметром***. На малюнку 21.1 відрізок MN є хордою кола, а відрізок AB – його діаметром. Оскільки $AB = OA + OB$, приходимо до висновку, що довжина діаметра вдвічі більша за довжину радіуса.



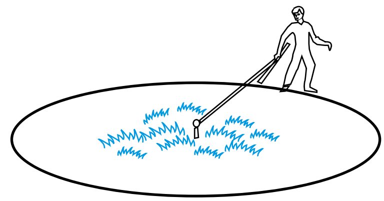
Мал. 21.1

Діаметр кола зазвичай позначають буквою d. Отже, $d = 2r$. Крім того, центр кола є серединою будь-якого діаметра.

Коло на папері зображують за допомогою циркуля (мал. 21.2). На місцевості для побудови кола можна використати мотузку (мал. 21.3).



Мал. 21.2



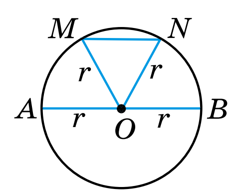
Мал. 21.3

Властивості елементів кола

Розглянемо деякі властивості елементів кола.

Теорема 1 (про порівняння діаметра і хорди).
Діаметр є найбільшою з хорд.

Доведення. Нехай AB – довільний діаметр кола, радіус якого дорівнює r, а MN – відмінна від діаметра хорда кола (див. мал.). Доведемо, що $AB > MN$.



$AB = 2r$. У трикутнику MON, використовуючи нерівність трикутника, маємо $MN < MO + ON$. Отже, $MN < 2r$. Тому $AB > MN$. Теорему доведено. ■

Нехай точка P не належить відрізку AB. Тоді кут APB називають ***кутом, під яким відрізок AB видно з точки P*** (мал. 21.4).

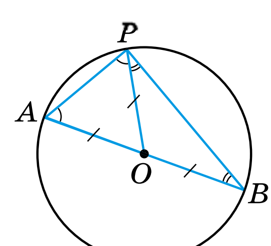
Теорема 2 (про кут, під яким видно діаметр з точки кола).
Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.

Доведення. Нехай AB – діаметр кола, а P – довільна точка кола (мал. 21.4). Доведемо, що $\angle APB = 90°$.

1) У трикутнику AOP $AO = PO$ (як радіуси). Тому $\triangle AOP$ – рівнобедрений і $\angle OAP = \angle OPA$.

2) Аналогічно $\angle OPB = \angle OBP$.

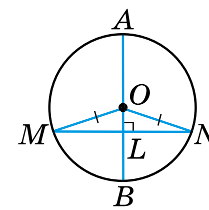
3) Отже, $\angle APB = \angle A + \angle B$. Але ж у $\triangle APB$: $\angle APB + \angle A + \angle B = 180°$. Тому $\angle APB + \angle APB = 180°$; $2\angle APB = 180°$; $\angle APB = 90°$. Теорему доведено. ■



Мал. 21.4

Теорема 3 (властивість діаметра кола, перпендикулярного до хорди).
Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

Доведення. Нехай AB – діаметр кола, MN – відмінна від діаметра хорда кола, $AB \perp MN$ (див. мал.). Доведемо, що $ML = LN$, де L – точка перетину AB і MN.

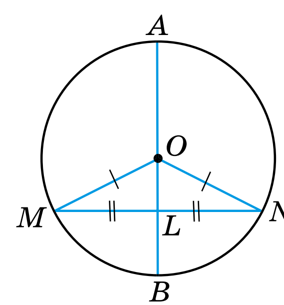


$\triangle MON$ – рівнобедрений, бо $MO = ON$ (як радіуси), OL – його висота, проведена до основи. Тому OL є також і медіаною. Отже, $ML = LN$.

Якщо хорда MN є діаметром кола, то твердження теореми є очевидним. Теорему доведено. ■

Теорема 4 (властивість діаметра кола, що проходить через середину хорди).
Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

Доведення. Нехай діаметр AB проходить через точку L – середину хорди MN, яка не є діаметром кола (див. мал.). Доведемо, що $AB \perp MN$.



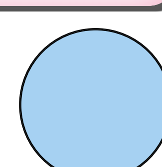
$\triangle MON$ – рівнобедрений, бо $MO = NO$ (як радіуси). OL – медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи. Тому OL є також висотою. Отже, $OL \perp MN$, а тому і $AB \perp MN$. Теорему доведено. ■

Круг та його елементи

Коло разом з його внутрішньою областю називають *кругом*.

На малюнку 21.5 зображено круг.

Центром, радіусом, діаметром, хордою круга називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке є межею цього круга.



Мал. 21.5

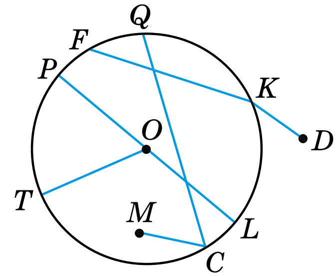
Що називають колом; центром кола; радіусом кола? ○ Який відрізок називають хордою кола, а який – діаметром кола? ○ Що називають кругом? ○ Сформулюйте та доведіть теореми про властивості елементів кола.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

610. (*Усно.*) Точка O – центр кола (мал. 21.6). Які з відрізків на малюнку є:

1) хордами кола;
2) діаметрами кола;
3) радіусами кола?



Мал. 21.6

611. Знайдіть на малюнку 21.6 хорду, що проходить через центр кола. Як називають таку хорду?

612. Обчисліть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:
1) 4 см; 2) 3,7 дм.

613. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:
1) 7 мм; 2) 4,8 см.

614. Знайдіть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:
1) 8 дм; 2) 2,6 см.

615. Обчисліть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:
1) 18 см; 2) 3,8 дм.

2

616. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. Проведіть у ньому діаметр MN та хорду MK. Знайдіть $\angle NKM$.

617. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3,6 см. Проведіть у ньому діаметр AB та хорду BD. Перевірте за допомогою косинця чи транспортира, що $\angle BDA$ – прямий.

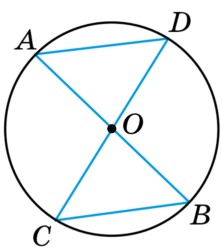
618. Усередині кола взято довільну точку, відмінну від центра. Скільки діаметрів і скільки хорд можна провести через цю точку?

619. На колі взято довільну точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна через неї провести?

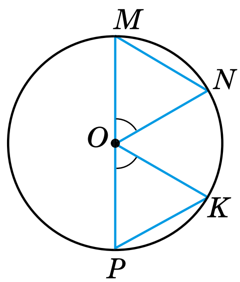
620. Радіус кола дорівнює 5 см. Чи може хорда цього кола дорівнювати:
1) 2 см; 2) 5 см; 3) 7 см;
4) 9,8 см; 5) 10,2 см; 6) 1 дм?

621. Радіус кола дорівнює 4 дм. Чи може хорда цього кола дорівнювати:
1) 1 дм; 2) 4 дм; 3) 6,7 дм;
4) 7,95 дм; 5) 8,3 дм; 6) 1 м?

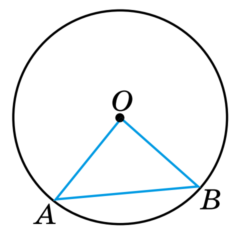
622. У колі проведено діаметри AB і CD (мал. 21.7). Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle BOC$.



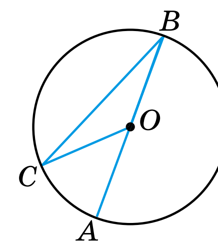
Мал. 21.7



Мал. 21.8



Мал. 21.9



Мал. 21.10

623. У колі із центром O проведено хорди MN і PK та діаметр PM. $\angle POK = \angle MON$ (мал. 21.8). Доведіть, що $\triangle MON = \triangle POK$.

624. На малюнку 21.9 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:
1) кута O, якщо $\angle A = 52°$; 2) кута B, якщо $\angle O = 94°$.

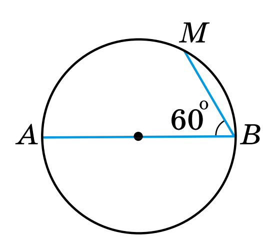
625. На малюнку 21.9 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:
1) кута O, якщо $\angle B = 48°$; 2) кута A, якщо $\angle O = 102°$.

626. На малюнку 21.10 точка O – центр кола, $\angle COA = 32°$. Знайдіть $\angle CBA$.

627. На малюнку 21.10 точка O – центр кола, $\angle BCO = 18°$. Знайдіть $\angle AOC$.

628. Дано коло радіусом 5 см. 1) Проведіть у ньому хорду 6 см завдовжки. Скільки таких хорд можна провести?
2) Точка A належить даному колу. Скільки хорд 6 см завдовжки можна провести з даної точки?

629. У колі на малюнку 21.11 AB – діаметр, $\angle ABM = 60°$, $BM = 5$ см. Знайдіть діаметр кола.



Мал. 21.11

630. У колі на малюнку 21.11 AB – діаметр, $\angle ABM = 60°$, $AB = 18$ см. Знайдіть довжину хорди MB.

631. Доведіть, що коли хорди рівновіддалені від центра кола, то вони між собою рівні.

632. Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.

633. Хорда кола перетинає його діаметр під кутом 30° і ділиться діаметром на відрізки 4 см і 7 см завдовжки. Знайдіть відстань від кінців хорди до прямої, що містить діаметр кола.

Вправи для повторення

634. Побудуйте пряму a, точку M на відстані 3 см від прямої та точку N на відстані 2 см від прямої так, щоб відрізок MN перетинав пряму.

635. Два рівних між собою тупих кути мають спільну сторону, а дві інші сторони взаємно перпендикулярні. Знайдіть градусну міру тупого кута.

636. Доведіть рівність двох гострокутних рівнобедрених трикутників за основою і висотою, проведеною до бічної сторони.

Життєва математика

637. Скільки потрібно робітників для перенесення дубової балки розміром 6,5 м × 30 см × 45 см? Кожен робітник може підняти в середньому 70 кг. Щільність дуба – 810 кг/м^3.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

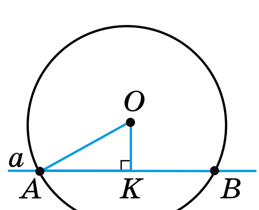
638. У коробці шоколадні цукерки квадратної форми викладено у вигляді квадрата в один шар. Марійка з'їла всі цукерки по периметру квадрата – всього 20 цукерок. Скільки цукерок залишилось у коробці?

§ 22. Дотична до кола, її властивості

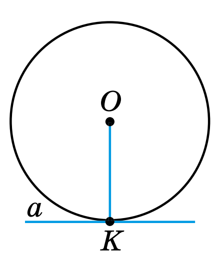
Взаємне розміщення прямої і кола

Розглянемо взаємне розміщення прямої і кола.

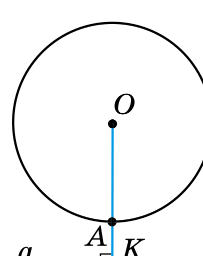
Пряма і коло можуть мати дві спільні точки (мал. 22.1), одну спільну точку (мал. 22.2) або не мати спільних точок (мал. 22.3).



Мал. 22.1



Мал. 22.2



Мал. 22.3

Пряму, яка має дві спільні точки з колом, називають ***січною***. На малюнку 22.1 OK – відстань від центра кола – точки O – до січної. У прямокутному трикутнику OKA сторона OK є катетом, а AO – гіпотенузою. Тому $OK < OA$. Отже, *відстань від центра кола до січної менша від радіуса*.

Дотичною **до кола називають пряму, яка має з колом лише одну спільну точку. Цю точку називають *точкою дотику*.**

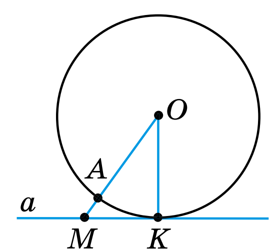
На мал. 22.2 пряма a – дотична до кола, K – точка дотику.

Якщо пряма і коло не мають спільних точок, то відстань OK більша за радіус кола OA (мал. 22.3). *Відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає це коло, більша за радіус.*

Властивість дотичної

Т **Теорема 1 (властивість дотичної).**
Дотична до кола є перпендикулярною до радіуса, який проведений в точку дотику.

Доведення. Нехай пряма a дотична до кола із центром у точці O, точка K – точка дотику (див. мал.). Доведемо, що $a \perp OK$.



Припустимо, що пряма a не є перпендикулярною до OK. Проведемо з точки O перпендикуляр OM до прямої a. Тоді OM – катет прямокутного трикутника KOM. Оскільки у прямої з колом лише одна спільна точка K, то точка M, що належить прямій a, лежить поза колом. Тому довжина відрізка OM більша за довжину відрізка OA, який є радіусом кола. Оскільки $OA = OK$ (як радіуси), то $OM > OK$. Але, за припущенням, OM – катет прямокутного трикутника KOM, а OK – його гіпотенуза. Прийшли до протиріччя зі співвідношенням між катетом і гіпотенузою прямокутного трикутника (див. § 19, властивість 2).

Отже, наше припущення є неправильним, тому $a \perp OK$.

Теорему доведено. ■

Н **Наслідок. Відстань від центра кола до дотичної до цього кола дорівнює радіусу кола.**

Приклад 1. Пряма AK дотикається до кола в точці K (див. мал.). Знайти кут KOL, якщо $\angle AKL = 130°$.

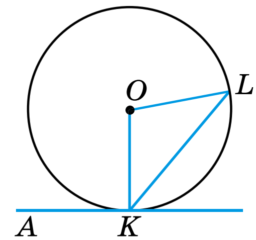
Розв'язання. 1) Оскільки AK – дотична до кола і точка K – точка дотику, то $AK \perp KO$, тобто $\angle AKO = 90°$.

2) $\angle OKL = \angle AKL - \angle AKO = 130° - 90° = 40°$.

3) $OK = OL$ (як радіуси кола), $\triangle OKL$ – рівнобедрений; $\angle L = \angle OKL = 40°$.

4) Тоді $\angle KOL = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$.

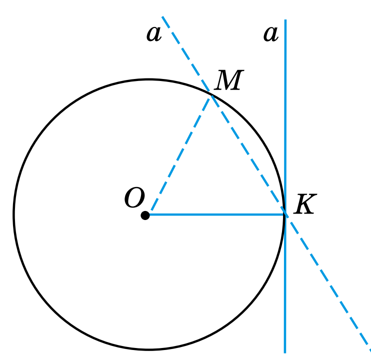
Відповідь: $100°$.



Теорема 2 (обернена до теореми про властивість дотичної). Якщо пряма проходить через кінець радіуса кола і перпендикулярна до цього радіуса, то ця пряма є дотичною до цього кола.

Доведення. Нехай OK – радіус кола із центром у точці O. Пряма a проходить через точку K так, що $a \perp OK$ (див. мал.). Доведемо, що a – дотична до кола.

Припустимо, що пряма a має з колом ще одну спільну точку – точку M. Тоді $OK = OM$ (як радіуси) і $\triangle OMK$ – рівнобедрений. $\angle OMK = \angle OKM = 90°$. Отримали, що в трикутнику OMK є два прямих кути, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

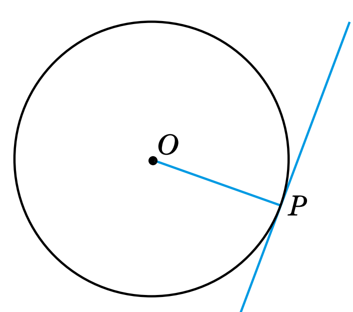


Наше припущення неправильне. Отже, пряма a не має інших спільних точок з колом, окрім точки K. Тому пряма a є дотичною до кола.

Теорему доведено. ■

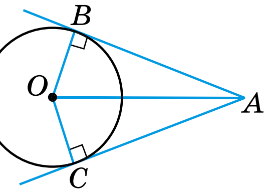
Приклад 2. Через дану точку P кола із центром O провести дотичну до цього кола (див. мал.).

Розв'язання. Проведемо радіус OP, а потім побудуємо пряму m, перпендикулярну до радіуса (наприклад, за допомогою косинця). За теоремою 2 пряма m є дотичною до кола.



Властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки

Розглянемо дві дотичні до кола із центром у точці O, які проходять через точку A і дотикаються до кола в точках B і C (див. мал.). Відрізки AB і AC називають *відрізками дотичних, проведених з точки* A.



Теорема 3 (властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки). Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.

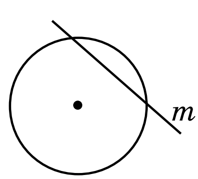
Доведення. На малюнку трикутники OBA і OCA – прямокутні, $OB = OC$ (як радіуси), OA – спільна сторона цих трикутників. $\triangle OBA = \triangle OCA$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $AB = AC$. Теорему доведено. ■

Яким може бути взаємне розміщення кола і прямої? ○ Яку пряму називають січною до кола? ○ Що більше: відстань від центра кола до січної чи радіус кола? ○ Що більше: відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає коло, чи радіус? ○ Яку пряму називають дотичною до кола? ○ Сформулюйте та доведіть властивість дотичної. ○ Сформулюйте та доведіть властивість, обернену до теореми про властивість дотичної. ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки.

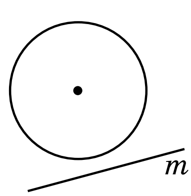
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

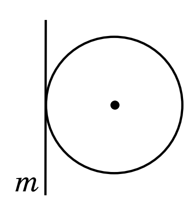
639. (*Усно.*) На якому з малюнків 22.4–22.6 пряма m є дотичною до кола, а на якому – січною?



Мал. 22.4



Мал. 22.5



Мал. 22.6

640. (*Усно.*) Скільки різних дотичних можна провести до кола через точку, що лежить:

1) на колі; 2) поза колом; 3) усередині кола?

2

641. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3 см, позначте на ньому точку P. За допомогою косинця проведіть через точку P дотичну до цього кола.

642. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3,5 см, позначте на ньому точку M. За допомогою косинця або транспортира проведіть дотичну через точку M до цього кола.

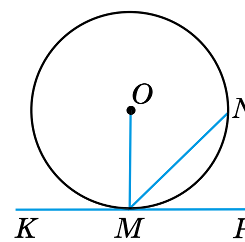
643. Радіус кола дорівнює 6 см. Як розміщені пряма a і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:

1) 4 см; 2) 6 см; 3) 8 см?

644. Радіус кола дорівнює 3 дм. Як розміщені пряма b і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:

1) 3,7 дм; 2) 3 дм; 3) 2,7 дм?

645. На мал. 22.7 KP – дотична до кола, точка O – центр кола. Знайдіть:
1) $\angle OMN$, якщо $\angle NMP = 40°$;
2) $\angle KMN$, якщо $\angle OMN = 48°$.



Мал. 22.7

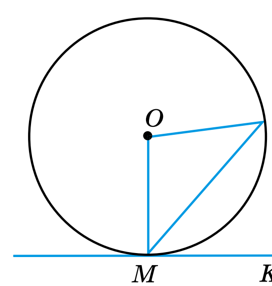
646. На мал. 22.7 KP – дотична до кола, точка O – центр кола. Знайдіть:
1) $\angle NMP$, якщо $\angle OMN = 53°$;
2) $\angle OMN$, якщо $\angle KMN = 130°$.

3

647. З точки A до кола із центром у точці O проведено дві дотичні AB і AC (B і C – точки дотику). Доведіть, що промінь OA – бісектриса кута BOC.

648. З точки P до кола із центром у точці Q проведено дотичні PM і PN. Доведіть, що промінь PQ – бісектриса кута MPN.

649. Пряма MK – дотична до кола, точка O – центр кола (мал. 22.8). Знайдіть $\angle NMK$, якщо $\angle MON = 82°$.



Мал. 22.8

650. Пряма MK – дотична до кола, точка O – центр кола (мал. 22.8). Знайдіть $\angle NOM$, якщо $\angle KMN = 53°$.

4

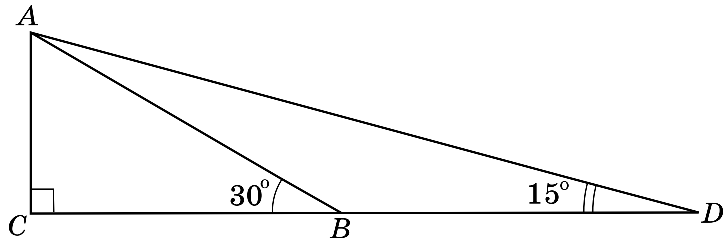
651. З точки M, що лежить поза колом, проведено дві дотичні. Відстань від точки M до центра кола вдвічі більша за радіус кола. Знайдіть кут між дотичними.

652. Прямі MN і MK дотикаються до кола із центром O в точках N і K. Знайдіть NK, якщо $\angle OMN = 30°$, $MN = 7$ см.

Вправи для повторення

653. Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

654. На малюнку 22.9: $\angle C = 90°$, $\angle ABC = 30°$, $\angle ADB = 15°$, $AC = 6$ см. Знайдіть BD.



Мал. 22.9

Життєва математика

655. Для того щоб визначити відстань від спостерігача B до недоступного дерева A, що росте на другому березі, було виконано побудови (див. мал.). Як тепер можна знайти відстань BA?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

656. Поставте п'ять шашок на шахову дошку (розмір якої 8×8) так, щоб будь-який квадрат, що складається з дев'яти клітинок, містив тільки одну шашку.

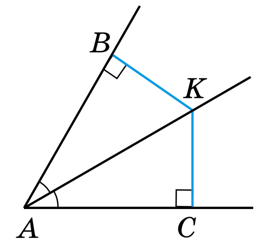
§ 23. Коло, вписане в трикутник

Властивість бісектриси кута

Розглянемо важливу властивість бісектриси кута.

Теорема 1 (властивість бісектриси кута).
Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.

Доведення. Виберемо на бісектрисі кута A довільну точку K і проведемо з точки K перпендикуляри KB і KC до сторін кута (див. мал.). Тоді KB і KC – відстані від точки K до сторін кута A. Доведемо, що $KB = KC$.



Розглянемо $\triangle AKB$ і $\triangle AKC$ ($\angle B = \angle C = 90°$). AK – їхня спільна гіпотенуза, $\angle BAK = \angle CAK$ (бо AK – бісектриса).

Отже, $\triangle AKB = \triangle AKC$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $KB = KC$.

Теорему доведено. ■

Коло, вписане у трикутник, та його існування

Коло **називають** ***вписаним у трикутник*****, якщо воно дотикається до всіх сторін цього трикутника.**

При цьому трикутник називають *описаним навколо кола*.

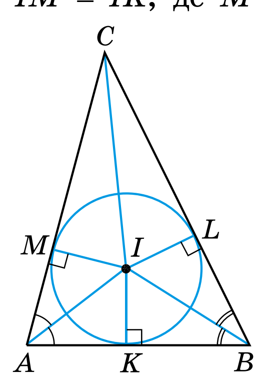
Т **Теорема 2 (про коло, вписане в трикутник).**
У будь-який трикутник можна вписати коло.

Доведення. Розглянемо довільний $\triangle ABC$. Нехай бісектриси кутів A і B цього трикутника перетинаються в точці I (мал. 23.1). Доведемо, що ця точка є центром вписаного в трикутник кола.

1) Оскільки точка I лежить на бісектрисі кута A, то вона рівновіддалена від сторін AB і AC трикутника, тобто $IM = IK$, де M і K – основи перпендикулярів, проведених з точки I до сторін AC і AB відповідно.

2) Аналогічно $IK = IL$, де L – основа перпендикуляра, проведеного з точки I до сторони BC.

3) Отже, $IM = IK = IL$. Тому коло із центром у точці I, радіус якого IM, проходить через точки M, K і L. Сторони трикутника ABC дотикаються до цього кола в точках M, K і L, оскільки перпендикулярні до радіусів IM, IK і IL.



Мал. 23.1

4) Тому коло із центром у точці I, радіус якого IM, є вписаним у $\triangle ABC$.

Теорему доведено. ■

Наслідок 1. Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення. За доведенням попередньої теореми точка I – точка перетину бісектрис кутів A і B трикутника ABC. Доведемо, що бісектриса кута C також проходить через точку I.

Розглянемо прямокутні трикутники CMI і CLI (мал. 23.1).

Оскільки $IM = IL$, а CI – спільна гіпотенуза цих трикутників, то $\triangle CMI = \triangle CLI$ (за катетом і гіпотенузою). Тоді $\angle MCI = \angle LCI$ (як відповідні кути рівних трикутників), а CI – бісектриса кута C трикутника ABC.

Отже, бісектриси всіх трьох кутів трикутника ABC проходять через точку I, тобто всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

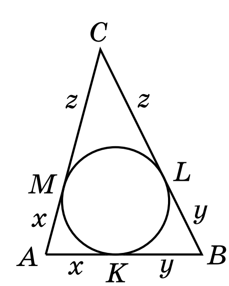
Наслідок доведено. ■

Нагадаємо, що точку перетину бісектрис трикутника називають *інцентром*.

Наслідок 2. Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника.

Приклад. Коло, вписане у $\triangle ABC$, дотикається до сторони AB у точці K, до сторони BC – у точці L, а до сторони CA – у точці M. Довести, що:
$AK = AM = p - BC$, $BK = BL = p - AC$, $CM = CL = p - AB$,
де $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2}$ – півпериметр трикутника ABC.

Доведення. 1) За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки, маємо: $AM = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ (див. мал.).



2) Позначимо $AM = AK = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$. Тоді $P_{ABC} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$. Тому $p = x + y + z$, звідки $x = p - (y + z)$; тобто $x = p - BC$.

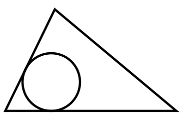
3) Маємо: $AM = AK = p - BC$.

Аналогічно доводиться, що $BK = BL = p - AC$, $CM = CL = p - AB$. ■

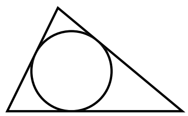
Сформулюйте та доведіть властивість бісектриси кута. ○ Яке коло називають вписаним у трикутник? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про коло, вписане в трикутник, та наслідок 1 з неї. ○ Сформулюйте наслідок 2.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

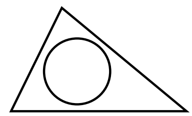
657. (*Усно.*) На яких з малюнків 23.2–23.5 зображено коло, вписане у трикутник?



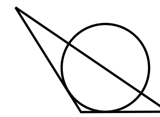
Мал. 23.2



Мал. 23.3



Мал. 23.4



Мал. 23.5

658. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля і лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

659. Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля і лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

660. У $\triangle ABC$ вписано коло із центром у точці I (мал. 23.1). Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle IBK = 35°$, $\angle MCI = 25°$.

661. У $\triangle ABC$ вписано коло із центром у точці I (мал. 23.1). $\angle CAB = 70°$, $\angle CBA = 60°$. Знайдіть $\angle MCI$.

662. На малюнку 23.1 точка I – центр кола, вписаного в різносторонній трикутник ABC, M, K і L – точки дотику. Знайдіть усі пари рівних між собою трикутників на цьому малюнку.

663. Доведіть, що центр кола, яке дотикається до сторін кута, лежить на бісектрисі цього кута.

664. Накресліть кут градусної міри 110°. За допомогою циркуля, косинця і транспортира впишіть у нього коло довільного радіуса, тобто побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута.

665. Накресліть кут градусної міри 70°. За допомогою циркуля, косинця і транспортира впишіть у нього коло довільного радіуса.

666. У трикутнику центр вписаного кола лежить на медіані. Доведіть, що це рівнобедрений трикутник.

667. У трикутнику центр вписаного кола лежить на висоті. Доведіть, що цей трикутник є рівнобедреним.

668. У $\triangle ABC$ вписано коло, яке дотикається до сторін AB, AC і BC у точках P, F і M відповідно. Знайдіть AP, PB, BM, MC, CF і FA, якщо $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $AC = 12$ см.

669. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо точки дотику кола, вписаного в цей трикутник, ділять його сторони на відрізки, три з яких дорівнюють 4 см, 6 см і 8 см.

670. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 3 см і 4 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника.

671. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 7 см, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр трикутника.

Вправи для повторення

672. Доведіть, що висоти, проведені до бічних сторін гострокутного рівнобедреного трикутника, між собою рівні.

673. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3. Знайдіть кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини прямого кута.

Життєва математика

674. Яка швидкість поїзда (у км/год), якщо діаметр його колеса дорівнює 120 см і воно робить 360 обертів за хвилину? (Прийміть $\pi \approx 3$.)

Цікаві задачі – поміркуй одначе

675. Квадрат розрізали на вісім квадратів. Чи обов'язково п'ять з них рівні між собою?

§ 24. Коло, описане навколо трикутника

Серединний перпендикуляр та його властивість

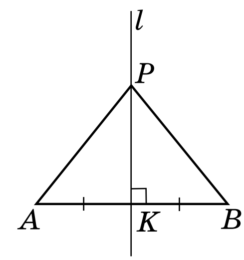
Серединним перпендикуляром до відрізка **називають пряму, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього.**

На малюнку 24.1 пряма l – серединний перпендикуляр до відрізка AB.

Теорема 1 (властивість серединного перпендикуляра до відрізка). **Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.**

Доведення. Нехай пряма l – серединний перпендикуляр до відрізка AB, K – середина цього відрізка (мал. 24.1). Розглянемо довільну точку P серединного перпендикуляра і доведемо, що $PA = PB$.

Якщо точка P збігається з K, то рівність $PA = PB$ очевидна. Якщо точка P відмінна від K, то прямокутні трикутники PKA і PKB рівні між собою за двома катетами. Тому $PA = PB$. Теорему доведено. ■



Мал. 24.1

Коло, описане навколо трикутника, та його існування

Коло **називають** ***описаним навколо трикутника*****, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника.**

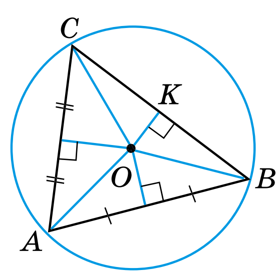
При цьому трикутник називають *вписаним у коло*.

Теорема 2 (про коло, описане навколо трикутника). **Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.**

Доведення. Розглянемо $\triangle ABC$. Нехай серединні перпендикуляри до сторін AB і AC цього трикутника перетинаються в точці O (мал. 24.2). Доведемо, що точка O є центром описаного навколо трикутника кола.

1) Точка O лежить на серединному перпендикулярі до AB, тому вона рівновіддалена від вершин A і B, тобто $OA = OB$.

2) Аналогічно $OA = OC$, оскільки точка O лежить на серединному перпендикулярі до AC.



Мал. 24.2

3) Маємо: $OA = OB = OC$. Тому коло із центром у точці O проходить через вершини A, B і C трикутника ABC, а відрізки OA, OB і OC є його радіусами. Отже, це коло є описаним навколо трикутника ABC.

Теорему доведено. ■

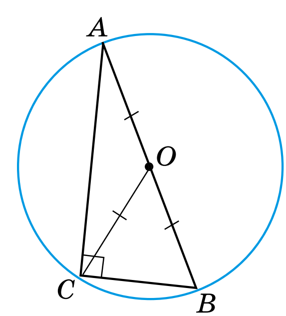
Наслідок 1. Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення. Проведемо з точки O перпендикуляр OK до сторони BC (мал. 24.2). Цей перпендикуляр є висотою рівнобедреного трикутника OBC, що проведена до основи BC. Тому він також є і медіаною. Відрізок OK лежить на серединному перпендикулярі до сторони BC. Отже, усі три серединні перпендикуляри трикутника ABC проходять через точку O, тобто перетинаються в одній точці.

Наслідок доведено. ■

Наслідок 2. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

Приклад. Довести, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, а радіус цього кола дорівнює половині гіпотенузи.



Доведення. Нехай $\triangle ABC$ – прямокутний ($\angle C = 90°$), CO – його медіана (див. мал.).

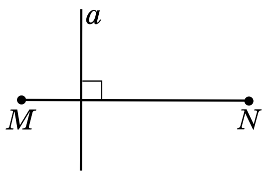
1) Оскільки медіана прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи (див. § 19, властивість 5), то $CO = \dfrac{AB}{2}$. Але $AO = OB$. Тому $AO = BO = CO$.

2) Отже, точка O рівновіддалена від вершин трикутника ABC. Тому коло, центром якого є точка O, а радіусом – OA, проходить через усі вершини трикутника ABC. Отже, коло, центром якого є середина гіпотенузи, а радіус дорівнює половині гіпотенузи, є описаним навколо прямокутного трикутника ABC. ■

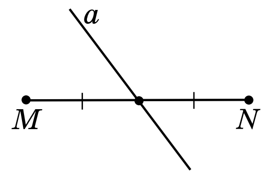
Що називають серединним перпендикуляром до відрізка? ○ Сформулюйте та доведіть властивість серединного перпендикуляра до відрізка. ○ Яке коло називають описаним навколо трикутника? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про коло, описане навколо трикутника, та наслідок 1 з неї. ○ Яка саме точка є центром кола, описаного навколо трикутника?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

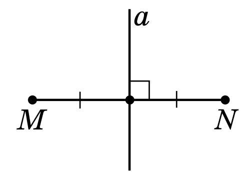
676. (*Усно.*) На яких з малюнків 24.3–24.5 пряма a є серединним перпендикуляром до відрізка MN?



Мал. 24.3

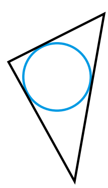


Мал. 24.4

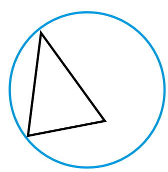


Мал. 24.5

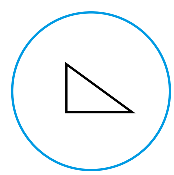
677. На якому з малюнків 24.6–24.9 зображено коло, описане навколо трикутника?



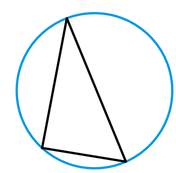
Мал. 24.6



Мал. 24.7



Мал. 24.8



Мал. 24.9

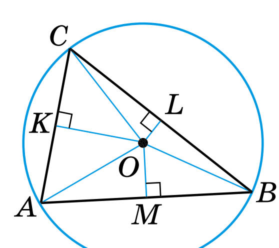
678. 1) Накресліть відрізок MN, довжина якого 5,4 см. За допомогою лінійки з поділками і косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка MN.

2) Позначте деяку точку P, що належить серединному перпендикуляру, і переконайтеся, що $PM = PN$.

679. 1) Накресліть відрізок AB завдовжки 4,6 см. За допомогою лінійки з поділками і косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка AB.

2) Позначте деяку точку C, що належить серединному перпендикуляру, і переконайтеся, що $CA = CB$.

680. На малюнку 24.10 точка O – центр кола, описаного навколо різностороннього трикутника ABC. Знайдіть усі пари рівних між собою трикутників на цьому малюнку.



Мал. 24.10

681. Скільки кіл можна провести через:

1) одну точку;

2) дві точки;

3) три точки, що не лежать на одній прямій?

682. 1) Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.
2) Де лежатиме центр цього кола (поза трикутником, усередині трикутника, на одній з його сторін)?

683. Накресліть трикутник, два кути якого дорівнюють 60° і 70°. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

684. 1) Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.
2) Де лежатиме центр цього кола (поза трикутником, усередині трикутника, на одній з його сторін)?

685. Накресліть рівнобедрений трикутник з кутом 120° при вершині. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

686. У трикутнику центр описаного кола лежить на медіані. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

687. У трикутнику центр описаного кола лежить на висоті. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

688. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, удвічі більший за радіус кола, вписаного в нього.

Вправи для повторення

689. LM – діаметр кола, хорди KL і KM – рівні між собою. Знайдіть кути трикутника KLM.

690. I – точка перетину бісектрис AM і BN рівнобедреного трикутника ABC з основою AB. Доведіть, що $IN = IM$.

Життєва математика

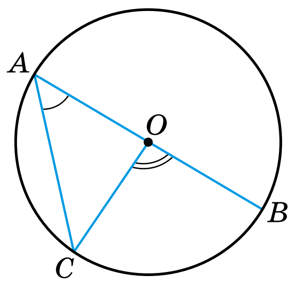
691. Площа земельної ділянки, що має форму прямокутника, дорівнює 9 га, ширина ділянки дорівнює 150 м. Знайдіть довжину огорожі навколо цієї ділянки.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

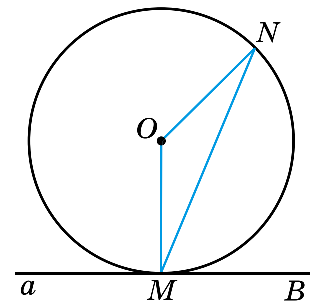
692. Накресліть коло, радіус якого 3 см. Проведіть у цьому колі діаметр і хорду.

693. Точка O – центр кола (мал. 24.11). Знайдіть:

1) $\angle COB$, якщо $\angle CAO = 50°$;
2) $\angle CAO$, якщо $\angle COB = 110°$.



Мал. 24.11



Мал. 24.12

694. Точка O – центр кола, а точка M – точка дотику прямої a з колом (мал. 24.12). Знайдіть:

1) $\angle NMB$, якщо $\angle MON = 140°$;
2) $\angle MON$, якщо $\angle BMN = 65°$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

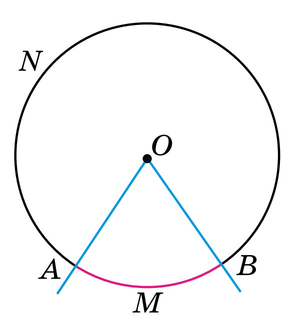
695. Відрізок 32 см завдовжки поділено двома точками на три не рівних між собою відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 20 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.

§ 25. Центральні та вписані кути

Центральний кут. Градусна міра дуги

Центральним кутом **називають кут з вершиною в центрі кола.**

На малюнку 25.1 $\angle AOB$ – центральний кут, сторони якого перетинають коло в точках A і B. Точки A і B розбивають коло на дві дуги. Частину кола, яка лежить усередині кута, називають *дугою кола*, що відповідає цьому центральному куту.



Мал. 25.1

Якщо центральний кут менший від розгорнутого,	Якщо центральний кут більший за розгорнутий,	Розгорнутому куту
то дуга, що йому відповідає, є меншою за півколо (її виділено кольором на мал. 25.1).	то дуга, що йому відповідає, є більшою за півколо.	відповідає дуга, що є *півколом*.

Дугу позначають символом $\smile$, який записують перед назвою дуги або над нею. Щоб уточнити, про яку саме з двох дуг, на які центральний кут поділив коло, ідеться, на кожній з них позначають довільну точку, відмінну від кінців дуги. Наприклад, M і N (мал. 25.1). Тоді ці дуги можна записати так:

$$\smile AMB \text{ (або } \overset{\frown}{AMB}\text{) та } \smile ANB \text{ (або } \overset{\frown}{ANB}\text{).}$$

Якщо зрозуміло, про яку саме дугу йдеться, то для її позначення вказують лише кінці дуги, наприклад $\overset{\frown}{AB}$ (або $\smile AB$).

Дугу кола можна вимірювати в градусах.

Градусною мірою дуги кола **називають градусну міру відповідного центрального кута.**

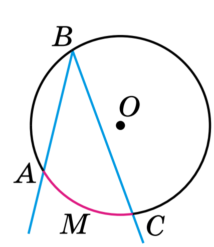
Наприклад, якщо $\angle AOB = 70°$, то $\overset{\frown}{AMB} = 70°$ (мал. 25.1).

Очевидно, що градусна міра дуги, яка є півколом, дорівнює 180°, а дуги, що є колом, – 360°. На малюнку 25.1:

$$\overset{\frown}{ANB} = 360° - 70° = 290°.$$

Вписаний кут

Вписаним кутом **називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло.**



Мал. 25.2

На малюнку 25.2 сторони вписаного кута ABC перетинають коло в точках A і C. Кажуть, що цей кут *спирається на дугу AMC*.

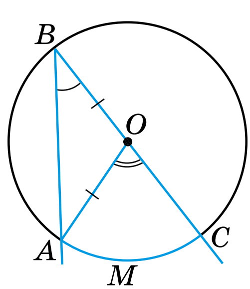
Точки перетину сторін вписаного кута з колом ділять коло на дві дуги. З них тією, на яку спирається вписаний кут, буде дуга, що не містить його вершини. Наприклад, на малюнку 25.2 сторони вписаного кута ABC поділили коло на дві дуги: $\overset{\frown}{ABC}$ і $\overset{\frown}{AMC}$. Оскільки $\overset{\frown}{AMC}$ не містить вершини кута (точки B), то вона і є дугою, на яку спирається вписаний кут ABC. Цю дугу виділено кольором.

Теорема про вписаний кут та наслідки з неї

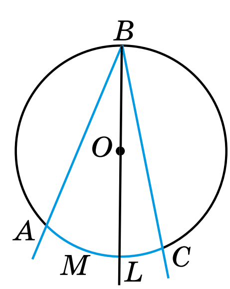
Т Теорема (про вписаний кут). **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.**

Доведення. Нехай $\angle ABC$ є вписаним у коло із центром O та спирається на дугу AC (мал. 25.2). Доведемо, що $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup \overset{\frown}{AMC}$. Розглянемо три можливих випадки розташування центра кола відносно даного вписаного кута.

1) Нехай центр кола – точка O – лежить на одній зі сторін кута, наприклад BC (мал. 25.3). Центральний кут AOC є зовнішнім кутом трикутника AOB. Тоді, за властивістю зовнішнього кута, $\angle AOC = \angle ABO + \angle OAB$. Але $\triangle AOB$ – рівнобедрений ($AO = OB$ як радіуси), тому $\angle ABO = \angle OAB$. Отже, $\angle AOC = 2\angle ABO$, тобто $\angle ABC = \angle ABO = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. Але ж $\angle AOC = \overset{\frown}{AMC}$. Отже, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup \overset{\frown}{AOC}$.



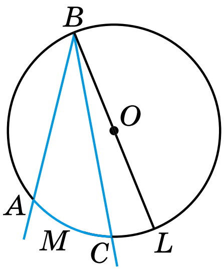
Мал. 25.3



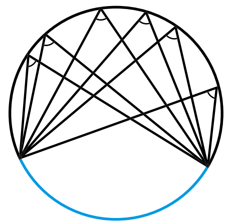
Мал. 25.4

2) Нехай центр кола лежить усередині вписаного кута (мал. 25.4). Проведемо промінь BO, що перетинає коло в точці L. Тоді $\angle ABC = \angle ABL + \angle LBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AL} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{LC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AL} + \overset{\frown}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$.

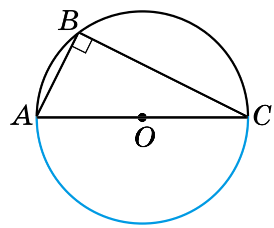
3) Нехай центр кола лежить зовні вписаного кута (мал. 25.5). Тоді $\angle ABC = \angle ABL - \angle CBL = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AL} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{LC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AL} - \overset{\frown}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. ■



Мал. 25.5



Мал. 25.6

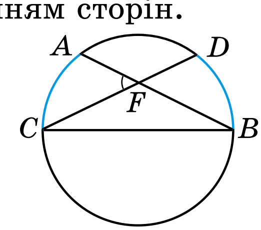


Мал. 25.7

Наслідок 1. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, між собою рівні (мал. 25.6).

Наслідок 2. Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий (мал. 25.7).

Приклад 1. Довести, що кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою двох дуг, з яких одна міститься між сторонами кута, а друга – між продовженням сторін.

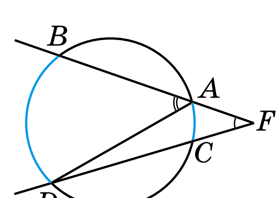


Доведення. Розглянемо $\angle AFC$, вершина якого міститься всередині кола (див. мал.). Доведемо, що $\angle AFC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$.

$\angle AFC$ – зовнішній для трикутника BCF.

Маємо: $\angle AFC = \angle FBC + \angle FCB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$. ■

Приклад 2. Довести, що кут між двома січними, які перетинаються зовні кола, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами.



Доведення. Розглянемо $\angle BFD$, вершина якого лежить зовні кола, а FB і FD – січні кола (див. мал.). Доведемо, що $\angle DFB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$.

1) $\angle BAD$ – зовнішній кут трикутника ADF.

Маємо: $\angle DAB = \angle ADC + \angle DFB$; тобто $\frac{1}{2}\overset{\smile}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} + \angle DFB$.

2) Тому $\angle DFB = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BD} - \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BD} - \overset{\smile}{AC})$. ■

А ще раніше...

Доведення теореми про вписаний кут зустрічається ще в «Началах» Евкліда. Але ще раніше цей факт, як припущення, уперше висловив Гіппократ Хіоський (V ст. до н. е.).

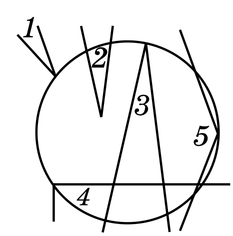
Те, що вписаний кут, який спирається на діаметр, є прямим, знали вавилоняни 4000 років тому, а перше доведення цього факту приписують Фалесу Мілетському.

Який кут називають центральним? ○ Що називають градусною мірою дуги кола? ○ Який кут називають вписаним? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про вписаний кут.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

696. (*Усно.*) Які з кутів на малюнку 25.8 є вписаними в коло?



Мал. 25.8

697. Визначте градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:

1) $70°$; 2) $190°$.

698. Визначте градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює:

1) $20°$; 2) $100°$.

699. Точки A і B належать колу й лежать по один бік від хорди CD. Знайдіть $\angle CAD$, якщо $\angle CBD = 55°$.

2

700. Точки A і B належать колу й лежать по різні боки від хорди MN. Доведіть, що $\angle MAN + \angle MBN = 180°$.

701. Точки M і N належать колу й лежать по різні боки від хорди AB. Знайдіть $\angle AMB$, якщо $\angle ANB = 70°$.

702. Точка P кола і його центр O лежать по різні боки від хорди CD. Знайдіть $\angle COD$, якщо $\angle CPD = 126°$.

703. Точка A кола і його центр O лежать по різні боки від хорди LK. Знайдіть $\angle LAK$, якщо $\angle LOK = 128°$.

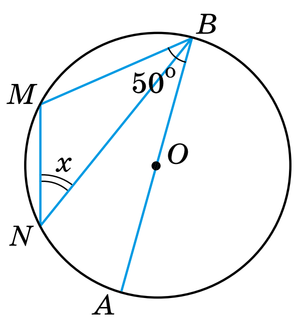
704. Хорда розбиває коло на дві дуги у відношенні 1 : 2. Знайдіть міри вписаних кутів, що спираються на ці дуги.

3 **705.** Хорда AB дорівнює радіусу кола. Точка C кола і його центр лежать по один бік від хорди AB. Знайдіть $\angle ACB$.

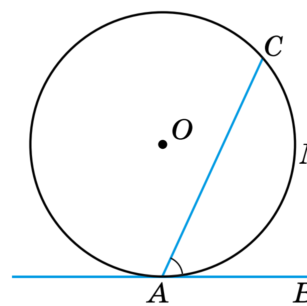
706. Хорди AD і BC перетинаються в точці F. $\angle ABC = 20°$, $\angle BCD = 80°$. Знайдіть градусну міру кута AFB.

707. Хорди AB і CD перетинаються в точці M. $\angle ABC = 35°$, $\angle BAD = 55°$. Доведіть, що хорди AB і CD взаємно перпендикулярні.

4 **708.** O – центр кола, $\angle MBA = 50°$ (мал. 25.9). Знайдіть x.



Мал. 25.9



Мал. 25.10

709. Доведіть, що кут між дотичною і хордою, що виходить з точки дотику, дорівнює половині дуги, яка лежить між сторонами кута, тобто $\angle CAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CNA}$ (мал. 25.10).

710. Рівнобедрений трикутник ABC вписано в коло із центром у точці O, $\angle AOB = 80°$. Знайдіть кути трикутника ABC. Скільки розв'язків має задача?

711. Рівнобедрений трикутник MNK вписано в коло із центром у точці O, $\angle MOK = 100°$. Знайдіть кути трикутника MNK. Скільки розв'язків має задача?

712. Коло поділено трьома точками на частини, які відносяться як 1 : 2 : 6, і точки поділу сполучено між собою. Знайдіть кути утвореного трикутника.

Вправи для повторення

713. Дано кут 30°. Коло радіусом 5 см дотикається до сторони кута і має центр на його іншій стороні. Обчисліть відстань від центра кола до вершини кута.

714. Випишіть у порядку зростання внутрішні кути трикутника ABC, якщо $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AC = 6$ см.

Життєва математика

715. Щоб витягти з колодязя відро води, потрібно зробити 12 обертів вала. Знайдіть глибину колодязя, якщо діаметр вала дорівнює 32 см. Для спрощення обчислень вважайте, що $\pi \approx 3$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

716. Накресліть відрізок MN завдовжки 6 см.

1) Узявши точки M і N за центри, проведіть два кола, одне з яких (із центром у точці M) радіусом 4 см, а друге (із центром у точці N) радіусом 2 см.

2) Скільки спільних точок мають ці кола?

717. Накресліть відрізок AB завдовжки 5 см.

1) Узявши точки A і B за центри, проведіть два кола, одне з яких (із центром у точці A) радіусом 3 см, а друге (із центром у точці B) радіусом 4 см.

2) Скільки спільних точок мають ці кола?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

718. У кожній клітинці прямокутної дошки розміром 2025×2027 клітинок сидить жук. За сигналом усі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі або вертикалі) клітинки. Чи обов'язково при цьому залишиться вільна клітинка?

§ 26. Взаємне розміщення двох кіл

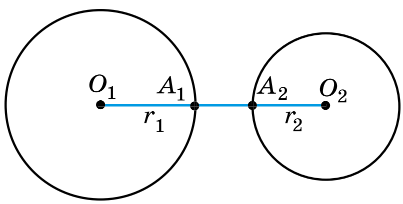
Розглянемо взаємне розміщення двох кіл із центрами в точках O_1 і O_2 і радіусами r_1 і r_2 відповідно.

Кола, які не перетинаються

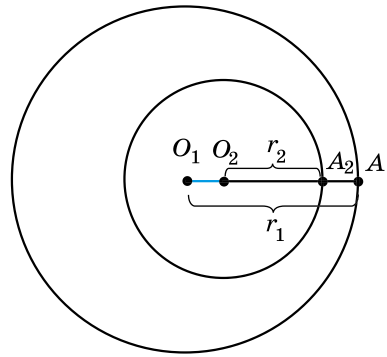
Два кола можуть не перетинатися, тобто не мати спільних точок (мал. 26.1 і 26.2). Можливі два випадки їх розміщення:

1. На малюнку 26.1 відстань між центрами кіл більша за суму радіусів:

$O_1O_2 = O_1A_1 + A_1A_2 + A_2O_2 = r_1 + A_1A_2 + r_2 > r_1 + r_2$. Отже, $O_1O_2 > r_1 + r_2$.



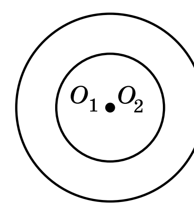
Мал. 26.1



Мал. 26.2

2. На мал. 26.2 $O_1A_1 = O_1O_2 + O_2A_2 + A_2A_1$; $r_1 = O_1O_2 + r_2 + A_2A_1$. Тому $O_1O_2 = (r_1 - r_2) - A_2A_1 < r_1 - r_2$. Отже, $O_1O_2 < r_1 - r_2$, де $r_1 > r_2$, тобто відстань між центрами кіл менша від різниці радіусів.

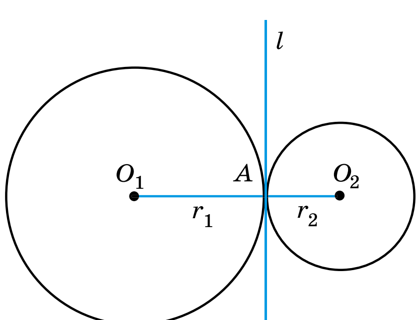
Два кола називають ***концентричними***, якщо вони мають спільний центр (див. мал.). У цьому випадку $O_1O_2 = 0$.



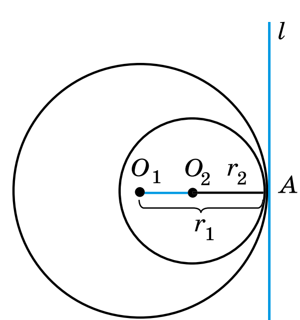
Очевидно, що концентричними може бути будь-яка кількість кіл.

Дотик двох кіл

Два кола можуть мати одну спільну точку (мал. 26.3 і 26.4). У такому разі кажуть, що кола *дотикаються*, а спільну точку називають *точкою дотику кіл*. Можливі два випадки такого розміщення.



Мал. 26.3



Мал. 26.4

1. Кола мають зовнішній дотик. Дотик двох кіл називають *зовнішнім*, якщо центри кіл лежать по різні боки від точки дотику (мал. 26.3). У цьому разі:

1) $O_1O_2 = O_1A + AO_2 = r_1 + r_2$ (відстань між центрами кіл дорівнює сумі їхніх радіусів);
2) у точці A існує спільна дотична l до двох кіл;
3) $l \perp O_1O_2$.

2. Кола мають внутрішній дотик. Дотик двох кіл називають *внутрішнім*, якщо центри кіл лежать по один бік від точки дотику (мал. 26.4). У цьому разі:

1) $O_1O_2 = O_1A - O_2A = r_1 - r_2$, де $r_1 > r_2$ (відстань між центрами кіл дорівнює різниці їхніх радіусів);
2) у точці A існує спільна дотична l до двох кіл;
3) $l \perp O_1O_2$.

Приклад 1. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами 10 см. Визначити радіуси кіл, якщо один із радіусів на 2 см більший за інший.

Розв'язання. Нехай кола із центрами в точках O_1 і O_2 дотикаються в точці A (мал. 26.3).

1) За умовою, $O_1O_2 = 10$ см. Позначимо $AO_2 = x$ см, тоді $AO_1 = (x + 2)$ см.

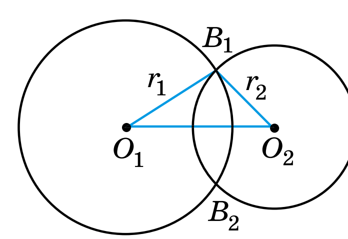
2) Оскільки $O_1O_2 = AO_1 + AO_2$, то маємо рівняння $x + (x + 2) = 10$, звідки $x = 4$ (см).

3) Отже, $AO_2 = 4$ см; $AO_1 = 4 + 2 = 6$ (см).

Відповідь: 6 см; 4 см.

Перетин двох кіл

Два кола можуть мати дві спільні точки (див. мал.), тобто кола *перетинаються*. У цьому разі відстань між центрами кіл менша від суми їх радіусів, але більша за різницю їх радіусів. Дійсно, за нерівністю трикутника і наслідком з неї для трикутника $O_1B_1O_2$ маємо:
$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, де $r_1 \geqslant r_2$.



Встановлення взаємного розміщення двох кіл

Приклад 2. Відстань між центрами двох кіл $O_1O_2 = 10$ см. Визначити взаємне розміщення цих кіл, якщо:

1) $r_1 = 6$ см, $r_2 = 4$ см; 2) $r_1 = 8$ см, $r_2 = 4$ см;
3) $r_1 = 5$ см, $r_2 = 3$ см.

Розв'язання. 1) Оскільки $10 = 6 + 4$, тобто $O_1O_2 = r_1 + r_2$, то кола дотикаються (зовнішній дотик кіл);
2) оскільки $8 - 4 < 10 < 8 + 4$, тобто $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, то кола перетинаються;
3) оскільки $10 > 5 + 3$, тобто $O_1O_2 > r_1 + r_2$, то кола не перетинаються.

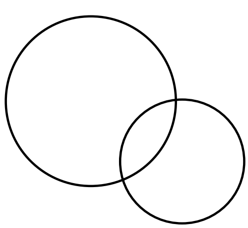
Відповідь: 1) дотикаються; 2) перетинаються; 3) не перетинаються.

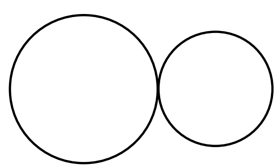
Що означає: два кола не перетинаються? Що означає: кола дотикаються? Який дотик кіл називають зовнішнім, а який – внутрішнім? Що означає: два кола перетинаються?

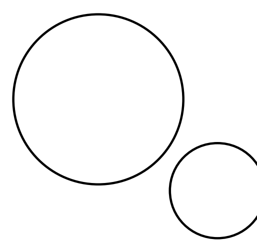
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

719. Що можна сказати про взаємне розміщення кіл на малюнках 26.5–26.7?


Мал. 26.5


Мал. 26.6


Мал. 26.7

720. Накресліть два кола, радіуси яких дорівнюють 3 см і 2 см, так, щоб вони:
1) мали внутрішній дотик; 2) перетиналися;
3) були концентричними.

721. Накресліть два кола, радіуси яких дорівнюють 2 см і 1,5 см, так, щоб вони:
1) мали зовнішній дотик;
2) не перетиналися.

2

722. Накресліть відрізок 4 см завдовжки. Побудуйте два кола, що мають зовнішній дотик, центрами яких є кінці цього відрізка.

723. Накресліть відрізок 2 см завдовжки. Побудуйте два кола, що мають внутрішній дотик, центрами яких є кінці цього відрізка.

724. Радіуси двох кіл дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть відстань між їхніми центрами, якщо кола мають:
1) внутрішній дотик; 2) зовнішній дотик.

725. Радіуси двох кіл дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть відстань між їхніми центрами, якщо кола мають:
1) зовнішній дотик;
2) внутрішній дотик.

3 **726.** Два кола мають внутрішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 12 дм. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться як 2 : 5.

727. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 15 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться як 2 : 3.

728. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 12 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їхні радіуси дорівнюють:
1) 9 см і 3 см; 2) 5 см і 2 см;
3) 13 см і 1 см; 4) 9 см і 7 см.

729. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 14 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їхні радіуси дорівнюють:
1) 7 см і 5 см; 2) 16 см і 2 см;
3) 10 см і 5 см; 4) 7 см і 7 см.

730. Два кола перетинаються в точках A і B. Точки O_1 і O_2 – центри цих кіл. Доведіть, що $O_1O_2 \perp AB$.

731. Два кола перетинаються в точках C і D. Точки O_1 і O_2 – центри кіл. Доведіть, що промінь O_1O_2 – бісектриса кута CO_1D.

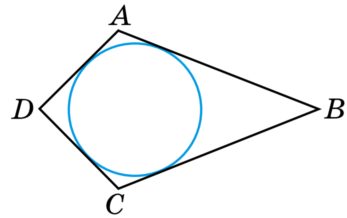
4 **732.** Три кола попарно мають зовнішній дотик. Відрізки, що сполучають їхні центри, утворюють трикутник зі сторонами 5 см, 7 см і 8 см. Знайдіть радіуси цих кіл.

733. Три кола попарно дотикаються зовні. Радіус одного з кіл дорівнює 6 см, а відрізок, що сполучає центри двох інших кіл, дорівнює 14 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

Вправи для повторення

734. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює 20 см, $\angle B = 60°$. Довжину якого з катетів можна знайти? Знайдіть її.

735. На малюнку 26.8 коло вписано в чотирикутник $ABCD$ (дотикається до всіх його сторін). Доведіть, що $AB + CD = AD + BC$.



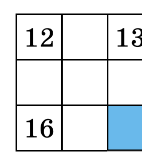
Мал. 26.8

Життєва математика

736. Приватна підприємиця має три магазини, розміщені в точках A, B і C, які не лежать на одній прямій. Вона хоче побудувати склад так, щоб відстань від нього до всіх магазинів була однаковою. Де має бути розміщений цей склад?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

737. Прямокутник поділено на дев'ять прямокутників (див. мал.). Периметри трьох з них відомі, і їх вказано на малюнку. Знайдіть периметр зафарбованого прямокутника.



§ 27. Основні задачі на побудову та їх розв'язування

Задачі на побудову в курсі геометрії

Вивчаючи курс геометрії, ви неодноразово виконували різні геометричні побудови: проводили прямі, відкладали відрізки, що дорівнюють даним, будували кути тощо. При цьому використовували лінійку з поділками, транспортир, косинець, циркуль. Тепер розглянемо побудови фігур, які можна виконати за допомогою лише двох інструментів: лінійки без поділок і циркуля. Цими інструментами користувалися ще в Давній Греції, тому їх прийнято вважати класичними інструментами.

Що можна зробити за допомогою двох цих інструментів? Лінійка дає змогу провести довільну пряму, побудувати пряму, що проходить через дану точку, і пряму, що проходить через дві дані точки. За допомогою циркуля можна провести коло довільного радіуса, коло із центром у даній точці й радіусом, що дорівнює даному відрізку. У деяких випадках замість кола потрібна буде деяка його частина (дуга кола). Зауважимо, що жодних інших побудов у задачах на побудову виконувати не дозволяється. Наприклад, за допомогою лінійки (навіть з поділками) не дозволяється відкладати відрізок заданої довжини, не можна використовувати косинець для побудови перпендикулярних прямих тощо.

Розв'язати задачу на побудову – означає вказати послідовність найпростіших побудов, після виконання яких отримаємо задану фігуру; далі – довести, що побудована фігура має властивості, передбачені умовою, тобто є шуканою фігурою.

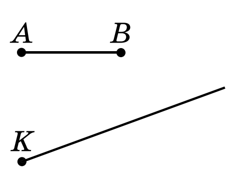
Іноді для найскладніших задач потрібно виконати аналіз, тобто провести міркування, на основі яких і буде розв'язано задачу.

Далі розглянемо найпростіші задачі на побудову.

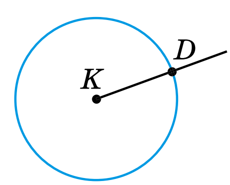
Побудова відрізка, що дорівнює даному

Приклад 1. На даному промені від його початку відкласти відрізок, що дорівнює заданому.

Розв'язання. Зобразимо фігури, що дано в умові задачі: відрізок AB і промінь з початком у точці K (мал. 27.1).



Мал. 27.1



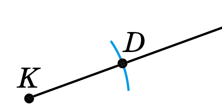
Мал. 27.2

1) Побудуємо циркулем коло із центром у точці K, радіус якого дорівнює AB (мал. 27.2). Це коло перетне промінь у деякій точці D.

2) Очевидно, що $KD = AB$.

3) Тому KD – шуканий відрізок.

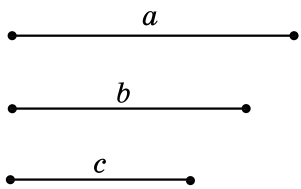
Замість кола можна було провести ту його частину (деяку дугу), яка б мала перетин з променем (див. мал.). Цю дугу ще називають *засічкою*.



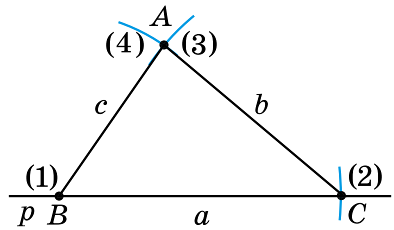
Побудова трикутника за трьома сторонами

Приклад 2. Побудувати трикутник із заданими сторонами a, b і c.

Розв'язання. Нехай задано три відрізки a, b і c (мал. 27.3).



Мал. 27.3



Мал. 27.4

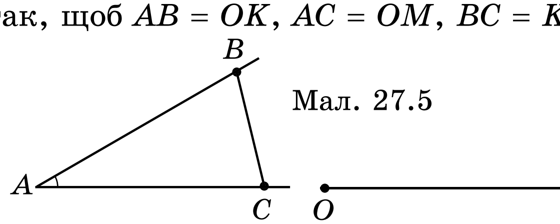
1) За допомогою лінійки проведемо довільну пряму p і позначимо на ній довільну точку B ((1) на мал. 27.4).
2) За допомогою циркуля відкладемо на прямій p відрізок $BC = a$ (дуга (2) на мал. 27.4).
3) Розхилом циркуля, що дорівнює b, опишемо дугу (3) кола із центром у точці C (мал. 27.4).
4) Розхилом циркуля, що дорівнює c, опишемо дугу (4) кола із центром у точці B (мал. 27.4).
5) Точка A – точка перетину дуг (3) і (4). $\triangle ABC$ – шуканий.
Доведення цього факту є очевидним, оскільки сторони трикутника ABC дорівнюють заданим відрізкам a, b і c: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Зауваження. Якби побудовані дуги (3) і (4) не перетнулися, то трикутник побудувати було б неможливо. За нерівністю трикутника: кожна зі сторін має бути меншою від суми двох інших.

Побудова кута, що дорівнює даному

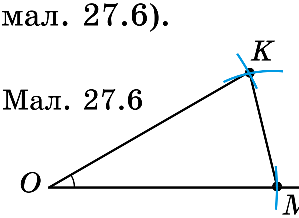
Приклад 3. Від даного променя відкласти заданий кут.

Розв'язання. Нехай дано кут A і промінь з початком у точці O (мал. 27.5). Потрібно побудувати кут, що дорівнює куту A, так, щоб одна з його сторін збігалася з даним променем.
1) Позначимо на сторонах даного кута A дві довільні точки B і C (мал. 27.5).
2) Побудуємо трикутник OKM, що дорівнює трикутнику ABC, так, щоб $AB = OK$, $AC = OM$, $BC = KM$ (мал. 27.6).



Мал. 27.5

Мал. 27.6

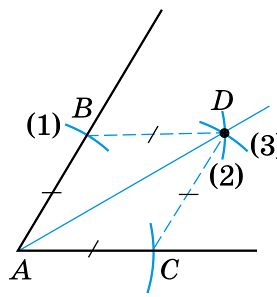


3) Тоді $\angle KOM = \angle BAC$ (як відповідні кути рівних трикутників).
4) Отже, $\angle KOM$ – шуканий.
Доведення цього випливає з побудови, бо $\triangle OKM = \triangle ABC$, а тому $\angle KOM = \angle A$. ■

Побудова бісектриси заданого кута

Приклад 4. Побудувати бісектрису заданого кута.

Розв'язання. Нехай дано $\angle A$, потрібно побудувати його бісектрису (див. мал.).



1) Проведемо дугу кола довільного радіуса із центром у точці A (дуга (1) на мал.), яка перетинає сторони кута в точках B і C.

2) З точок B і C опишемо дуги таким самим радіусом (дуги (2) і (3)) у внутрішній області кута до їх перетину. Отримаємо точку D.

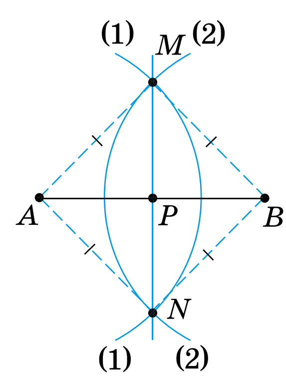
3) Проведемо промінь AD. Промінь AD – шукана бісектриса кута A.

Доведення. $\triangle ABD = \triangle ACD$ (за трьома сторонами), тому $\angle BAD = \angle CAD$ (як відповідні кути рівних трикутників), отже, AD – бісектриса кута A. ■

Поділ заданого відрізка навпіл

Приклад 5. Поділити заданий відрізок навпіл.

Розв'язання. Нехай AB – заданий відрізок, який потрібно поділити навпіл, тобто побудувати його середину.



1) З точки A радіусом циркуля, більшим за половину відрізка AB, опишемо дугу (1) (див. мал.).

2) З точки B таким самим радіусом циркуля опишемо дугу (2) до перетину з дугою (1) у точках M і N.

3) Через точки M і N проведемо пряму MN. Пряма MN перетинає відрізок AB в точці P. P – шукана точка.

Доведення. $\triangle AMN = \triangle BMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle AMP = \angle BMP$, а MP – бісектриса рівнобедреного трикутника AMB з основою AB, тому вона є також медіаною. Отже, P – середина AB. ■

Зауважимо, що пряма MN є серединним перпендикуляром до відрізка AB.

Побудова прямої, перпендикулярної до заданої

Приклад 6. Через дану точку M провести пряму, перпендикулярну до заданої прямої a.

Розв'язання. Задача має два випадки.

1. Нехай точка M належить прямій a.

1) На даній прямій a довільним радіусом циркуля відкладемо від точки M два рівних відрізки MK і ML (дуги (1) на мал. 27.7).

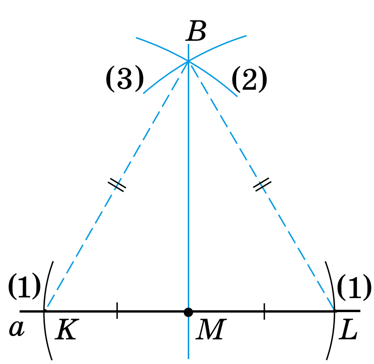
2) Із точок K і L радіусом, що дорівнює KL, опишемо дуги (2) і (3) до їх перетину. Отримаємо точку B.

3) Проведемо пряму BM. Пряма BM – шукана.

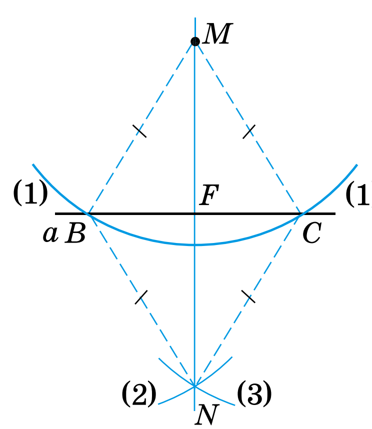
Доведення. $KL = KB = LB$, отже, BM – медіана рівностороннього трикутника BKL, тому вона є також і висотою. Отже, $BM \perp a$.

2. Нехай точка M не належить прямій a.

1) З точки M довільним радіусом циркуля (більшим за відстань від точки M до прямої a) проведемо дугу (1), яка перетинає пряму a в точках B і C (мал. 27.8).



Мал. 27.7



Мал. 27.8

2) З точок B і C тим самим радіусом циркуля опишемо дуги (2) і (3) до їх перетину в точці N з іншого боку від точки M.

3) Проведемо пряму MN. Пряма MN – шукана пряма.

Доведення. Нехай точка F – точка перетину прямих BC і MN. $\triangle BMN = \triangle CMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle BMN = \angle CMN$. MF – бісектриса рівнобедреного трикутника BMC, проведена до його основи. Тому MF є також і висотою. Отже, $MF \perp BC$, а тому $MN \perp a$. ■

Примітка. У задачах цього параграфа для задання умов задачі (наприклад, довжини відрізка чи градусної міри кута) використовуємо лінійку з поділками і транспортир, а для розв'язування задачі – лише лінійку без поділок і циркуль.

Які інструменти використовують для розв'язування задач на побудову? ○ Які побудови можна виконати за допомогою лінійки без поділок? ○ Які побудови можна виконати за допомогою циркуля? ○ Що означає: розв'язати задачу на побудову? ○ Як побудувати відрізок, що дорівнює заданому? ○ Як побудувати трикутник за трьома сторонами? ○ Як побудувати кут, що дорівнює заданому? ○ Як побудувати бісектрису заданого кута? Як поділити заданий відрізок навпіл? ○ Як побудувати пряму, перпендикулярну до заданої? ○ Як побудувати трикутник за трьома сторонами?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

738. Проведіть довільну пряму та відкладіть на ній відрізок, що дорівнює відрізку на малюнку 27.9.

739. Проведіть довільний промінь та відкладіть від його початку відрізок, що дорівнює відрізку на малюнку 27.10.

Мал. 27.9

Мал. 27.10

Мал. 27.11

740. Проведіть довільну пряму m, виберіть на ній точку M і опишіть коло із центром у точці M, радіус якого дорівнює відрізку, зображеному на малюнку 27.11. У скількох точках коло перетнуло пряму?

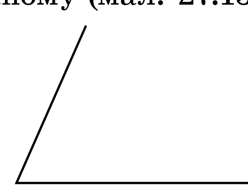
741. Накресліть довільний відрізок MN. Побудуйте коло із центром у точці M, радіус якого дорівнює MN.

2

742. Побудуйте кут, що дорівнює заданому (мал. 27.12).

743. Побудуйте кут, що дорівнює заданому (мал. 27.13).

Мал. 27.12



Мал. 27.13

744. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює 70°, та його бісектрису – без допомоги транспортира.

745. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює 110°, та його бісектрису – без допомоги транспортира.

746. Побудуйте відрізок, що дорівнює заданому (мал. 27.14), та поділіть його навпіл.

747. Побудуйте відрізок, що дорівнює заданому (мал. 27.15), та поділіть його навпіл.

Мал. 27.14

Мал. 27.15

748. Накресліть пряму b та позначте точку M, що їй не належить. Проведіть пряму MN перпендикулярно до прямої b.

749. Накресліть пряму m та позначте точку P, що їй належить. Проведіть пряму PK перпендикулярно до прямої m.

750. Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 5 см і 3 см.

751. Накресліть гострокутний $\triangle ABC$ та побудуйте його медіану CP.

752. Накресліть прямокутний $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Побудуйте його медіану CM та бісектрису AK.

753. Накресліть прямокутний $\triangle KLM$ ($\angle K = 90°$). Побудуйте його бісектрису KP та медіану LT.

754. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{3}{4}$ від побудованого відрізка.

755. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{1}{4}$ від побудованого відрізка.

756. Побудуйте трикутник зі сторонами $a = 8$ см, $b = 7$ см, $c = 5$ см.

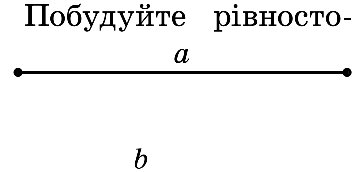
757. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $CA = 7$ см.

758. Накресліть довільний $\triangle ABC$ і побудуйте $\triangle ABD$ такий, що дорівнює трикутнику ABC.

759. Накресліть довільний трикутник і побудуйте трикутник, що йому дорівнює.

760. Накресліть довільний відрізок AB. Побудуйте рівносторонній $\triangle ABC$.

761. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює відрізку a, а бічна сторона – відрізку b (мал. 27.16).



Мал. 27.16

762. Побудуйте $\triangle DEF$, якщо $DE = 6$ см, $\angle D = 40°$, $\angle E = 80°$.

763. Побудуйте $\triangle NPT$, якщо $NP = 4$ см, $\angle N = 50°$, $\angle P = 100°$.

764. На даній прямій a знайдіть точки, віддалені від заданої точки A цієї прямої:
1) на 4 см;
2) на відстань, більшу ніж 4 см;
3) на відстань, меншу ніж 4 см.

765. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і радіусом описаного кола.

766. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 105°$.

767. Побудуйте $\triangle KLM$, якщо $KL = 6$ см, $KM = 4$ см, $\angle K = 80°$.

768. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 4 см, а кут при основі 70°.

769. Побудуйте рівносторонній трикутник зі стороною 5 см і впишіть у нього коло.

770. Побудуйте довільний трикутник та опишіть навколо нього коло.

771. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює 6 см, а висота, проведена до неї, – 4 см.

772. Побудуйте коло, радіус якого 4 см, позначте на цьому колі деяку точку A і проведіть через неї дотичну до кола – пряму b.

773. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 4 см, а кут при вершині – 80°.

774. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а кут при вершині – 100°.

775. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

776. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і бісектрисою прямого кута.

777. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

778. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.

779. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до нього.

780. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і радіусом описаного кола.

781. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

4 **782.** Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 4$ см, $\angle A = 40°$, $\angle C = 105°$.

783. Не користуючись транспортиром, побудуйте кути 30° і 60°.

784. Не користуючись транспортиром, побудуйте кут, що дорівнює 15°.

785. Побудуйте без транспортира $\triangle ABC$, у якого:
1) $AB = 5$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$;
2) $AB = BC = 4$ см, $\angle B = 150°$.

786. Побудуйте без транспортира $\triangle KMP$, у якого:
1) $KM = 4$ см, $\angle K = 30°$, $\angle M = 45°$;
2) $KM = MP = 5$ см, $\angle M = 120°$.

787. Побудуйте рівносторонній трикутник за його медіаною.

788. Побудуйте трикутник за двома нерівними сторонами і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків має задача?

Вправи для повторення

789. Один з кутів трикутника дорівнює 15°, а два інших – відносяться як 7 : 8. Знайдіть найменший із зовнішніх кутів трикутника.

790. Доведіть, що в рівних між собою трикутниках бісектриси, проведені з вершин відповідних кутів, однакової довжини.

791. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а гіпотенуза – 60 см. Знайдіть відрізки, на які ділить гіпотенузу висота, проведена до неї.

Життєва математика

792. 1) Щоб залити один квадратний метр ковзанки, потрібно 40 л води. Скільки потрібно буде води, щоб залити ковзанку круглої форми діаметром 30 м?
2) Дізнайтеся, скільки коштує 1 м^3 води, та обчисліть, яку суму повинна буде сплатити муніципальна влада за використану воду.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

793. Розв’яжіть задачу та прочитайте прізвище першого президента незалежної України.

Промінь BK проходить між сторонами кута ABC. Знайдіть $\angle ABK$ і $\angle KBC$, якщо $\angle ABC = 120°$.		
Умова	$\angle ABK$	$\angle KBC$
$\angle ABK$ на $20°$ менший від $\angle KBC$	А	В
$\angle ABK$ утричі більший за $\angle KBC$	У	К
$\angle ABK : \angle KBC = 3 : 5$	Р	Ч

30°	45°	50°	70°	75°	90°	30°

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5 (§§21–27)

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

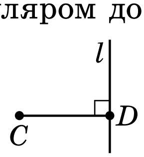
1 **1.** Знайдіть радіус кола, діаметр якого дорівнює 8 см.

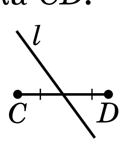
А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 16 см **Г.** 8 см

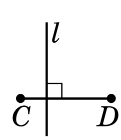
2. Знайдіть градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює 40°.

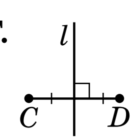
А. 20° **Б.** 40° **В.** 80° **Г.** 120°

3. Укажіть малюнок, на якому пряма l є серединним перпендикуляром до відрізка CD.

А.


Б.


В.


Г.


2 **4.** Радіус кола дорівнює 4 см. Як розміщені пряма a і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює 3 см?

А. пряма перетинає коло у двох точках
Б. пряма є дотичною до кола
В. пряма не має з колом спільних точок
Г. неможливо визначити

5. Точка O – центр кола, MN – його хорда. Знайдіть $\angle MON$, якщо $\angle OMN = 70°$.

А. 20° **Б.** 40° **В.** 60° **Г.** 70°

6. Кола, радіуси яких 6 см і 2 см, мають внутрішній дотик. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 6 см **Г.** 8 см

3 **7.** Точка O – центр кола, AB – його діаметр, BC – хорда, $\angle COA = 50°$. Знайдіть $\angle BCO$.

А. 25° **Б.** 35° **В.** 50° **Г.** 60°

8. Два кола мають зовнішній дотик, а відстань між їхніми центрами дорівнює 14 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо радіус одного з них на 4 см більший за радіус другого.

А. 8 см і 4 см **Б.** 9 см і 5 см **В.** 10 см і 6 см **Г.** 11 см і 7 см

9. Хорди MN і KL перетинаються в точці A. $\angle MKL = 30°$, $\angle KLN = 70°$. Знайдіть градусну міру кута KAM.

А. 30° **Б.** 70° **В.** 80° **Г.** 100°

4 **10.** З точки M, що лежить поза колом, проведено до кола дві дотичні MA і MB, де A і B – точки дотику, $\angle MBA = 60°$. Знайдіть відстань від точки M до центра кола, якщо радіус кола дорівнює 10 см.

А. 10 см **Б.** 15 см **В.** 20 см **Г.** 25 см

11. Центр кола, описаного навколо трикутника, збігається із серединою сторони в трикутнику, що є...

А. прямокутним **Б.** гострокутним
В. тупокутним **Г.** рівностороннім

12. Три кола, радіуси яких 3 см, 4 см і 5 см, попарно дотикаються зовні. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

А. 22 см **Б.** 23 см **В.** 24 см **Г.** 25 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Радіуси двох кіл дорівнюють r_1 і r_2, а відстань між їхніми центрами – 10 см. Установіть відповідність між радіусами кіл r_1 і r_2 (1–3) та взаємним положенням цих кіл (А–Г).

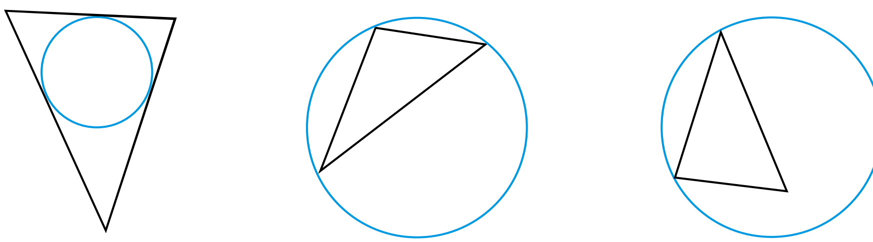
Радіуси кіл	*Взаємне положення кіл*
1. $r_1 = 4$ см, $r_2 = 7$ см	**А.** зовнішній дотик
2. $r_1 = 8$ см, $r_2 = 2$ см	**Б.** внутрішній дотик
3. $r_1 = 5$ см, $r_2 = 3$ см	**В.** кола перетинаються
	Г. кола не мають спільних точок

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 21–27

1 **1.** Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює 26 мм.

2. Знайдіть градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює 70°.

3. На якому з малюнків зображено коло, описане навколо трикутника, а на якому – вписане у трикутник?



2 **4.** Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. Проведіть у ньому діаметр MN і хорду KL. Побудуйте за допомогою косинця дотичну до кола, що проходить через точку M.

5. Точка O – центр кола, AB – його хорда. Знайдіть $\angle OAB$, якщо $\angle AOB = 136°$.

6. Накресліть відрізок FP завдовжки 5 см. За допомогою лінійки з поділками та косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка FP.

3 **7.** Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 20 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо один з них утричі більший за інший.

8. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 55 мм, а кут при вершині – 50°.

4 **9.** Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 2 см завдовжки, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр трикутника.

Додаткові вправи

10. З точки A, що лежить поза колом, проведено до нього дві дотичні AB і AC, де B і C – точки дотику, $\angle BAC = 60°$. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від точки A до центра кола дорівнює 8 см.

11. Не користуючись транспортиром, побудуйте кут, що дорівнює 120°.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 21

1 **794.** Накресліть коло. Проведіть у ньому радіус, діаметр і хорду.

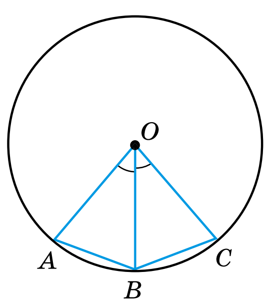
2 **795.** Дано коло із центром у точці O. Скільки спільних точок має коло з:

1) променем OK;

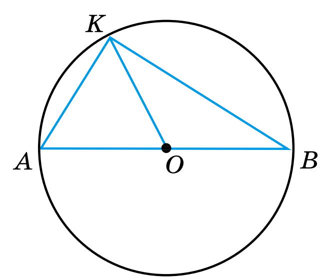
2) прямою OK?

796. У колі із центром O проведено хорди AB і BC (мал. 1). Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC$. Доведіть, що $AB = BC$.

3 **797.** У колі із центром O проведено діаметр AB і хорди AK і KB (мал. 2). Знайдіть кути трикутника AKB, якщо $\angle KOB = 130°$.



Мал. 1



Мал. 2

798. Усі радіуси кола продовжили зовні кола на їхню довжину. Яку лінію утворять їхні кінці?

799. Розділіть хорду навпіл за допомогою лише косинця, якщо дано центр кола.

800. Знайдіть градусну міру кута між двома хордами, що виходять з однієї точки і дорівнюють радіусу.

4 **801.** AB – діаметр кола, K – деяка точка кола. Знайдіть кути трикутника ABK, якщо найменший його кут у 4 рази менший від середнього за градусною мірою кута.

802. У колі через середину радіуса OA перпендикулярно до нього проведено хорду MN. Знайдіть кути трикутника MON.

* **803.** Хорда перетинає діаметр під кутом 30° і ділить його на два відрізки 7 см і 1 см завдовжки. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди.

До § 22

2 **804.** Накресліть коло, радіус якого 2,5 см. Позначте на ньому точку L. Проведіть за допомогою косинця січну LK та дотичну LM до кола.

805. Нехай OK – відстань від центра кола O до прямої p, а r – радіус кола. Яким є взаємне розміщення прямої і кола, якщо:

1) $OK = 12$ см, $r = 14$ см; 2) $r = 7$ см, $OK = 70$ мм;
3) $OK = 2$ дм, $r = 18$ см; 4) $r = 32$ мм, $OK = 0,3$ дм?

3 **806.** Чи перетинаються дотичні до кола, що проходять через кінці його діаметра?

807. Пряма в точці A дотикається до кола із центром O. На дотичній з різних боків від точки A відкладено рівні відрізки AM і AN. Доведіть, що $OM = ON$.

4 **808.** Радіус кола ділить навпіл хорду, яка не є діаметром. Доведіть, що дотична, проведена через кінець даного радіуса, паралельна даній хорді.

До § 23

2 **809.** Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля та лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

3 **810.** Накресліть кут 80°. За допомогою циркуля, косинця, транспортира та лінійки з поділками впишіть у цей кут коло так, щоб точка дотику до сторін кута містилася на відстані 2 см від його вершини.

4 **811.** Центр кола, вписаного у трикутник, лежить на перетині двох медіан трикутника. Доведіть, що трикутник рівносторонній.

812. Вписане в рівнобедрений трикутник коло ділить бічну сторону у відношенні 2 : 3, починаючи від основи. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 70 см.

До § 24

2 **813.** Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

3 **814.** Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику центр описаного кола належить прямій, що містить висоту трикутника, проведену до основи.

815. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, збігається із центром кола, вписаного в цей трикутник.

До § 25

816. На малюнку 3 точка O – центр кола.

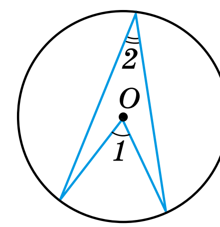
1) $\angle 1 = 40°$. Знайдіть $\angle 2$.

2) $\angle 2 = 25°$. Знайдіть $\angle 1$.

817. На малюнку 3 точка O – центр кола. Знайдіть $\angle 2$, якщо:

1) $\angle 1 - \angle 2 = 15°$;

2) $\angle 1 + \angle 2 = 54°$.



Мал. 3

818. Гострокутний трикутник ABC вписано в коло із центром у точці O. Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle A = \alpha$.

819. У коло радіуса 2 см вписано кут ABC, що дорівнює 30°. Знайдіть довжину хорди AC.

820. Продовження бісектриси кута A трикутника ABC перетинає коло, описане навколо трикутника, у точці K. Доведіть, що $\overset{\smile}{BK} = \overset{\smile}{CK}$.

821. Коло поділено чотирма точками на частини, які відносяться як 1 : 2 : 3 : 4, і точки поділу сполучено між собою відрізками. Визначте кути утвореного чотирикутника.

822. Знайдіть геометричне місце точок, з яких даний відрізок MN видно під заданим кутом α.

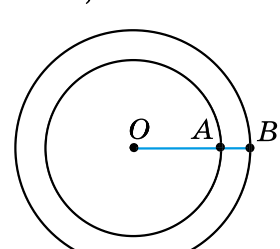
До § 26

823. Накресліть відрізок 4 см завдовжки. Побудуйте два кола, центрами яких є кінці заданого відрізка, такі, що:

1) не перетинаються; 2) перетинаються.

824. Діаметр більшого з концентричних кіл ділиться меншим колом на три частини, що дорівнюють 3 см, 8 см і 3 см. Знайдіть радіуси кіл.

825. На малюнку зображено концентричні кола, радіуси яких відносяться як 10 : 7. Знайдіть ці радіуси, якщо $AB = 12$ см.



826. За якого розміщення двох кіл до них можна провести лише три спільні дотичні?

827. Відстань між центрами двох кіл, що дотикаються, дорівнює 16 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо вони відносяться як 5 : 3. Розгляньте всі можливі випадки.

До § 27

828. Накресліть довільний кут A і побудуйте коло із центром у його вершині, радіус якого дорівнює відрізку, зображеному на малюнку. Чи перетинає коло кожну зі сторін кута?

829. Побудуйте відрізок, довжина якого вдвічі більша за довжину відрізка на малюнку.

830. Накресліть за допомогою транспортира кут, градусна міра якого дорівнює 80°. Побудуйте (без транспортира) кут, що дорівнює заданому, і його бісектрису.

831. Накресліть довільний трикутник і проведіть його бісектриси.

832. Накресліть гострокутний трикутник та проведіть його медіани. Упевніться в тому, що медіани перетнулися в одній точці.

833. Накресліть довільний тупий кут. Побудуйте кут, що дорівнює:

1) $\frac{1}{4}$ від накресленого кута; 2) $\frac{3}{4}$ від накресленого кута.

834. За двома даними кутами трикутника побудуйте кут, що дорівнює його третьому куту.

835. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за його гіпотенузою.

836. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом.

837. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою a та радіусом описаного кола R ($a < 2R$). Скільки розв’язків має задача?

838. Побудуйте трикутник за двома сторонами та кутом, що лежить проти меншої з них.

839. Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом між бічними сторонами і бісектрисою, проведеною з вершини кута при основі.

840. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою другого катета і гіпотенузи.

Головне в розділі 4

- ✓ ***Коло*** – геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки.
- ✓ ***Хорда*** – відрізок, що сполучає дві точки кола.
- ✓ ***Діаметр*** – хорда, що проходить через центр кола.
- ✓ ***Круг*** – коло разом з його внутрішньою областю.
- ✓ ***Центр*, *радіус*, *діаметр*, *хорда круга*** – відповідно центр, радіус, діаметр, хорда кола, яке є межею даного круга.

ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОЛА

Діаметр є найбільшою з хорд.

Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.

Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

ДОТИЧНА ДО КОЛА

- ✓ ***Дотична*** до кола – пряма, яка має з колом лише одну спільну точку (це ***точка дотику***).

ВЛАСТИВІСТЬ ДОТИЧНОЇ

Дотична до кола є перпендикулярною до радіуса, який проведений в точку дотику.

Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.

ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ КУТА

Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.

- ✓ ***Коло, вписане у трикутник,*** – коло, яке дотикається до всіх сторін цього трикутника.

У будь-який трикутник можна вписати коло.

Центр кола, вписаного у трикутник, – точка перетину бісектрис цього трикутника.

✓ ***Серединний перпендикуляр до відрізка*** – пряма, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього.

ВЛАСТИВІСТЬ СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА ДО ВІДРІЗКА

Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.

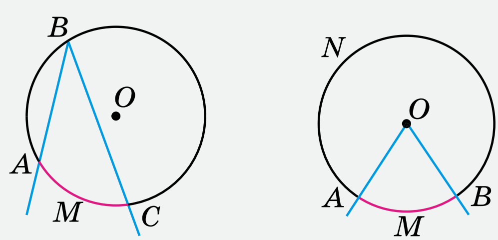
✓ ***Коло, описане навколо трикутника***, – коло, яке проходить через усі вершини цього трикутника.

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

ВПИСАНІ ТА ЦЕНТРАЛЬНІ КУТИ

Центральний кут – це кут з вершиною в центрі кола.



Градусна міра дуги кола – це градусна міра відповідного центрального кута.

Вписаний кут – це кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло.

Т е о р е м а (про вписаний кут). **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.**

Н а с л і д о к 1. **Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, між собою рівні.**

Н а с л і д о к 2. **Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий.**

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

1

1. Проведіть пряму m, позначте точку A, що належить прямій m, і точку B, що прямій m не належить. Виконайте відповідні записи.

2. Накресліть довільний відрізок MN та коло із центром у точці M, радіус якого дорівнює MN.

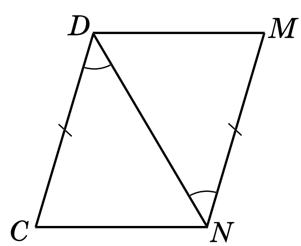
3. У трикутнику CDE кут C – прямий. Як називають сторону DE цього трикутника? Як називають сторони CD і CE цього трикутника?

2

4. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 119°. Знайдіть решту кутів. Знайдіть градусну міру кута між цими прямими.

5. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона – 9 см. Знайдіть основу трикутника.

6. Дано: $DC = MN$, $\angle CDN = \angle DNM$ (див. мал.).
Довести: $\triangle CDN = \triangle MND$.



3

7. Один з кутів трикутника дорівнює 68°, а другий – на 14° більший за третій. Знайдіть невідомі кути трикутника.

8. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 6$ см, $AC = 3$ см, $\angle A = 50°$.

4

9. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо зовнішні кути при вершинах цих кутів відносяться як 29 : 25.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Розділ 1

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

1. Дано відрізок AB. Позначте всі такі точки K на відрізку AB, для яких виконується співвідношення:

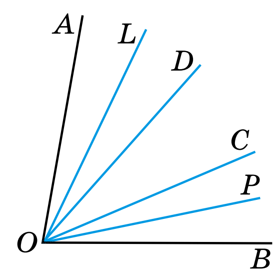
1) $BK = 3AK$; 2) $BK \geqslant 3AK$.

2. $\angle AOB = 120°$. Побудуйте промінь OK, який проходить між сторонами даного кута так, що $3\angle AOK - 2\angle KOB = 10°$.

3. Скільки різних прямих можна провести через чотири точки так, щоб кожна пряма проходила щонайменше через дві із заданих точок? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

4. Скільки різних точок перетину можуть мати чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного виконайте малюнок.

5. Точки A, B і C належать прямій a, причому точка B лежить між точками A і C. Відомо, що $AC < 1{,}9AB$. Порівняйте довжини відрізків BC і AB.



6. На малюнку: $\angle AOC = \angle BOD$. OL і OP – бісектриси кутів AOD і COB. Порівняйте кути:

1) AOL і COP; 2) LOP і AOC.

Розділ 2

Взаємне розміщення прямих на площині

7. Дано п’ять прямих, кожні дві з яких перетинаються. Відомо, що через точку перетину будь-яких двох з них проходить принаймні ще одна з даних прямих. Доведіть, що всі ці прямі проходять через одну точку.

8. Чи можна градусні міри двох суміжних кутів записати:

1) тільки непарними цифрами;

2) тільки парними цифрами?

9. Знайдіть суміжні кути, якщо:

1) градусні міри цих кутів відносяться як $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$;

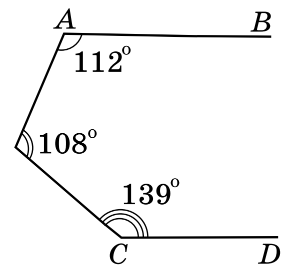
2) половина одного з них становить 40 % від іншого.

10. У якому з випадків утвориться більше пар вертикальних кутів: при перетині трьох прямих в одній точці чи в трьох точках?

11. Знайдіть кут між двома прямими, що перетинаються, якщо сума $\frac{1}{3}$ одного з утворених кутів і $\frac{5}{6}$ іншого дорівнює $90°$.

12. Через вершину тупого кута, градусна міра якого дорівнює α, проведено промені, перпендикулярні до сторін кута. Промені утворили гострий кут β. Доведіть, що $\alpha + \beta = 180°$.

13. Чи є паралельними прямі AB і CD на малюнку?



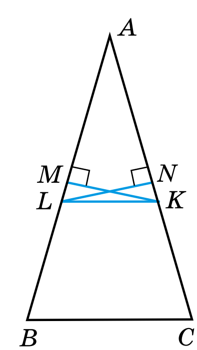
14. Чи можна, використовуючи шаблон кута, градусна міра якого $27°$, побудувати перпендикулярні прямі?

15. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо один з них у 2,6 раза менший від суми трьох інших.

Розділ 3

Трикутники. Ознаки рівності трикутників

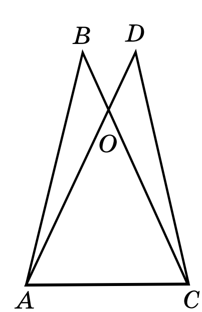
16. Периметр трикутника на 10 см більший за одну зі сторін, на 13 см – за другу і на 9 см – за третю. Знайдіть периметр трикутника.



17. Точки M і N – середини сторін AB і AC трикутника ABC, $AB = AC$, $MK \perp AB$, $NL \perp AC$ (див. мал.). Доведіть, що $\angle NLK = \angle MKL$.

18. Прямі, що містять бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C трикутника ABC, перетинаються в точці O. Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle A = \alpha$.

19. На малюнку: $\triangle ABC = \triangle CDA$, $AB = CD = 40$ см, $BO = DO = 10$ см. Периметр трикутника ABC дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника AOC, якщо AO більша за AC на 30 см.



20. $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB. Медіани AA_1 і BB_1 продовжено за точки A_1 і B_1 на відрізки A_1K і B_1L відповідно так, що $A_1K = AA_1$ і $B_1L = BB_1$. Доведіть, що $\angle ALC = \angle BKC$.

21. Доведіть, що з точки перетину бісектрис кожну зі сторін трикутника видно під тупим кутом.

22. Дві сторони і висота, що проведена до третьої сторони одного трикутника, відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті, що проведена до третьої сторони другого трикутника. Чи можна стверджувати, що трикутники рівні між собою?

23. Дві сторони і медіана, що проведена до третьої сторони одного трикутника, дорівнюють відповідно двом сторонам і медіані, проведеній до третьої сторони другого трикутника. Доведіть, що ці трикутники рівні між собою.

24. Визначте вид трикутника (за кутами), якщо:

1) сума будь-яких двох його кутів більша за $90°$;

2) кожний з кутів менший від суми двох інших.

25. У трикутнику ABC кут C – прямий. Сторону AB трикутника продовжено за точку A на відрізок $AP = AC$ і за точку B на відрізок $BT = BC$. Знайдіть суму градусних мір кутів CPT і CTP.

26. У трикутнику ABC $AC = BC$, D – точка перетину бісектрис трикутника, а точка O – центр кола, описаного навколо трикутника. Відрізок OD перетинає сторону AB трикутника в точці P і ділиться цією точкою навпіл. Знайдіть кути трикутника ABC.

27. Відрізки AC і BD перетинаються. Відомо, що $AB > AC$. Доведіть, що $BD > CD$.

28. У трикутнику ABC $AB > AC$, AM – медіана. Доведіть, що $\angle CAM > \angle MAB$.

29. Усередині рівностороннього трикутника ABC узято довільну точку K. Доведіть, що $AK < BK + KC$.

30. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів удвічі менший від другого, а сума гіпотенузи та меншого катета дорівнює a см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

31. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах AB і BC позначено точки K і L так, що $\angle LAK = 5°$, $\angle LCK = 10°$. Знайдіть $\angle LKC$.

32. У трикутнику ABC висоти AA_1 і BB_1 рівні й $AB_1 = CA_1$. Знайдіть $\angle C$.

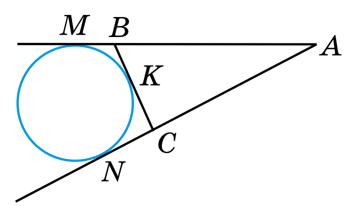
Розділ 4

Коло і круг

33. Відрізок BD – висота гострокутного трикутника ABC. Від вершини B на прямій BC відкладено відрізки BM і BN, завдовжки як сторона AB. На стороні AC від точки D відкладено відрізок DL, що дорівнює DA. Доведіть, що точки A, M, N, L лежать на одному колі.

34. Навколо рівнобедреного трикутника з кутом при вершині $120°$ і бічною стороною, що дорівнює a см, описано коло. Знайдіть його радіус.

35. AM і AN – дотичні до кола (див. мал.), $AM = m$ см. Пряма BC дотикається до кола в точці K. Знайдіть периметр трикутника ABC.



36. Два кола однакового радіуса, що дотикаються між собою, внутрішньо дотикаються до третього кола. Сполучивши центри трьох кіл, отримали трикутник, периметр якого 20 см. Знайдіть радіус більшого кола.

37. Нехай r – радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c. Доведіть, що $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

38. Два кола мають зовнішній дотик у точці P. Точки M_1 і M_2 – точки дотику спільної зовнішньої дотичної до кіл. Доведіть, що $\angle M_1PM_2 = 90°$.

39. За допомогою циркуля і лінійки поділіть кут $54°$ на три рівні частини.

40. Знаючи суму і різницю двох кутів, побудуйте їх.

41. Побудуйте $\triangle ABC$ за стороною BC, прилеглим до неї кутом B і сумою двох інших сторін $CA + AB$.

42. Побудуйте $\triangle ABC$ за двома кутами A і B та периметром P.

43. Дано пряму a і відрізок AB, що перетинає цю пряму. Побудуйте на прямій a точку C так, щоб пряма містила бісектрису трикутника ABC.

44. Побудуйте точку, яка лежить на даному колі й рівновіддалена від кінців даного відрізка. Скільки розв'язків має задача?

ДОДАТКОВІ ТЕМИ

Геометричне місце точок

Поняття про геометричне місце точок площини

У геометрії є задачі, пов'язані з геометричним місцем точок, яке, залежно від умови задачі, потрібно або знайти (побудувати), або використати для розв'язування задачі.

Геометричним місцем точок **площини називають фігуру, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.**

Приклади геометричних місць точок площини

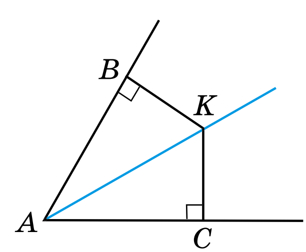
Розглянемо кілька геометричних місць точок площини.

1. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки на дану відстань,* – коло, радіус якого дорівнює даній відстані.

2. *Геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки не перевищує даної відстані,* – круг, радіус якого дорівнює даній відстані.

3. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області,* – бісектриса даного кута.

Доведення. 1) Нехай точка K рівновіддалена від сторін AB і AC кута A і належить внутрішній області кута (мал. 1). Тобто перпендикуляри KB і KC, проведені із цієї точки до сторін кута, – рівні між собою. Тоді $\triangle ABK = \triangle ACK$ (за катетом і гіпотенузою), а $\angle BAK = \angle CAK$ (як відповідні кути). Отже, AK – бісектриса кута.



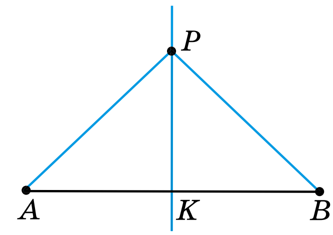
Мал. 1

2) Нехай точка K належить бісектрисі кута. За властивістю бісектриси кута (див. § 23, теорема 1): $KB = KC$. ■

Отже, ми довели, що геометричним місцем точок, які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області, є бісектриса даного кута.

4. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від кінців відрізка,* – це серединний перпендикуляр до даного відрізка.

Доведення. 1) Нехай точка P рівновіддалена від кінців відрізка AB, тобто $PA = PB$ (мал. 2). Тоді $\triangle ABP$ – рівнобедрений з основою AB, а тому медіана PK цього трикутника є його висотою. Отже, $AK = KB$ і $PK \perp AB$. Тому PK – серединний перпендикуляр до відрізка AB.



Мал. 2

2) Нехай точка P належить серединному перпендикуляру до відрізка AB. За властивістю серединного перпендикуляра (див. § 24, теорема 1): $PA = PB$. ■

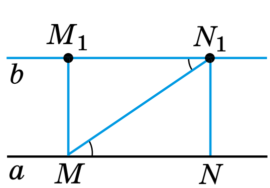
Отже, ми довели, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до даного відрізка.

5. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від даної прямої на задану відстань,* – це дві прямі, паралельні даній прямій, кожна точка яких міститься на заданій відстані від прямої.

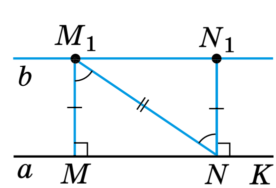
Доведення. 1) Доведемо, що коли пряма b паралельна прямій a, то дві довільні точки прямої b рівновіддалені від прямої a.

Нехай M_1 і N_1 – довільні точки прямої b. Проведемо перпендикуляри M_1M і N_1N до прямої a (мал. 3). $\angle M_1MN = \angle N_1NM = 90°$. Оскільки $a \parallel b$, то $\angle MM_1N_1 = \angle NN_1M_1 = 90°$. Проведемо січну MN_1. Тоді $\angle N_1MN = \angle M_1N_1M$ (як внутрішні різносторонні). Тому $\triangle MM_1N_1 = \triangle N_1NM$ (за гіпотенузою і гострим кутом), звідки $M_1M = N_1N$, тобто точки M_1 і N_1 прямої b рівновіддалені від прямої a.

2) Доведемо, що коли дві довільні точки M_1 і N_1 прямої b лежать на однаковій відстані від прямої a і по один бік від неї, то пряма b – паралельна прямій a (мал. 4).



Мал. 3



Мал. 4

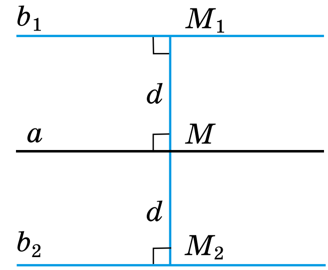
Нехай M_1M і N_1N – перпендикуляри до прямої a. За умовою $M_1M = N_1N$.

Оскільки $\angle M_1MN = \angle N_1NK$, то $MM_1 \parallel NN_1$. Тому $\angle MM_1N = \angle N_1NM_1$ (як внутрішні різносторонні кути). Отже, $\triangle MM_1N = \triangle N_1NM_1$ (за першою ознакою). Тому $\angle M_1N_1N = \angle M_1MN = 90°$.

Також маємо $\angle N_1NK = 90°$. Але $\angle M_1N_1N$ і $\angle N_1NK$ – внутрішні різносторонні для прямих a і b. Тому $a \parallel b$. ■

Отже, геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на задану відстань d, є дві прямі, паралельні даній, кожна точка яких міститься на заданій відстані від прямої.

На малюнку 5 $b_1 \parallel a$, $b_2 \parallel a$, $M_1M = M_2M = d$. Відстань d також називають *відстанню між паралельними прямими* (наприклад, між b_1 і a).



Мал. 5

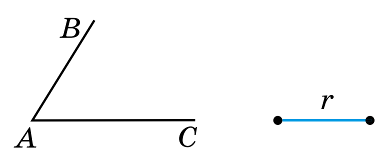
Метод геометричних місць

Суть методу геометричних місць у задачах на побудову така. Нехай потрібно побудувати точку A, що задовольняє дві умови. Будуємо геометричне місце точок, що задовольняють першу умову, – фігура F_1, і геометричне місце точок, що задовольняють другу умову, – фігура F_2. Шукана точка A належить і F_1, і F_2, а тому є точкою їх перетину.

Розв'яжемо задачу на застосування методу геометричних місць точок.

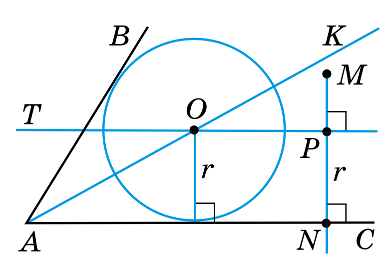
Приклад. У даний кут вписати коло заданого радіуса.

Розв'язання. Нехай дано кут A (мал. 6), у який потрібно вписати коло радіусом r (тобто таке коло радіусом r, яке дотикалося б до сторін кута).



Мал. 6

Спочатку знайдемо центр цього кола – точку O. Ця точка задовольняє дві умови: 1) належить бісектрисі кута (бо є рівновіддаленою від сторін кута); 2) міститься на відстані r, наприклад, від сторони AC кута.



Мал. 7

Звідси побудова:

1) будуємо бісектрису кута A – промінь AK (мал. 7);

2) будуємо пряму, перпендикулярну до прямої AC, що проходить через деяку точку M, яка лежить усередині кута;

3) визначаємо на побудованій прямій точку P, що міститься на відстані r від прямої AC;

4) проводимо через точку P пряму PT, перпендикулярну до прямої PN; тоді прямі PT і AC – паралельні, кожна точка прямої PT міститься на відстані r від прямої AC;
5) пряма PT перетинає промінь AK у точці O. Ця точка і є центром кола, радіус якого r, вписаного в кут A;
6) описуємо коло, радіус якого r, із центром у точці O, воно дотикається до сторін кута.
Доведення того, що побудоване коло є шуканим, випливає з побудови.

? Що називають геометричним місцем точок? ○ Що являє собою геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, відстань від яких до даної точки не перевищує заданої відстані; рівновіддалених від сторін кута; рівновіддалених від кінців відрізка; віддалених від даної прямої на задану відстань? ○ У чому полягає суть методу геометричних місць точок?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2 **1.** Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від заданої точки на:
1) відстань 2 см; 2) відстань, не більшу за 2 см.

2. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від заданої точки на:
1) відстань a см;
2) відстань, не більшу за a см.

3. Накресліть довільний відрізок AB і знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

4. Побудуйте відрізок MN завдовжки 4 см і геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

5. Побудуйте тупий кут і геометричне місце точок, що належать внутрішній області кута, рівновіддалених від сторін цього кута.

6. Побудуйте гострий кут і геометричне місце точок, що належать внутрішній області кута, рівновіддалених від сторін цього кута.

7. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на задану відстань.

8. Побудуйте прямий кут і геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін цього кута, що належать його внутрішній області.

9. Чи буде пряма, що містить висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців основи?

10. Позначте точки P і F, відстань між якими 4 см. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від кожної з них на відстань 3 см.

11. Побудуйте геометричне місце точок, що містяться від заданої прямої на відстані, що дорівнює заданому відрізку a.

12. Побудуйте геометричне місце точок, що містяться на відстані 4 см від заданої прямої.

13. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіусом r, що проходять через точку P.

14. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до даної прямої в заданій точці M.

15. Дано основу AB рівнобедреного трикутника. Знайдіть геометричне місце точок – вершин рівнобедрених трикутників з основою AB.

16. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що проходять через дві задані точки – P і L.

17. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від двох заданих паралельних прямих.

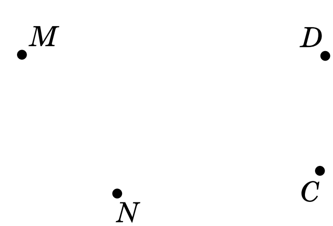
18. Побудуйте коло радіусом r, що проходить через дві дані точки. Скільки розв’язків має задача?

19. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від усіх вершин трикутника.

20. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, радіус кожного з яких дорівнює r, що дотикаються до даної прямої.

21. На стороні трикутника знайдіть точку, рівновіддалену від двох інших його сторін.

22. Дано пряму a і точку A. Знайдіть геометричне місце точок, що віддалені від прямої a на 3 см, а від точки A – на 2 см. Скільки розв’язків може мати задача залежно від розміщення точки A і прямої a?



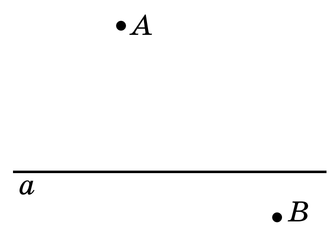
Мал. 8

23. Скопіюйте малюнок 8 у зошит. Побудуйте таку точку A, щоб $AM = AN$ і $AC = AD$.

24. Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається до двох даних кіл, що мають зовнішній дотик.

25. Центр кола, радіус якого дорівнює 1,5 см, належить прямій a. Побудуйте коло радіусом 2 см, що дотикається до заданих прямої і кола.

26. Два населених пункти A і B розташовані з різних боків від річки a (мал. 9). У якому місці потрібно побудувати міст через річку, щоб він був рівновіддаленим від пунктів A і B?



Мал. 9

27. Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, що проведена до однієї з них. Скільки розв'язків має задача?

28. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і висотою, що проведена до цієї сторони.

29. Знайдіть геометричне місце точок, що містяться на відстані, яка не перевищує 3 см від даної прямої.

30. Побудуйте коло, що проходить через дану точку M і дотикається до даної прямої a в даній точці A.

31. Побудуйте трикутник за його кутом, бісектрисою, проведеною із цього кута, і висотою, що проведена до прилеглої до цього кута сторони.

32. Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола, стороною та висотою, що проведена до цієї сторони.

33. Знайдіть геометричне місце вершин прямокутних трикутників зі спільною гіпотенузою.

Вправи для повторення

34. Периметр рівнобедреного трикутника на 18 см більший за його основу. Чи можливо знайти довжину бічної сторони?

35. Один із зовнішніх кутів прямокутного трикутника дорівнює 120°. Знайдіть відношення меншого катета до гіпотенузи.

36. Два кола із центрами в точках O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B, і кожне з них проходить через центр іншого. Знайдіть $\angle O_1AO_2$ і $\angle AO_1B$.

Життєва математика

37. Кімната у формі прямокутника має розміри 3,6 × 4,9 м. У кімнаті є двері 90 см завширшки.

1) Скільки метрів плінтуса потрібно купити для цієї кімнати?

2) Скільки коштуватиме ця покупка, якщо один погонний метр плінтуса коштує 50 грн?

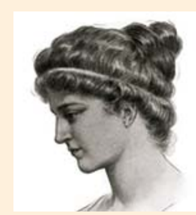
Цікаві задачі – поміркуй одначе

38. Прямокутну плитку шоколаду розламали на 4 прямокутних шматки. Один з них містить 6 квадратних частинок, другий – 15, а третій – 16. Скільки квадратних частинок у четвертому шматку цієї плитки?

А ще раніше...

Жінки у становленні математики у світі

Гіпатія Александрійська (бл. 350–370 – 415) – грецька жінка-астроном, філософ, математик, дочка математика Теона – останнього управителя Александрійської бібліотеки.



Гіпатія

В історії науки Гіпатія знана як винахідниця. Вона створила пласку астролябію – прилад для визначення широт і довгот та знаходження Сонця, зірок і планет в астрономії, а також планісферу – зображення небесної сфери на площині, на якій можна обчислювати захід і схід небесних світил. Гіпатія винайшла ареометр – прилад для визначення густини рідини; обчислювала астрономічні таблиці; написала коментарі до наукових творів Аполлонія та Діофанта. Вона мала славу талановитої вченої та викладачки.

Хільдегарда Бінгенська (1098–1179) – німецька ерудитка, мисткиня, драматургиня, лінгвістка, філософиня, лікарка, поетеса, політична консультантка, композиторка (перша, чия біографія відома) – створила одну з перших штучних мов – *Lingua Ignota*.

Марія Ґаетана Аньєзі

Марія Ґаетана Аньєзі (1718–1799) – італійська вчена, математик та філософ, жінка енциклопедичних знань. Їй приписують авторство першої книги про диференціальне та інтегральне числення. Вона перша жінка, яка стала професоркою математики Болонського університету. Першу свою роботу «Філософські міркування» Марія опублікувала уже в 20-річному віці. А в 30 років надрукувала «Основи аналізу». Цю книгу Марія Аньєзі писала майже 10 років як підручник для своїх молодших братів і сестер. Ця праця перекладалась на різні мови і користувалася популярністю аж до XIX ст.

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Розділ 1

§ 1. 9. 2) 6; 3) 16. **10.** 2) 3; 3) 7. **15.** 6069.

§ 2. 29. 17 см. **30.** 6 см. **31.** 10,1 см або 0,3 см; два розв'язки. **32.** 9,7 см або 4,7 см; два розв'язки. **33.** Харків. **34.** Стус.

§ 3. 55. 1) 180°; 2) 90°; 3) 30°; 4) 120°. **56.** 1) 90°; 2) 180°; 3) 150°; 4) 60°. **57.** 20°. **58.** 112°. **59.** 76°. **60.** 131°. **61.** Кравчук. **62.** Варшава. **63.** 60°. **64.** 60°.

Вправи для повторення розділу 1

75. 1) Два, або три, або чотири. 2) Від двох до $n+1$ частин. **77.** 8 см. **79.** $\frac{a}{2}$ см. **84.** 1) 90°; 42°; 138°; 2) 30′; 3°; 20°. **85.** 1) 30°; 2) 148°. **86.** 1) 70°; 2) 146°. **87.** $\angle AOM = 72°$; $\angle MOB = 96°$.

Розділ 2

§ 5. 101. 81° і 99°; 2) 54° і 126°. **102.** 1) 45° і 135°; 2) 36° і 144°. **103.** 40° і 100°. **104.** $\angle A = 100°$; $\angle B = 75°$. **105.** 90°. **106.** 40° і 80°. **107.** 80° і 60°. **108.** 72° і 108° або 60° і 120°. **112.** 1) Кут; 2) пряма; 3) Евклід; 4) геометрія.

§ 6. 121. 62°. **125.** 1) Усі по 90°; 2) 89°; 91°; 89°; 91°. **126.** 1) 8°; 172°; 8°; 172°; 2) усі по 90°. **127.** 1) 81°; 2) 67°; 3) 80°. **128.** 1) 60°; 2) 30°. **129.** 100°. **130.** 50°. **131.** 180°. **133.** 18 см.

§ 7. 150. 1) 65°; 2) 60°. **151.** 1) 50°; 2) 127°. **154.** 140°. **155.** 110°. **160.** 72° і 108°.

§ 8. 172. 3) 60°. **173.** 3) 50°. **179.** 36°. **181.** Ні.

§ 9. 192. $a \parallel b$. **193.** $b \parallel c$. **200.** 1) 190°; 2) 170°; 3) 170°. **201.** 1) 200°; 2) 160°; 3) 200°. **202.** Ні. **203.** Так. **204.** Ні. **205.** Ні. **209.** 100°. **211.** Так.

§ 10. 226. 1) 82° і 98°; 2) 45° і 135°; 3) 75° і 105°. **227.** 1) 36° і 144°; 2) 86° і 94°; 3) 100° і 80°. **228.** $x = 70°$ (мал. 10.13); $x = 65°$ (мал. 10.14); $x = 129°$ (мал. 10.15). **229.** $x = 50°$ (мал. 10.16); $x = 110°$ (мал. 10.17). **230.** Ні. **231.** Чотири кути по 40° і чотири кути по 140°. **232.** Чотири кути по 32° і чотири кути по 148°. **233.** 130°. **234.** 100°. **238.** Франко.

Вправи для повторення розділу 2

246. 54° і 126°. **247.** 30° і 150°. **248.** 80° і 100°. **249.** 144°. **254.** 66°. **255.** 120°. **256.** 1) 36°; 144°; 36°; 144°; 2) 50°; 130°; 50°; 130°. **257.** 40°. **263.** 1), 2) Так. **273.** Ні. **274.** Так. **277.** 80° і 100°. **279.** 90°. **280.** 70°.

Розділ 3

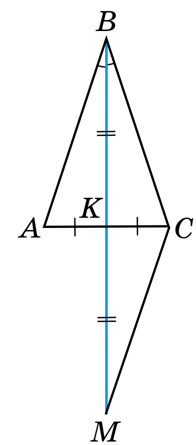
§ 11. 289. 5 см; 15 см; 12 см. **290.** 12 дм; 10 дм; 18 дм. **293.** 12 дм; 16 дм; 24 дм. **294.** 16 см; 24 см; 32 см. **296.** 19 см. **298.** 141°. **300.** 5 чотирикутників.

§ 12. 310. 1), 2) Ні. **311.** Так, $AB = BC$. **312.** Так, $\angle N = \angle K$. **313.** 21 см. **314.** 9 см. **315.** 16 см. **316.** 30°; 60°; 90°.

§ 13. 338. *Порада*. Нехай точка O – точка перетину AB і MN. Доведіть, що $\triangle AOM = \triangle AON$.

§ 14. 360. 4 см; 4 см; 6 см. **361.** 12 см; 16 см; 16 см. **362.** 7 дм; 14 дм; 14 дм. **369.** AK = 28 см; BK = 20 см. **371.** 1) Конус, сукно; 2) сектор, корсет.

§ 15. 391. 60 см. **392.** 4 см. **393.** *Порада*. Нехай BK – бісектриса і медіана трикутника ABC (див. мал.). Продовжте BK за точку K на довжину відрізка BK ($BK = KM$). Доведіть рівність трикутників ABK і CMK. **395.** 4 см; 7 см; 7 см. **396.** 9 см; 30 см; 30 см. **398.** 110 л.

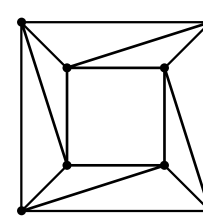


§ 16. 413. $\angle KAC = 56°$; $\angle BAK = 70°$.

§ 17. 433. 30°. **434.** 35°. **435.** $\angle L = 60°$; $\angle N = 40°$; $\angle M = 80°$. **436.** $\angle C = 80°$; $\angle B = 50°$; $\angle A = 50°$. **439.** $\angle A = 45°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 75°$. **440.** 36°; 54°; 90°. **441.** 50°; 65°; 65°. **442.** 52°; 52°; 76°. **445.** Корольов. **446.** 48°; 96°. **449.** 55°. **450.** 30°. **451.** 1) 12°; 12°; 156° або 12°; 84°; 84°; 2) 92°; 44°; 44°. **452.** 1) 28°; 28°; 124° або 28°; 76°; 76°; 2) 106°; 37°; 37°. **454.** 36°; 72°; 72° або 45°; 45°; 90°. **455.** 55°; 55°; 70° або 65°; 65°; 50°. **456.** 5 см. **459.** 20° або 100°.

§ 18. 480. Прапор. **481.** 1) 50°; 70°; 2) 30°; 90°. **482.** 62°; 62° і 56° або 62°; 59°; 59°. **483.** 138°; 21°; 21°. **485.** 3 : 1 : 2. **486.** 17 : 16 : 15. **488.** 30° і 60°. **489.** 4,2 см; 8,4 см; 10,2 см.

§ 19. 508. Костенко. **509.** 1) 18° і 72°; 2) 37° і 53°; 3) 50° і 40°. **510.** 71°. **511.** 113°. **513.** 58° і 32°. **514.** 40° і 50°. **516.** 20 см; 10 см. **517.** 6 см. **518.** 35° і 55°. **519.** 72° і 18°. **521.** 32°; 52° і 96°. **522.** 24 см. **525.** Див. мал.



§ 20. 532. Ні. **533.** 27 см. **534.** 5,7 см або 6,7 см. **535.** 1) Так; 2), 3) ні. **536.** 1), 2) Ні; 3) так. **537.** Ні. **538.** Ні. **539.** $\angle A = 39°$; $\angle B = 117°$; $\angle C = 24°$. **543.** 1) Так; 2) ні.

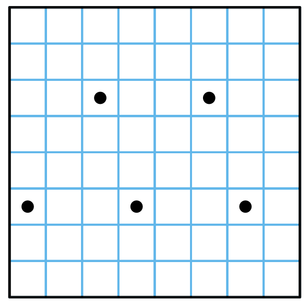
Вправи для повторення розділу 3

547. 10 см; 20 см; 16 см. **548.** AB = 5 см; BC = 8 см; AC = 7 см. **551.** Ні. **552.** 18 см. **563.** Так. **564.** 24 см; 32 см; 32 см. **572.** $AC = b - a$, $P = a + b$. **579.** 35°. **580.** 48°; 72°. **581.** 60°. **582.** 82°; 48°. **583.** 1) 30°; 2) 70°. **584.** 1) 80°; 2) 32°. **587.** 1) Так; 2), 3) ні. **588.** 108°. **590.** 40°; 56°; 84°. **591.** 100°; 40°; 40°. **597.** 27°; 63°. **598.** 30° і 60°. **599.** 10 см. **600.** 45°. **601.** 16 см. **602.** $2a$ см. **603.** 20 см; 10 см. **606.** 4 см і 13 см. **607.** Ні. **608.** 1) 4 см або 7 см; 2) 5 см; 3) 12 см. **609.** 9 см; 21 см; 21 см.

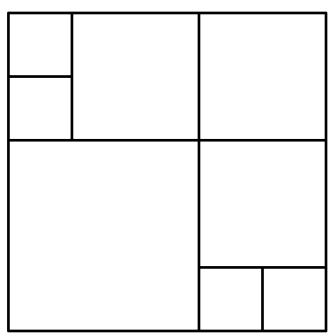
Розділ 4

§ 21. **626.** 16°. **627.** 36°. **628.** 1) Безліч; 2) дві. **629.** 10 см. **630.** 9 см. **633.** 2 см і 3,5 см. **635.** 135°. **638.** 16.

§ 22. **649.** 41°. **650.** 106°. **651.** 60°. **652.** 7 см. **654.** 12 см. **656.** Див. мал.



§ 23. **668.** $AP = AF = 7$ см; $BP = BM = 1$ см; $CM = CF = 5$ см. **669.** 10 см; 12 см; 14 см. **670.** 20 см. **671.** 38 см. **673.** 9°. **675.** Не обов'язково, див. мал.



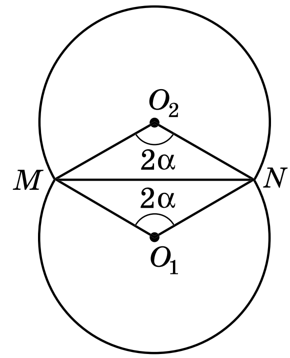
§ 24. **681.** 1), 2) Безліч; 3) одне. **695.** 8 см.

§ 25. **702.** 108°. **703.** 116°. **704.** 120°; 60°. **705.** 30°. **706.** 80°. **708.** 40°. **710.** 40°, 70°, 70°, або 40°, 40°, 100°, або 140°, 20°, 20°. **711.** 50°, 65°, 65°, або 50°, 50°, 80°, або 130°, 25°, 25°. **712.** 20°, 40°, 120°. **713.** 10 см. **715.** 11,52 м. **718.** Так.

§ 26. **726.** 8 дм і 20 дм. **727.** 6 см і 9 см. **728.** 1) Зовнішній дотик кіл; 2) кола не перетинаються; 3) внутрішній дотик кіл; 4) кола перетинаються. **729.** 1) Кола не перетинаються; 2) внутрішній дотик кіл; 3) кола перетинаються; 4) зовнішній дотик кіл. **732.** 2 см; 3 см; 5 см. **733.** 40 см. **737.** 17.

§ 27. **773.** *Порада.* Знайдіть кут при основі трикутника. Для цього побудуйте даний кут, суміжний з ним, і поділіть останній навпіл. **774.** Див. пораду до задачі 773. **783.** *Порада.* Побудуйте прямокутний трикутник, у якого один з катетів удвічі менший від гіпотенузи. **789.** 92°. **791.** 15 см і 45 см.

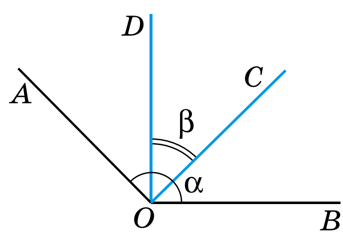
Вправи для повторення розділу 4



797. $\angle AKB = 90°$; $\angle KBA = 25°$; $\angle KAB = 65°$. **800.** 120°. **801.** 18°; 72°; 90°. **802.** 30°; 30°; 120°. **803.** 1,5 см. **806.** Ні. **812.** 20 см; 25 см; 25 см. **819.** 2 см. **821.** 90°; 54°; 90°; 126°. **822.** *Порада.* Шукане геометричне місце точок – дві дуги кіл із центрами O_1 і O_2, з яких MN видно під кутом 2α (див. мал.). **824.** 4 см; 7 см. **825.** 40 см; 28 см. **826.** Зовнішній дотик двох кіл. **827.** 10 см і 6 см або 40 см і 24 см.

Задачі підвищеної складності

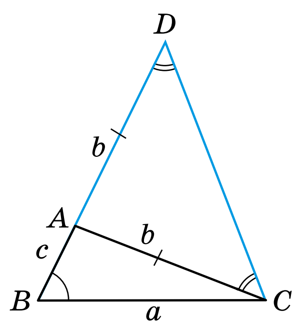
2. *Порада.* $\angle AOK = 50°$. **5.** $BC < AB$. **6.** 1) $\angle AOL = \angle COP$; 2) $\angle LOP = \angle AOC$. **8.** 1) Так, наприклад, 1° і 179°; 2) ні. **9.** 1) 108° і 72°; 2) 80° і 100°. **10.** Однаково, по 6. **11.** 60° або $\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ$. **12.** *Розв'язання.* Нехай дано тупий $\angle AOB = \alpha$ (див. мал.). $OA \perp OC$, $OB \perp OD$, $\angle COD$ – гострий, $\angle COD = \beta$.



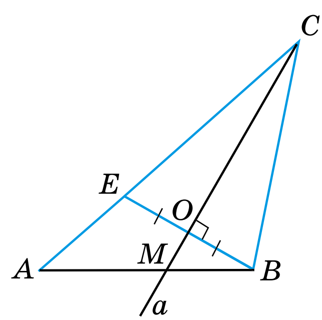
1) $\angle AOD = \angle AOC - \angle DOC$; $\angle AOD = 90° - \beta$.
2) $\angle BOC = \angle DOB - \angle DOC$; $\angle BOC = 90° - \beta$.
3) $\angle AOB = \angle AOD + \angle DOC + \angle COB$.

Тоді $\alpha = 90° - \beta + \beta + 90° - \beta$, звідки $\alpha + \beta = 180°$, що й потрібно було довести. **13.** Ні. **14.** Так. **15.** 80°; 100°; 80°; 100°. **16.** 16 см. *Розв'язання.* Нехай a см, b см, c см – сторони трикутника, а P см – його периметр. $P = a + b + c$. За умовою $P - a = 10$, $P - b = 13$, $P - c = 9$. Маємо $a + b + c - a = 10$, тобто $b + c = 10$. Аналогічно $a + c = 13$, $a + b = 9$. Маємо систему: $\begin{cases} b + c = 10, \\ a + c = 13, \\ a + b = 9. \end{cases}$ Склавши почленно всі три рівняння, одержимо: $2a + 2b + 2c = 32$; $2(a + b + c) = 32$; $a + b + c = 16$. Отже, периметр трикутника дорівнює 16 см. **18.** $90 - \frac{\alpha}{2}$. **19.** 90 см. *Розв'язання.* 1) Оскільки $\triangle ABC = \triangle CDA$, то $BC = AD$. 2) $CO = BC - BO$, $AO = AD - DO$. Але $BC = AD$, $BO = DO$, тому $AO = OC$. 3) Позначимо $AO = OC = x$ см, тоді $AC = (x - 30)$ см. 4) Периметр $P_{\triangle ABC} = 100$ см. Маємо: $AB + BC + CA = 100$, $AB + BO + OC + CA = 100$, $40 + 10 + x + x - 30 = 100$. Звідки $x = 40$ (см). 5) $P_{\triangle AOC} = x + x + x - 30 = 3x - 30 = 3 \cdot 40 - 30 = 90$ (см). **24.** 1) Гострокутний; 2) гострокутний. **25.** 45°. **26.** 36°, 36°, 108°. **29.** *Порада.* Розгляньте трикутники AKC і BKC.

30. $\frac{a}{3}$ см. **31.** 85°. **32.** $\angle C = 60°$. *Порада.* $\triangle ACA_1 = \triangle BAB_1$ (за двома катетами). **33.** *Порада.* Розгляньте коло із центром у точці B, радіус якого BA. **34.** a см. **35.** $2m$ см. *Розв'язання.* За властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки, маємо $AN = AM = m$ см, $BM = BK$ і $CK = CN$. Нехай P см – периметр трикутника ABC. Тоді $P = AB + BC + CA = AB + BK + KC + CA = AB + BM + CN + CA = (AB + BM) + (AC + CN) = AM + AN = m + m = 2m$ (см). **36.** 10 см. **39.** *Порада.* Оскільки $54° \cdot 3 = 162°$, то можна побудувати кут 18° ($18° = 180° - 162°$). **41.** *Порада.* Побудуйте $\triangle BCD$, у якого $\angle DBC = \angle B$, $BD = AB + AC$ (мал. 1). Тоді точка A визначається з умови $\angle ADC = \angle ACD$. **42.** *Порада.* Слід розглянути $\triangle CMN$, у якого $MN = P$, $\angle M = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle N = \frac{1}{2}\angle B$. **43.** *Порада.* Нехай пряма a перетинає AB у точці M. Побудуйте відрізок $BE \perp a$, $BO = OE$ (мал. 2). Шукана точка C є точкою перетину прямих a і AE. **44.** Жодного, один або два розв'язки.



Мал. 1



Мал. 2

Додаткові теми

23. *Порада.* Шукана точка – точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків MN і CD. **24.** *Порада.* Нехай дано кола із центрами O_1 і O_2, радіуси яких r_1 і r_2, а потрібно побудувати коло радіуса r, що дотикається до даних. Побудуйте кола із центрами в точках O_1 і O_2, радіуси яких $r_1 + r$ та $r_2 + r$ відповідно. **26.** *Порада.* Шукана точка – точка перетину серединного перпендикуляра до AB та прямої a. **33.** Коло, діаметром якого є гіпотенуза трикутника без точок, що є кінцями гіпотенузи. **34.** Так, вона дорівнює 9 см. **35.** 1 : 2. **36.** $\angle O_1AO_2 = 60°$; $\angle AO_1B = 120°$. **38.** 40.

Відповіді до завдань у тестовій формі «Домашня самостійна робота»

№ завдания / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	В	А	Б	Б	Г	Г	А	В	Г	В	А	Г	1–Г; 2–А; 3–Б
2	Г	Б	Г	Б	А	В	В	Б	А	В	Б	Г	1–В; 2–А; 3–Б
3	Б	Б	Б	Г	В	В	Г	А	А	Г	Г	Б	1–А; 2–В; 3–Б
4	В	А	В	Б	Г	Г	Б	Г	А	Б	А	В	1–Б; 2–Г; 3–В
5	Б	В	Г	А	Б	Б	А	Б	В	В	А	В	1–В; 2–А; 3–Г

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Розділ 3. Трикутники. Ознаки рівності трикутників

Розділ 4. Коло і круг

Додаткові теми

Відеоуроки за темами підручника можна переглянути за посиланням *https://cutt.ly/jw8Dhib3* або *QR*-кодом.

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня / учениці	Клас	Навчальний рік	Оцінка	
				на початку року	в кінці року
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Редактор *Олена Мовчан*
Обкладинка *Олександра Павленка*
Макет, художнє оформлення *Олександра Павленка*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректор *Інна Борік*

Формат 70×100/16.
Ум. друк. арк. 18,2. Обл.-вид. арк. 15,16.
Тираж 319071 пр. Вид. № 0024.
Зам. № 24-04-0502.

ТОВ «Генеза», 01133, Україна, місто Київ,
вул. Генерала Алмазова, 18/7 (літ. В), офіс 404.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Максиміліанівська, 17, м. Харків, 61024, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 6847 від 19.07.2019.