

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 11

1 1. Які з функцій є первісними для функції $f(x) = 5$:

- 1) $F(x) = 5x^2$; 2) $F(x) = 5x$;
3) $F(x) = 0$; 4) $F(x) = 5x - 7$?

2. Відомо, що $(x^2)' = 2x$. Запишіть три довільні первісні для функції $f(x) = x^2$.

2 3. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$:

- 1) $F(x) = x^5 - 4x + 7$, $f(x) = 5x^4 - 4$;
2) $F(x) = e^{3x} - \cos x$, $f(x) = 3e^{3x} + \sin x$;
3) $F(x) = 12 + \sin 3x$, $f(x) = 3\cos 3x$;
4) $F(x) = e^x \sin x$, $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$.

4. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку:

1) $F(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $F(x) = \ln x + \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0; +\infty)$.

5. Чи правильно знайдено невизначений інтеграл:

1) $\int 7x dx = 7 + C$; 2) $\int \cos x dx = \sin x + C$?

6. Покажіть, що функція $f(x) = x^4 + 3$ є розв'язком диференціального рівняння $y' = 4x^3$.

3 7. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на R .

- 1) $F(x) = (5x^3 - 7)^4$, $f(x) = 60x^2(5x^3 - 7)^3$;
2) $F(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \cos^2 x$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} - \sin 2x$.

8. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на вказаному проміжку:

1) $F(x) = 4x^{-3,5} \sqrt{x}$, $f(x) = -\frac{12}{x^4}$, $x \in (0; +\infty)$;

2) $F(x) = \frac{2}{x^5} - \ln(-x)$, $f(x) = -\frac{10}{x^6} - \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty; 0)$.

9. Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на вказаному проміжку:

1) $F(x) = 2x + \operatorname{tg} 4x$, $f(x) = 2 + \frac{4}{\cos^2 4x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right)$;

2) $F(x) = \cos 4x + \frac{5}{x}$, $f(x) = -\sin 4x - \frac{5}{x^2}$, $x \in (0; +\infty)$;

$$3) F(x) = 3x^2 - \operatorname{ctg} 2x, \quad f(x) = 6x - \frac{2}{\sin^2 2x}, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$4) F(x) = (3x^2 + 7)^5, \quad f(x) = 30x(3x^2 + 7)^4, \quad x \in (-\infty; +\infty)?$$

10. Покажіть, що функція $y = 5e^{2x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y' - 2y = 0$.

4 11. Доведіть, що функція $F(x) = x^3|x|$ є первісною для функції $f(x) = 4x^2|x|$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

12. Чи є розв'язком диференціального рівняння $x^4y' = -3$ функція:

$$1) y = \frac{1}{x^3}; \quad 2) y = 4 - \frac{1}{x^3}; \quad 3) y = \frac{1}{x^3} - 4; \quad 4) y = -\frac{3}{x^4}?$$

13. Чи є функція $F(x) = |x - 3|$ первісною для функції $f(x) = 1$, якщо $x \in [0; 4]$?

До § 12

1 14. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

$$1) f(x) = -5; \quad 2) f(x) = e^x; \quad 3) f(x) = x^5; \quad 4) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

15. Знайдіть невизначений інтеграл:

$$1) \int x^{-8} dx; \quad 2) \int \sin x dx.$$

16. Знайдіть три різні первісні для функції:

$$1) \int(x) = \frac{1}{x^3}; \quad 2) f(x) = \sqrt[5]{x}.$$

2 Знайдіть загальний вигляд первісних для функції (17–18):

$$17. 1) f(x) = 3 \cdot 2^x; \quad 2) f(x) = \frac{5}{\sin^2 x};$$

$$3) f(x) = 3x^8; \quad 4) f(x) = -7\cos x.$$

$$18. 1) f(x) = x^7 + x^2; \quad 2) f(x) = 4x^3 - 2x + 7;$$

$$3) f(x) = 10x^4 + 12x^5; \quad 4) f(x) = x^{10} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

19. Знайдіть невизначений інтеграл:

$$1) \int \left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x} \right) dx; \quad 2) \int (2\cos x - 3\sin x) dx.$$

20. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, яка набуває даного значення в даній точці:

$$1) f(x) = 4x^3; \quad F(-1) = 3; \quad 2) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.$$

21. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку A :

1) $f(x) = e^x$; $A(0; 7)$; 2) $f(x) = \cos x$; $A\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$.

22. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що задовольняє дану умову:

1) $f(x) = \sqrt[9]{x}$; $F(1) = 3,9$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; $F(16) = 4$.

3 23. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку B :

1) $f(x) = 5x^4 - 6x$; $B(1; 2)$; 2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - 2$; $B(4; 4)$.

24. Для функції $f(x)$ знайдіть загальний вигляд первісних:

1) $f(x) = (2x + 3)^4$; 2) $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right)$;

3) $f(x) = e^{0,5x-3}$; 4) $f(x) = \frac{3}{\sin^2 \frac{x}{4}}$.

25. Знайдіть невизначений інтеграл:

1) $\int \frac{dx}{3x+7}$; 2) $\int 5^{\frac{1}{3}x-7} dx$.

26. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку C :

1) $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{24}; 0\right)$; 2) $f(x) = \frac{35}{7x-6}$, $C(1; 2)$.

27. Швидкість руху точки (в м/с) задано рівнянням $v(t) = 5 + 4t$. Знайдіть рівняння руху $s = s(t)$ цієї точки, якщо в момент часу $t = 1$ с точка пройшла $s = 10$ м.

4 28. Для функції $f(x)$ знайдіть загальний вигляд первісних:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x-5}} + \frac{4}{\cos^2 \frac{x}{3}}$; 2) $f(x) = \sqrt{2x+1} - e^{7-x}$.

29. Для функції $f(x) = \sqrt[5]{10x+1}$ знайдіть первісну, яка проходить через точку $\left(0; -\frac{11}{12}\right)$.

30. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)$, попередньо спростивши її формулу:

1) $f(x) = 2\sin 3x \cos 3x$; 2) $f(x) = \cos 2x \cos \frac{\pi}{8} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{8}$;

$$3) f(x) = (2x^2 + x)^2; \quad 4) f(x) = \frac{x^6 - 4x^3 + x^2}{x^3}.$$

31. Знайдіть первісну для функції $f(x) = 5x^4 + 2x - 7$, один з нулів якої дорівнює 2.

32. Точка рухається по прямій з прискоренням $a(t) = 7 + 2t$ (м/с²). У момент часу $t = 2$ с швидкість точки була 20 м/с. Якою була швидкість точки в момент часу $t = 1$ с?

33. Чи можна стверджувати, що первісна для періодичної функції є також функцією періодичною?

До § 13

2 34. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x; y = 0; x = 2; x = 4;$

2) $y = x^3; y = 0; x = 2; x = 3;$

3) $y = \frac{1}{\cos^2 x}; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{4};$

4) $y = x^2 + 2; y = 0; x = 0; x = 3.$

35. Знайдіть площу фігури, обмеженої даними лініями, попередньо виконавши схематичний малюнок:

1) $y = x^4; y = 0; x = 2;$

2) $y = 9 - x^2; y = 0.$

36. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = e^x; y = 0; x = -2; x = 0;$

2) $y = 3^x; y = 0; x = 0; x = 2;$

3) $y = e^x + 1; y = 0; x = -1; x = 2;$

4) $y = 5^x \ln 5; y = 0; x = 0; x = 1.$

37. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 10 + 0,2t$ (м/с). Знайдіть переміщення тіла:

1) за перші 3 с після початку відліку часу;

2) за інтервал часу з $t_1 = 10$ с до $t_2 = 20$ с.

3 Знайдіть, попередньо схематично виконавши малюнок, площу фігури, обмеженої лініями (38–39):

38. 1) $y = x^2 - 1, y = 0, x = -2;$ 2) $y = x^2 - 3x, y = 0, x = 6;$

3) $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 16;$ 4) $y = \sqrt{x+9}, y = 0, x = 0.$

39. 1) $y = \cos 2x, y = 0, x = -\frac{\pi}{12}, x = \frac{\pi}{12};$

2) $y = \sin \frac{x}{4}, y = 0, x = 2\pi, x = 4\pi;$

3) $y = e^{3x+1}, y = 0, x = 0, x = 1;$

4) $y = \frac{1}{x-3}, y = 0, x = 4, x = 7.$

40. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 6t - 0,3t^2$ (м/с). Знайдіть:

- 1) переміщення тіла від початку руху до зупинки;
- 2) прискорення тіла в момент часу $t = 5$ с.

Знайдіть, попередньо виконавши схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями (41–42):

41. 1) $y = \sqrt{|x|}$, $y = 0$, $x = -9$, $x = -4$;

2) $y = |\sin x|$, $y = 0$, $x = -\frac{2\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$.

4 42. $y = 0$, $y = \begin{cases} 1 + \sin \frac{x}{2}; & -\pi \leq x < 0; \\ 1 - \frac{x}{5}; & 0 \leq x \leq 5. \end{cases}$

43. Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 3t^2 - 2t$ (м/с²). Знайдіть переміщення точки за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с, якщо в момент часу $t = 2$ с її швидкість була 10 м/с.

До § 14

1 44. Чи правильно знайдено визначений інтеграл:

1) $\int_0^1 x^2 dx = 2x \Big|_0^1 = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2$;

2) $\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$;

4) $\int_{-4}^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-4}^2 = \frac{(-4)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 8$?

Обчисліть інтеграл (45–51):

45. 1) $\int_0^4 x dx$; 2) $\int_1^4 5 dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$;

4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 5) $\int_{-2}^0 e^x dx$; 6) $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$.

2 46. 1) $\int_{-2}^1 (2x+3) dx$; 2) $\int_0^3 (4x^3 - x^2) dx$;

3) $\int_1^2 \frac{dx}{x^4}$; 4) $\int_{-5}^{-1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

$$47. \quad 1) \int_0^1 (5^x \ln 5 + 2) dx; \quad 2) \int_0^2 0,25^x \ln 4 dx;$$

$$3) \int_0^1 (e^x + 3x^2) dx; \quad 4) \int_2^4 (2^x \ln 4 - x) dx.$$

$$3 \quad 48. \quad 1) \int_1^9 \frac{x dx}{x^{2,5}}; \quad 2) \int_1^{32} \frac{6x}{\sqrt[5]{x^4}} dx.$$

$$49. \quad 1) \int_{-2}^0 (x+2)^5 dx; \quad 2) \int_0^{2\pi} \sin \frac{x}{2} dx; \quad 3) \int_0^1 (1-3x)^3 dx;$$

$$4) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}; \quad 5) \int_{-6}^{-1} \sqrt{3-x} dx; \quad 6) \int_0^{121} \frac{dx}{\sqrt[5]{2x+1}}.$$

$$50. \quad 1) \int_0^2 e^{-x} dx; \quad 2) \int_{-4}^0 e^{\frac{x}{4}} dx; \quad 3) \int_0^{\frac{1}{3}} 7^{3x-1} \ln 7 dx; \quad 4) \int_0^2 \frac{dx}{5x+1}.$$

$$51. \quad 1) \int_{0,1}^1 \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^4} \right) dx; \quad 2) \int_0^6 \left(3^{\frac{x}{6}} + \sin \pi x \right) dx.$$

52. Обчисліть, використовуючи геометричний зміст інтеграла:

$$1) \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx; \quad 2) \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

4 53. Обчисліть інтеграл:

$$1) \int_0^1 (x^2 - 4x)^2 dx; \quad 2) \int_{0,2}^{0,5} \frac{2x^4 + x^3 - x}{x^3} dx;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx; \quad 4) \int_0^1 \frac{18^x + 6^x}{2^x} dx.$$

54. Знайдіть $\int_{-1}^2 f(x) dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ x+2, & \text{якщо } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

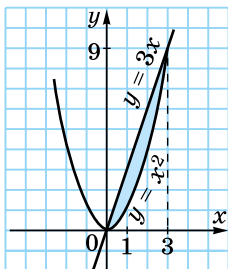
55. Обчисліть $\int_{-3}^0 |x+1| dx$.

56. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^2 (5 - \sqrt{4-x^2}) dx$, використовуючи його геометричний зміст.

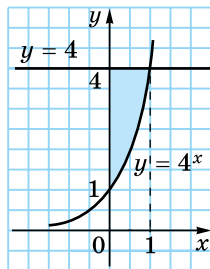
57. При якому значенні параметра a значення інтеграла $\int_0^a (4-2x) dx$ буде найбільшим?

До § 15

2 58. Знайдіть площу фігури, зображеної на:
1) малюнку 15.25; 2) малюнку 15.26.



Мал. 15.25



Мал. 15.26

3 59. Тіло рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекцію якої на цю вісь можна задати формулою $f(x) = 3x^2 - 2x$. Знайдіть роботу, яку виконає ця сила при переміщенні тіла з точки з абсцисою 2 в точку з абсцисою 5.

60. Знайдіть об'єм тіла, що утвориться внаслідок обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

- 1) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; 2) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (61–62):

61. 1) $y = x^2$ і $y = -2x$; 2) $y = 3 - x^2$ і $y = 2x$;
3) $y = 5 - x^2$ і $y = 1$; 4) $y = 3x^2$ і $y = 1 - 2x$;
5) $y = x^2$ і $y = 2 - x^2$;
6) $y = x^2 + 4x$; $y = 5$ і $x = 0$ за умови, що $x \geq 0$.

62. 1) $y = 3^x$, $y = 9^x$, $x = 1$; 2) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;
3) $y = \frac{4}{x}$, $x = 4$, $y = 4$; 4) $y = \frac{8}{x}$ і $y = 9 - x$.

63. Знайдіть об'єм тіла, що утвориться внаслідок обертання навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

- 1) $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$;
2) $y = 2x - 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

64. Сила в 4 Н розтягує пружину на 1 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 10 см?

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (65–66):

65. 1) $y = -\sin x$, $y = 2\sin x$, $x = -\frac{2\pi}{3}$, $x = 0$;

2) $y = \sqrt{x}$ і $y = \frac{x}{2}$.

4 66. $y = 8^x$, $y = 2^{-x}$ і $y = 8$.

Знайдіть об'єм тіла, що утворилося внаслідок обертання навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями (67–68):

67. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ і $x = 8$.

68. $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 0$.

Відповіді до вправ для повторення розділу 2

9. 1), 4) Так; 2), 3) ні. 11. 1), 3) Так; 2), 4) ні. 13. Ні. 22. 1) $\frac{9}{10}x^9\sqrt{x} + 3$;

2) $4\sqrt[4]{x} - 4$. 23. 1) $x^5 - 3x^2 + 4$; 2) $6\sqrt{x} - 2x$. 24. 1) $\frac{(2x+3)^5}{10} + C$;

2) $\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) + C$; $\frac{1}{3}\sin\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) + C$; 3) $2e^{\frac{1}{2}x-3} + C$; 4) $-12\operatorname{ctg}\frac{x}{4} + C$.

25. 1) $\frac{1}{3}\ln|3x+7| + C$; 2) $\frac{3 \cdot 5^{\frac{1}{3}x-7}}{\ln 5} + C$. 26. 1) $-\frac{1}{4}\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $5\ln|7x - 6| + 2$. 27. $s(t) = 5t + 2t^2 + 3$. 28. 1) $\frac{1}{3}\sqrt{6x-5} + 12\operatorname{tg}\frac{x}{5} + C$;

2) $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + e^{7-x} + C$. $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + e^{7-x} + C$.

29. $\frac{1}{12}(10x+1)\sqrt[5]{10x+1} - 1$. 30. 1) $-\frac{1}{6}\cos 6x + C$; 2) $0,5\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + C$;

3) $\frac{4}{5}x^5 + x^4 + \frac{x^3}{3} + C$; 4) $\frac{x^4}{4} - 4x + \ln|x| + C$. 31. $x^5 + x^2 - 7x - 22$.

32. 10 м/с. 33. Ні, наприклад первісною для періодичної функції $f(x) = \sin x + 1$ є функція $F(x) = -\cos x + x + C$, яка неперіодична.

37. 1) 30,9 м; 2) 130 м. 38. 1) $\frac{4}{3}$; 2) 22,5; 3) $\frac{128}{3}$; 4) 18. 39. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 4;

3) $\frac{1}{3}(e^4 - e)$; 4) $\ln 4$. 40. 1) 400 м; 2) 3 м/с². 41. 1) $12\frac{2}{3}$; 2) 1. 42. 0,5 + π .

43. $23\frac{1}{3}$ м. 47. 1) 6; 2) $\frac{15}{16}$; 3) e ; 4) 18. 48. 1) $\frac{4}{3}$; 2) 315. 49. 1) $10\frac{2}{3}$; 2) 4;

- 3) $-1,25$; 4) 3 ; 5) $12\frac{2}{3}$; 6) 50 . **50.** 1) $1 - e^{-2}$; 2) $4(1 - e^{-1})$; 3) $\frac{2}{7}$;
 4) $\frac{1}{5}\ln 11$. **51.** 1) $999 - \ln 0,1$; 2) $\frac{12}{\ln 3}$. **52.** 1) $\frac{9\pi}{4}$; 2) 2π . **53.** 1) $3\frac{8}{15}$;
 2) $-2,49$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{6}{\ln 3}$. **54.** $5,5$. **55.** $2,5$. **56.** $20 - 2\pi$. **57.** $a = 2$. **61.** 1) $1\frac{1}{3}$;
 2) $10\frac{2}{3}$; 3) $10\frac{2}{3}$; 4) $1\frac{5}{27}$; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) $2\frac{2}{3}$. **62.** 1) $\frac{2}{\ln 3}$; 2) $e^2 - 3$; 3) $8\ln 2$;
 4) $31,5 - 24 \ln 2$. **63.** 1) π ; 2) 57π . **64.** 2 Дж. **65.** 1) $4,5$; 2) $1\frac{1}{3}$.
66. $32 - \frac{28}{3\ln 2}$. **67.** 8π . **68.** $\frac{19\pi}{24}$.