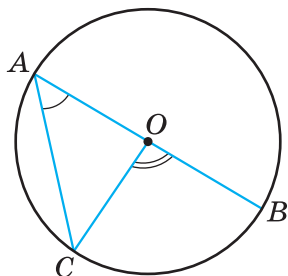
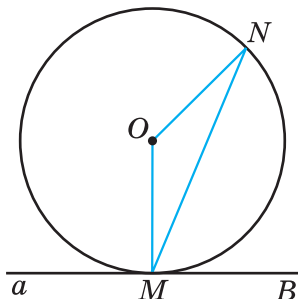


693. Точка O – центр кола (мал. 24.11). Знайдіть:

- 1) $\angle COB$, якщо $\angle CAO = 50^\circ$;
- 2) $\angle CAO$, якщо $\angle COB = 110^\circ$.



Мал. 24.11



Мал. 24.12

694. Точка O – центр кола, а точка M – точка дотику прямої a з колом (мал. 24.12). Знайдіть:

- 1) $\angle NMB$, якщо $\angle MON = 140^\circ$;
- 2) $\angle MON$, якщо $\angle BMN = 65^\circ$.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

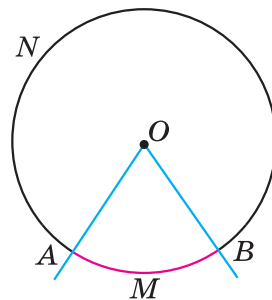
695. Відрізок 32 см завдовжки поділено двома точками на три не рівних між собою відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 20 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.

§ 25. Центральні та вписані кути

Центральний кут. Градусна міра дуги

Центральним кутом називають кут з вершиною в центрі кола.

На малюнку 25.1 $\angle AOB$ – центральний кут, сторони якого перетинають коло в точках A і B . Точки A і B розбивають коло на дві дуги. Частину кола, яка лежить усередині кута, називають *дугою кола*, що відповідає цьому центральному куту.



Мал. 25.1

Якщо центральний кут менший від розгорнутого,

то дуга, що йому відповідає, є меншою за півколо (її виділено кольором на мал. 25.1).

Якщо центральний кут більший за розгорнутий,

то дуга, що йому відповідає, є більшою за півколо.

Розгорнутому куту

відповідає дуга, що є півколом.

Дугу позначають символом $\frown$, який записують перед назвою дуги або над нею. Щоб уточнити, про яку саме з двох дуг, на які центральний кут поділив коло, ідеться, на кожній з них позначають довільну точку, відмінну від кінців дуги. Наприклад, M і N (мал. 25.1). Тоді ці дуги можна записати так:

$\frown AMB$ (або $\overline{AMB}$) та $\frown ANB$ (або $\overline{ANB}$).

Якщо зрозуміло, про яку саме дугу йдеться, то для її позначення вказують лише кінці дуги, наприклад $\overline{AB}$ (або $\frown AB$).

Дугу кола можна вимірювати в градусах.

Градусною мірою дуги кола називають градусну міру відповідного центрального кута.

Наприклад, якщо $\angle AOB = 70^\circ$, то $\overline{AMB} = 70^\circ$ (мал. 25.1).

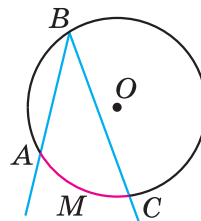
Очевидно, що градусна міра дуги, яка є півколом, дорівнює 180° , а дуги, що є колом, – 360° . На малюнку 25.1:

$$\overline{ANB} = 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ.$$

Вписаний кут

Вписаним кутом називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло.

На малюнку 25.2 сторони вписаного кута ABC перетинають коло в точках A і C . Кажуть, що цей кут *спирається на дугу* AMC .



Мал. 25.2

Точки перетину сторін вписаного кута з колом ділять коло на дві дуги. З них тією, на яку спирається вписаний кут, буде дуга, що не містить його вершини. Наприклад, на малюнку 25.2 сторони вписаного кута ABC поділили коло на дві дуги: $\widehat{ABC}$ і $\widehat{AMC}$. Оскільки $\widehat{AMC}$ не містить вершини кута (точки B), то вона і є дугою, на яку спирається вписаний кут ABC . Цю дугу виділено кольором.

Теорема про вписаний кут та наслідки з неї

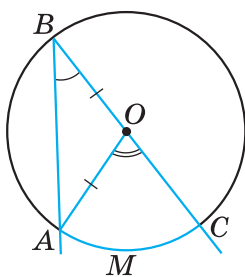


Теорема (про вписаний кут). Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

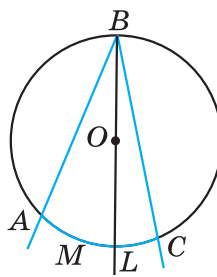
Доведення. Нехай $\angle ABC$ є вписаним у коло із центром O та спирається на дугу AC (мал. 25.2). Доведемо, що $\angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{AMC}$.

Розглянемо три можливих випадки розташування центра кола відносно даного вписаного кута.

1) Нехай центр кола – точка O – лежить на одній зі сторін кута, наприклад BC (мал. 25.3). Центральний кут AOC є зовнішнім кутом трикутника AOB . Тоді, за властивістю зовнішнього кута, $\angle AOC = \angle ABO + \angle OAB$. Але $\triangle AOB$ – рівнобедрений ($AO = OB$ як радіуси), тому $\angle ABO = \angle OAB$. Отже, $\angle AOC = 2\angle ABO$, тобто $\angle ABC = \angle ABO = \frac{1}{2} \widehat{AMC}$. Але ж $\angle AOC = \widehat{AOC}$. Отже, $\angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{AOC}$.



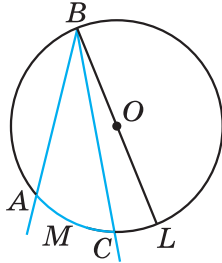
Мал. 25.3



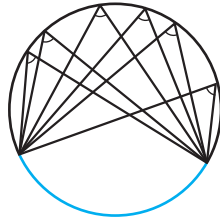
Мал. 25.4

2) Нехай центр кола лежить усередині вписаного кута (мал. 25.4). Проведемо промінь BO , що перетинає коло в точці L . Тоді $\angle ABC = \angle ABL + \angle LBC = \frac{1}{2} \widehat{AL} + \frac{1}{2} \widehat{LC} = \frac{1}{2} (\widehat{AL} + \widehat{LC}) = \frac{1}{2} \widehat{AMC}$.

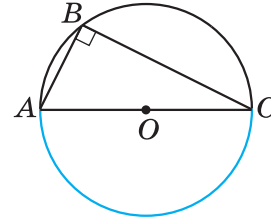
3) Нехай центр кола лежить зовні вписаного кута (мал. 25.5).
Тоді $\angle ABC = \angle ABL - \angle CBL = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AL} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{LC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AL} - \overset{\frown}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. ■



Мал. 25.5



Мал. 25.6



Мал. 25.7



Наслідок 1. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, між собою рівні (мал. 25.6).



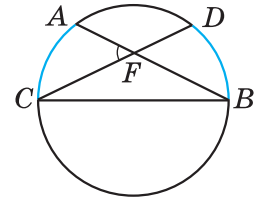
Наслідок 2. Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий (мал. 25.7).

Приклад 1. Довести, що кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою двох дуг, з яких одна міститься між сторонами кута, а друга – між продовженням сторін.

Доведення. Розглянемо $\angle AFC$, вершина якого міститься всередині кола (див. мал.). Доведемо, що $\angle AFC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$.

$\angle AFC$ – зовнішній для трикутника BCF .

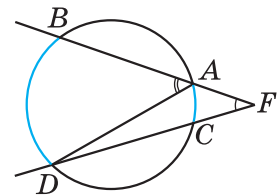
Маємо: $\angle AFC = \angle FBC + \angle FCB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD})$. ■



Приклад 2. Довести, що кут між двома січними, які перетинаються зовні кола, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами.

Доведення. Розглянемо $\angle BFD$, вершина якого лежить зовні кола, а FB і FD – січні кола (див. мал.). Доведемо, що $\angle DFB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$.

1) $\angle BAD$ – зовнішній кут трикутника ADF .



- Маємо: $\angle DAB = \angle ADC + \angle DFB$; тобто $\frac{1}{2} \overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC} + \angle DFB$.
- 2) Тому $\angle DFB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BD} - \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC} = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$. ■

А ще раніше...

Доведення теореми про вписаний кут зустрічається ще в «Началах» Евкліда. Але ще раніше цей факт, як припущення, уперше висловив Гіппократ Хіоський (V ст. до н. е.).

Те, що вписаний кут, який спирається на діаметр, є прямим, знали вавилоняни 4000 років тому, а перше доведення цього факту приписують Фалесу Мілетському.



Який кут називають центральним? ○ Що називають градусною мірою дуги кола? ○ Який кут називають вписаним? ○ Сформулюйте й доведіть теорему про вписаний кут.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 696. (Усно.) Які з кутів на малюнку 25.8 є вписаними в коло?

697. Визначте градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:

- 1) 70° ; 2) 190° .

698. Визначте градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює:

- 1) 20° ; 2) 100° .

699. Точки A і B належать колу й лежать по один бік від хорди CD . Знайдіть $\angle CAD$, якщо $\angle CBD = 55^\circ$.

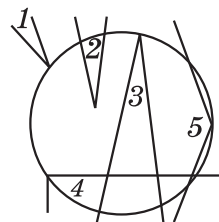
2 700. Точки A і B належать колу й лежать по різні боки від хорди MN . Доведіть, що $\angle MAN + \angle MBN = 180^\circ$.



701. Точки M і N належать колу й лежать по різні боки від хорди AB . Знайдіть $\angle AMB$, якщо $\angle ANB = 70^\circ$.

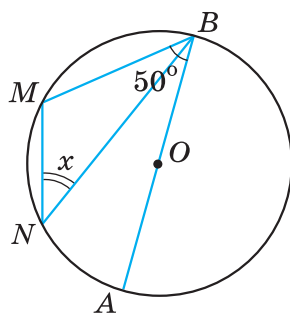
702. Точка P кола і його центр O лежать по різні боки від хорди CD . Знайдіть $\angle COD$, якщо $\angle CPD = 126^\circ$.

703. Точка A кола і його центр O лежать по різні боки від хорди LK . Знайдіть $\angle LAK$, якщо $\angle LOK = 128^\circ$.

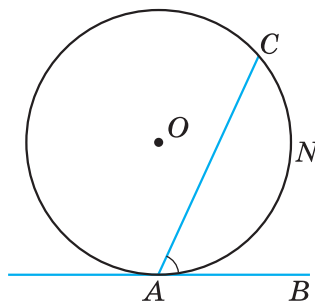


Мал. 25.8

704. Хорда розбиває коло на дві дуги у відношенні 1 : 2. Знайдіть міри вписаних кутів, що спираються на ці дуги.
- 3 705. Хорда AB дорівнює радіусу кола. Точка C кола і його центр лежать по один бік від хорди AB . Знайдіть $\angle ACB$.
706. Хорди AD і BC перетинаються в точці F . $\angle ABC = 20^\circ$, $\angle BCD = 80^\circ$. Знайдіть градусну міру кута AFB .
707. Хорди AB і CD перетинаються в точці M . $\angle ABC = 35^\circ$, $\angle BAD = 55^\circ$. Доведіть, що хорди AB і CD взаємно перпендикулярні.
- 4 708. O – центр кола, $\angle MBA = 50^\circ$ (мал. 25.9). Знайдіть x .



Мал. 25.9



Мал. 25.10

709. Доведіть, що кут між дотичною і хордою, що виходить з точки дотику, дорівнює половині дуги, яка лежить між сторонами кута, тобто $\angle CAB = \frac{1}{2} \widehat{CNA}$ (мал. 25.10).
710. Рівнобедрений трикутник ABC вписано в коло із центром у точці O , $\angle AOB = 80^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC . Скільки розв'язків має задача?
711. Рівнобедрений трикутник MNK вписано в коло із центром у точці O , $\angle MOK = 100^\circ$. Знайдіть кути трикутника MNK . Скільки розв'язків має задача?
712. Коло поділено трьома точками на частини, які відносяться як 1 : 2 : 6, і точки поділу сполучено між собою. Знайдіть кути утвореного трикутника.



Вправи для повторення

713. Дано кут 30° . Коло радіусом 5 см дотикається до сторони кута і має центр на його іншій стороні. Обчисліть відстань від центра кола до вершини кута.

714. Випишіть у порядку зростання внутрішні кути трикутника ABC , якщо $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AC = 6$ см.



Життєва математика

715. Щоб витягти з колодязя відро води, потрібно зробити 12 обертів вала. Знайдіть глибину колодязя, якщо діаметр вала дорівнює 32 см. Для спрощення обчислень вважайте, що $\pi \approx 3$.



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

716. Накресліть відрізок MN завдовжки 6 см.
- 1) Узявши точки M і N за центри, проведіть два кола, одне з яких (із центром у точці M) радіусом 4 см, а друге (із центром у точці N) радіусом 2 см.
 - 2) Скільки спільних точок мають ці кола?
717. Накресліть відрізок AB завдовжки 5 см.
- 1) Узявши точки A і B за центри, проведіть два кола, одне з яких (із центром у точці A) радіусом 3 см, а друге (із центром у точці B) радіусом 4 см.
 - 2) Скільки спільних точок мають ці кола?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

718. У кожній клітинці прямокутної дошки розміром 2025×2027 клітинок сидить жук. За сигналом усі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі або вертикалі) клітинки. Чи обов'язково при цьому залишиться вільна клітинка?